Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 547, 2025 г.

А. И. Генералов

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА В ПРЕДАБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЯХ И КАТЕГОРИЯ ФРЕЙДА

§1. Введение

У Петера Фрейда есть несколько вариантов теорем вложения (см., например, [1, 2]). Один из них [1] – это вложение точной по Квиллену [3] категории в некоторую абелеву категорию, которую я называю категорией Фрейда.

В начале девяностых годов прошлого века автору удалось найти полезное обобщение "относительной гомологической алгебры", отказавшись от коротких точных последовательностей и используя вместо них классы выделенных коядер, удовлетворяющих подходящим аксиомам [4, 5]. В настоящей работе для собственного класса коядер в предабелевой категории описывается точное вложение исходной категории в абелеву категорию, которая строится аналогично категории Фрейда.

§2. Предварительные сведения

2.1. Собственные классы. Пусть $\mathcal{A}$ – предабелева категория. Напомним, что класс ω коядер в $\mathcal{A}$ называется собственным [4], если выполняются следующие условия.

P0. Расщепляемые эпиморфизмы принадлежат ω, т.е. если $\sigma i = \mathrm{id}_X$ для некоторого $X \in \mathcal{A}$, то $\sigma \in \omega$.

P1. Композиция коядер из ω, если она определена, также принадлежит ω.

P2. Пусть

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\sigma'} & B' \\ {\scriptstyle \tau'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ A & \xrightarrow{\sigma} & B \end{array} \tag{2.1}$$

Ключевые слова: предабелева категория, собственный класс коядер, теория локализации по Габриелю, категория точных слева функторов.

– универсальный квадрат, построенный на паре (σ, τ), где $\sigma \in \omega$. Тогда и σ' принадлежит ω.

P3. Если $\sigma\tau \in \omega$ и τ – коядро, то $\sigma \in \omega$.
Элементы из ω называем ω-собственными.

Известно [4], что для собственного класса коядер ω выполняется более сильное условие

P$\overline{3}$. Если $\sigma\tau \in \omega$, а τ – произвольный морфизм, то $\sigma \in \omega$.

Коядро $\sigma\colon A \to B$ в $\mathcal{A}$ называется полустабильным [6], если для любого морфизма $\tau\colon B' \to B$ в универсальном квадрате вида (2.1) морфизм σ' является коядром. Дуально определяется понятие полустабильного ядра. Полустабильное коядро d называется стабильным [6], если $\ker d$ – полустабильное ядро.

Ясно, что любое коядро из собственного класса коядер полустабильно. Более того, класс ω_{sst} всех полустабильных коядер в $\mathcal{A}$ является собственным [4]. Класс всех стабильных коядер ω_{st} также собственный, он исследовался в [6].

Последовательность в $\mathcal{A}$

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{d} C \tag{2.2}$$

называется короткой точной последовательностью, если в ней $i = \ker d$, $d = \operatorname{coker} i$. Если в короткой точной последовательности (2.2) $d \in \omega$, то её называем ω-собственной.

2.2. Теории кручения. Пусть $\mathcal{C}$ – абелева категория. Говорим, что пара $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ полных подкатегорий в $\mathcal{C}$ определяет теорию кручения, если выполнены условия (см., например, [7]):

1) $\mathcal{T} = {}^{\perp}\mathcal{F}$, где ${}^{\perp}\mathcal{F} := \{X \in \mathcal{C} \mid \mathcal{C}(X, Y) = 0 \ \text{ для любого } \ Y \in \mathcal{F}\}$,

2) $\mathcal{F} = \mathcal{T}^{\perp}$, где $\mathcal{T}^{\perp} := \{Y \in \mathcal{C} \mid \mathcal{C}(X, Y) = 0 \ \text{ для любого } \ X \in \mathcal{T}\}$,

3) для любого $C \in \mathcal{C}$ существует короткая точная последовательность $C' \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C''$, в которой $C' \in \mathcal{T}, C'' \in \mathcal{F}$.

Теория кручения $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ называется наследственной, если класс $\mathcal{T}$ замкнут относительно подобъектов.

Говорим, что полная подкатегория $\mathcal{C}'$ абелевой категории $\mathcal{C}$ замкнута относительно расширений, если для любой короткой точной последовательности вида (2.2) из того, что $A, C \in \mathcal{C}'$, следует, что $B \simeq B'$ для некоторого $B' \in \mathcal{C}'$.

Отметим, что для теории кручения $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ каждый из классов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$ замкнут относительно расширений.

С теорией кручения $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ связан идемпотентный радикал, т. е. подфунктор $t \subset \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ такой, что $t \circ t = t$ и $t(C/tC) = 0$ для любого $C \in \mathcal{C}$; а именно, tC – это наибольший среди подобъектов в $C \in \mathcal{C}$, принадлежащих $\mathcal{T}$.

2.3. Локализация по Габриэлю. Пусть $\mathcal{C}$ – кополная абелева категория. Полная подкатегория $\mathcal{S}$ в $\mathcal{C}$ называется подкатегорией Серра, если для любой короткой точной последовательности в $\mathcal{C}$ вида $C' \rightarrowtail C \twoheadrightarrow C''$ объект C принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда C', C'' принадлежат $\mathcal{S}$. Подкатегория $\mathcal{S}$ называется локализующей, если $\mathcal{S}$ – подкатегория Серра, которая замкнута относительно копределов.

Следующая теорема доказана П. Габриэлем в [8].

Теорема A. *Пусть $\mathcal{S}$ – локализующая подкатегория в абелевой категории $\mathcal{C}$. Тогда факторкатегория $\mathcal{C}/\mathcal{S}$ тоже абелева.*

Здесь $\mathcal{C}/\mathcal{S}$ – категория частных категории $\mathcal{C}$ относительно морфизмов f в $\mathcal{C}$ таких, что $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$ (см. [8,9]). Канонический функтор факторизации $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{S}$ имеет правый сопряжённый функтор S, называемый функтором сечений.

Пусть $\mathcal{S}$ – локализующая подкатегория в $\mathcal{C}$. Объект $C \in \mathcal{C}$ называется $\mathcal{S}$-замкнутым, если для любого морфизма $f\colon X \to Y$ такого, что $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{S}$, индуцированный гомоморфизм $f^*\colon \mathcal{C}(Y, C) \to \mathcal{C}(X, C)$ сюръективен. Через $\mathcal{L}$ обозначим полную подкатегорию в $\mathcal{C}$, состоящую из $\mathcal{S}$-замкнутых объектов.

Замечание 2.1. Часто в определении $\mathcal{S}$-замкнутого объекта требование сюръективности гомоморфизма f^* заменяют на биективность (см. [7,8]). Легко видеть, что это приводит к равносильному определению соответствующего понятия.

Замечание 2.2. Отметим также, что $C \in \mathcal{C}$ оказывается $\mathcal{S}$-замкнутым тогда и только тогда, когда расщепляется любая короткая точная последовательность

$$0 \to C \to X \to Y \to 0,$$

в которой $Y \in \mathcal{S}$ (см. [7, предложение 15.12]).

Замечание 2.3. Если $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to ST$ – единица сопряжённости $T \dashv S$, то объект M из $\mathcal{C}$ является $\mathcal{S}$-замкнутым тогда и только тогда, когда $\varepsilon_M\colon M \to ST(M)$ – изоморфизм (см. [7, следствие 15.15]). Кроме того, коединица сопряжённости $\eta\colon TS \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}/\mathcal{S}}$ – естественный изоморфизм (см. [7, предложение 15.14]).

Из результатов [8, Sec. III] непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема Б. *Пусть $\mathcal{S}$ – локализующая подкатегория в абелевой категории $\mathcal{C}$, и пусть $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{S}$ – канонический функтор факторизации. Тогда T индуцирует эквивалентность категорий $T'\colon \mathcal{L} \to \mathcal{C}/\mathcal{S}$.*

Предложение 2.4. *Пусть $\mathcal{S}$ – локализующая подкатегория в абелевой категории $\mathcal{C}$, $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{S}$ – соответствующий канонический функтор. Пусть $L_1 \xrightarrow{\alpha} L_2 \xrightarrow{\pi} L_3$ – последовательность в $\mathcal{C}$ такая, что $L_k \in \mathcal{L}$ для $k \in \{1,2,3\}$ и $T\alpha = \ker(T\pi)$. Тогда $\alpha = \ker \pi$.*

Доказательство. Пусть $\chi\colon X \to L_2$ – морфизм такой, что $\pi\chi = 0$. Найдётся морфизм $\Psi\colon T(X) \to T(L_2)$ для которого $T\chi = T\alpha \circ \Psi$. Пусть $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to ST$ – единица сопряжённости $T \dashv S$. Положим $\psi := \varepsilon_{L_1}^{-1} S(\Psi)\varepsilon_X$. Тогда с использованием соотношения $\eta T \circ T\varepsilon = \mathrm{id}$ (см. [10, раздел 4.1]) непосредственно получаем, что $T\psi = \Psi$. Таким образом, $T(\chi - \alpha\psi) = 0$, т.е. $\mathrm{Im}(\chi - \alpha\psi) \in \mathcal{S}$, и потому $\mathrm{Im}(\chi - \alpha\psi) = 0$, так как L_2 $\mathcal{S}$-замкнут. Остаётся заметить, что ввиду [7, лемма 15.5] α – мономорфизм. □

§3. Конструкция категории Фрейда

Всюду далее $\mathcal{A}$ – скелетно малая предабелева категория с фиксированным собственным классом ω коядер в ней.

3.1. Категория $\mathcal{A}$-модулей. Через $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ обозначим категорию (аддитивных) контравариантных функторов из $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{A}$b абелевых групп. Напомним, что $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ – абелева категория, полная и кополная. Более того, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ – категория Гротендика с образующим, и следовательно, в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ существуют инъективные оболочки (см. [1]), т.е. любой объект из $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ является существенным подобъектом в некотором инъективном объекте.

3.2. Теория кручения в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Функтор $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ называется ω-пренебрежимым, если для любого объекта $Z \in \mathcal{A}$ и любого $z \in F(Z)$ существует ω-собственное коядро $d\colon Y \to Z$ такое, что $(Fd)(z) = 0$. Через $\mathcal{T}_\omega$ обозначим полную подкатегорию в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, состоящую из ω-пренебрежимых функторов.

$F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ называется ω-моно-функтором, если для любого $d \in \omega$ Fd – мономорфизм; через $\mathcal{F}_\omega$ обозначим полную подкатегорию в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, состоящую из ω-моно-функторов.

Теорема 3.1. *$(\mathcal{T}_\omega, \mathcal{F}_\omega)$ – наследственная теория кручения в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Доказательство теоремы 3.1 будет разбито на несколько шагов.

Предложение 3.2. *Имеют место следующие три утверждения.*

(а) *Класс $\mathcal{T}_\omega$ замкнут относительно фактобъектов.*

(б) *Класс $\mathcal{F}_\omega$ замкнут относительно подобъектов.*

(в) $\mathcal{T}_\omega \cap \mathcal{F}_\omega = \{0\}$.

Доказательство. (а) Пусть $\sigma\colon F \to F'$ – эпиморфизм в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, где $F \in \mathcal{T}_\omega$. Фиксируем объект $Z \in \mathcal{A}$, а затем элемент $z' \in F'(Z)$. Пусть $z \in F(Z)$ – элемент такой, что $\sigma_Z(z) = z'$. Найдётся ω-собственное коядро $d \in Y \to Z$, для которого $(Fd)(z_0) = 0$, и тогда $(F'd)(z') = (F'd)\sigma_Z(z) = \sigma_Y(Fd)(z) = 0$.

(б) Доказательство аналогично пункту (а).

(в) Пусть $F \in \mathcal{T}_\omega \cap \mathcal{F}_\omega$. Фиксируем $Z \in \mathcal{A}$ и $z \in F(Z)$. Тогда существует ω-собственное коядро $d\colon Y \to Z$ такое, что $(Fd)(z) = 0$. Но Fd – мономорфизм, следовательно $z = 0$, потому $F(Z) = 0$, и таким образом, $F = 0$. □

Предложение 3.3. *Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Для любого $X \in \mathcal{A}$ положим*

$$t_G(X) := \{x \in G(X) \mid \textit{существует}\, d \in \omega \textit{ такой, что}\, (Gd)(x) = 0\}.$$

Тогда:

(1) *t_G – подфунктор функтора G;*

(2) *t_G – наибольший среди подобъектов в G, принадлежащих $\mathcal{T}_\omega$;*

(3) *функтор $\overline{G} := G/t_G$ принадлежит $\mathcal{F}_\omega$.*

Доказательство. (1) Докажем сначала, что $t_G(X)$ – подгруппа в $G(X)$. Пусть $x, y \in t_G(X)$, и пусть $d'\colon Y' \to X$, $d''\colon Y'' \to X$ – ω-собственные коядра такие, что $(Gd')(x) = 0$, $(Gd'')(y) = 0$. Построим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\rho''} & Y'' \\ {\scriptstyle \rho'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d''} \\ Y' & \xrightarrow{d'} & X. \end{array}$$

Используя аксиомы P1 и P2 получаем, что $\rho'' \in \omega$, а также $d := d'\rho' = d''\rho'' \in \omega$. Тогда $(Gd)(x+y) = 0$, и следовательно, $x + y \in t_G(X)$.

Теперь проверим, что для произвольного морфизма $\varphi\colon X \to Y$ в $\mathcal{A}$ имеем $(G\varphi)(t_G(Y)) \subset t_G(X)$. Пусть $y \in t_G(Y)$ и $d\colon Z \to Y$ – ω-собственное коядро такое, что $(Gd)(y) = 0$.

Построим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & Z \\ {\scriptstyle d_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y. \end{array}$$

По аксиоме P2 $d_1 \in \omega$, при этом $(Gd_1)(G\varphi)(y) = 0$, следовательно, $(G\varphi)(y) \in t_G(Y)$.

(2) Ясно, что $t_G \in \mathcal{T}_\omega$. При этом если $T \subset G$ и $T \in \mathcal{T}_\omega$, то $T \subset t_G$.

(3) Ввиду части (1) получаем короткую точную последовательность

$$0 \to t_G \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\sigma} \overline{G} \to 0,$$

где i – вложение. Фиксируем $Z \in \mathcal{A}$ и $\overline{z} \in \overline{G}(Z)$, и пусть $d\colon Y \to Z$ – ω-собственное коядро. Предположим, что $(\overline{G}d)(\overline{z}) = 0$. Пусть $z \in G(Z)$ – элемент такой, что $\sigma_Z(z) = \overline{z}$. Тогда $\sigma_Y(Gd)(z) = 0$, и потому $(Gd)(z) \in t_G(Y)$. Следовательно, найдётся ω-собственное коядро $d'\colon X \to Y$ такое, что $(G(dd')(z) = (Gd')(Gd)(z) = 0$. По аксиоме P1 $dd' \in \omega$, потому $z \in t_G(Z)$, и $\overline{z} = 0$. Таким образом, $\overline{G}d$ – мономорфизм, и следовательно, $\overline{G} \in \mathcal{F}_\omega$. □

Следствие 3.4. *Класс $\mathcal{T}_\omega$ замкнут относительно подобъектов.*

Предложение 3.5. (а) $(\mathcal{T}_\omega)^\perp = \mathcal{F}_\omega$; (б) ${}^\perp(\mathcal{F}_\omega) = \mathcal{T}_\omega$.

Доказательство. Сначала заметим, что для $T \in \mathcal{T}_\omega$ и $F \in \mathcal{F}_\omega$ имеем $\mathcal{M}(\mathcal{A})(T, F) = 0$. Действительно, если $\sigma\colon T \to F$ – естественное преобразование, то ввиду предложения 3.2 $\operatorname{Im}\sigma \in \mathcal{T}_\omega \cap \mathcal{F}_\omega = \{0\}$, и таким образом, $\mathcal{F}_\omega \subset (\mathcal{T}_\omega)^\perp$, $\mathcal{T}_\omega \subset {}^\perp(\mathcal{F}_\omega)$.

Далее, пусть $\mathcal{M}(\mathcal{A})(T, X) = 0$ для любого $T \in \mathcal{T}_\omega$. Тогда $t_X = 0$. По предложению 3.3, (3) $X \simeq X/t_X \in \mathcal{F}_\omega$, и следовательно, $(\mathcal{T}_\omega)^\perp \subset \mathcal{F}_\omega$.

Наконец, если $\mathcal{M}(\mathcal{A})(Y, F) = 0$ для любого $F \in \mathcal{F}_\omega$, то, в частности, это верно для $F = Y/t_Y$. Поэтому $Y/t_Y = 0$, т. е. $Y = t_Y \in \mathcal{T}_\omega$. Таким образом, ${}^\perp(\mathcal{F}_\omega) \subset \mathcal{T}_\omega$. □

Из предложений 3.3, 3.5 и следствия 3.4 вытекает утверждение теоремы 3.1.

Замечание 3.6. Из теоремы 3.1 и её доказательства следует, что $\mathcal{T}_\omega$ является локализующей подкатегорией в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, а также что сопоставление $X \mapsto t_X$ задаёт идемпотентный радикал на $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. В дальнейшем мы его обозначаем через t.

Предложение 3.7. *Класс $\mathcal{F}_\omega$ замкнут относительно существенных расширений.*

Напомним, что подобъект G объекта $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ называется существенным, если $G \cap X \neq 0$ для каждого ненулевого подобъекта $X \subset F$. Мономорфизм $i\colon G \to F$ называется существенным, если $\operatorname{Im} i$ – существенный подобъект в F. Говорим, что класс $\mathcal{S}$ в категории $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ замкнут относительно существенных расширений, если для любого существенного мономорфизма $i\colon G \to F$ такого, что $G \in \mathcal{S}$, имеем $F \in \mathcal{S}$.

Доказательство предложения 3.7. Пусть $i\colon G \to F$ – существенный мономорфизм, где $G \in \mathcal{F}_\omega$. Предположим, что F не является ω-моно-функтором, т. е. существуют ω-собственное коядро $d\colon Y \to X$ и элемент $x \in F(X) \setminus \{0\}$ такие, что $(Fd)(x) = 0$. Построим подфунктор $X \subset F$, “порождённый элементом x”: для $A \in \mathcal{A}$ положим

$$X(A) := \{y \in F(A) \mid \exists\, \rho\colon A \to X \text{ такой, что } (F\rho)(x) = y\}.$$

Легко видеть, что $X(A)$ – подгруппа в $F(A)$, и непосредственно проверяется, что для морфизма $f\colon A \to B$ имеем $(Ff)(X(B)) \subset X(A)$. При этом $X \neq 0$, так как $x \neq 0$. Следовательно, найдётся объект $V \in \mathcal{A}$ такой, что $(G \cap X)(V) \neq 0$. Пусть $v \in (G \cap X)(V) \setminus \{0\}$. Из определения X следует, что найдётся морфизм $\varphi\colon V \to X$, для которого $v = (F\varphi)(x)$. Построим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{d'} & V \\ {\scriptstyle \varphi'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ Y & \xrightarrow{d} & X. \end{array}$$

Тогда $d' \in \omega$, и приходим к противоречию: с одной стороны, $F(\varphi d')(x) = (Fd')(v) \neq 0$, с другой – $F(d\varphi')(x) = F(\varphi')(Fd)(x) = 0$. $\square$

3.3. Локализация относительно $\mathcal{T}_\omega$. По-прежнему ω – собственный класс коядер в скелетно малой предабелевой категории $\mathcal{A}$.

Функтор $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ называется ω-точным слева, если для любой ω-собственной последовательности вида (2.2) точна последовательность

$$0 \to F(C) \xrightarrow{d} F(B) \xrightarrow{i} F(A).$$

Полную подкатегорию в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, состоящую из ω-точных слева функторов, обозначим через $\mathcal{L}_\omega$. Ясно, что $\mathcal{L}_\omega \subset \mathcal{F}_\omega$.

Пусть $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ – теория кручения в абелевой категории $\mathcal{C}$. Подобъект N объекта $M \in \mathcal{F}$ называется чистым (относительно $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$) [1, p. 144], если $M/N \in \mathcal{F}$. Объект $N \in \mathcal{F}$ называется абсолютно чистым, если для любого объекта $M \in \mathcal{F}$, содержащего N, N чист в M.

Предложение 3.8. *Чистый (относительно $(\mathcal{T}_\omega, \mathcal{F}_\omega)$) подфунктор ω-точного слева функтора ω-точен слева.*

Доказательство. Пусть дана короткая точная последовательность в категории $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

$$0 \to X_1 \xrightarrow{\alpha} X_2 \xrightarrow{\sigma} X_3 \to 0,$$

в которой X_2 – ω-точный слева функтор, а $X_3 \in \mathcal{F}_\omega$. Пусть

$$K \overset{i}{\rightarrowtail} A \overset{d}{\twoheadrightarrow} B \tag{3.1}$$

– произвольная ω-собственная последовательность в $\mathcal{A}$. Коядро гомоморфизма $X_i(d)$ обозначим через $\nu_i \colon X_i(A) \to V_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда имеется последовательность гомоморфизмов (в $\mathcal{A}$b)

$$V_1 \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} V_2 \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} V_3, \tag{3.2}$$

где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\sigma}$ – гомоморфизмы такие, что

$$\widetilde{\alpha}\nu_1 = \nu_2\alpha_A, \quad \widetilde{\sigma}\nu_2 = \nu_3\sigma_A.$$

Из второго соотношения следует, что $\widetilde{\sigma}$ – эпиморфизм; кроме того, с помощью диаграммного поиска легко убеждаемся, что $\operatorname{Im}\widetilde{\alpha} = \operatorname{Ker}\widetilde{\sigma}$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, строки которой точны

$$\begin{tikzcd}
 & X_1(B) \arrow[r, "X_1(d)"] \arrow[d, "\alpha_B"'] & X_1(A) \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\alpha_A"] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2(B) \arrow[r, "X_2(d)"] \arrow[d, "\sigma_B"'] & X_2(A) \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[d, "\sigma_A"] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_3(B) \arrow[r, "X_3(d)"] & X_3(A) \arrow[r, "\nu_3"] & V_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Из определения ν_i следует существование коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\mu_1} & X_1(K) \\ {\scriptstyle\widetilde{\alpha}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_K} \\ Y & \xrightarrow{\mu_2} & X, \end{array} \tag{3.4}$$

где μ_k, $k = 1, 2$, таковы, что $X_k(i) = \mu_k\nu_k$ $(k = 1, 2)$. Ввиду точности средней строки в диаграмме (3.3) μ_2 – мономорфизм. Применяя Ker-Coker-последовательность к поддиаграмме диаграммы (3.3), образованной верхними двумя строками, получаем точную последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha_A \to \operatorname{Ker}\widetilde{\alpha} \to \operatorname{Coker}\alpha_B \xrightarrow{X_3(d)} \operatorname{Coker}\alpha_A;$$

в ней $\operatorname{Coker}\alpha_B = X_3(B)$, $\operatorname{Coker}\alpha_A = X_3(A)$, а также $\operatorname{Ker}\alpha_A = 0$. Так как $X_3(d)$ – мономорфизм, получаем $\operatorname{Ker}\widetilde{\alpha} = 0$.

Кроме того, последовательность (3.2) оказывается короткой точной, и потому диаграмму (3.3) можно рассмотреть как короткую точную последовательность комплексов (сосредоточенных в степенях 0, 1 и 2)

$$0 \to \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2 \longrightarrow \mathcal{X}_3 \to 0, \tag{3.5}$$

где $\mathcal{X}_k$ – k-я строка в (3.3). Тогда из длинной точной когомологической последовательности, соответствующей (3.5), можно выделить следующую точную последовательность

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_3) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X}_1) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X}_2).$$

Здесь $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_3) = 0$ (так как $\mathcal{X}_3(d)$ – мономорфизм) и $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}_2) = 0$ (так как X_2 – ω-точный слева функтор). Следовательно, $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}_1) = 0$, т. е. верхняя строка в (3.3) – это короткая точная последовательность. С учётом коммутативности квадрата (3.4) получаем, что μ_1 – мономорфизм, а тогда $\operatorname{Im} X_1(d) = \operatorname{Ker}\nu_1 = \operatorname{Ker} X_1(i)$. Таким образом, ввиду произвольности ω-собственной последовательности (3.1) заключаем, что X_1 – ω-точный слева функтор. $\square$

Теорема 3.9. *Для объекта $F \in \mathcal{F}_\omega$ равносильны следующие условия:*
(1) *F – $\mathcal{T}_\omega$-замкнутый объект;*
(2) *F абсолютно чист (относительно $(\mathcal{T}_\omega, \mathcal{F}_\omega)$);*
(3) *F – ω-точный слева функтор.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть F – подобъект объекта $\widetilde{F}$, принадлежащего $\mathcal{F}_\omega$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to F \xrightarrow{i} \widetilde{F} \xrightarrow{\pi} X \to 0,$$

где i – соответствующее вложение, $X \simeq \widetilde{F}/F$. Положим $F_0 := \pi^{-1}(tX)$; ясно, что $F_0 \in \mathcal{F}_\omega$. Имеется короткая точная последовательность вида

$$0 \to F \to F_0 \to tX \to 0,$$

и она расщепляется, так как F $\mathcal{T}_\omega$-замкнут. Тогда $tX \in \mathcal{T}_\omega \cap \mathcal{F}_\omega = \{0\}$, и следовательно, $X \in \mathcal{F}_\omega$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $f\colon U \to V$ – морфизм в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ такой, что $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Coker} f$ принадлежат $\mathcal{T}_\omega$, и пусть $f = \mu\nu$ – эпи-моно-разложение морфизма f. Пусть $\varphi\colon U \to F$ – некоторый морфизм. Так как $\varphi(\operatorname{Ker} f) \in \mathcal{T}_\omega$, а $F \in \mathcal{L}_\omega \subset \mathcal{T}_\omega$, то $\varphi(\operatorname{Ker} f) = 0$, и найдётся морфизм φ' такой, что $\varphi'\nu = \varphi$. Построим коуниверсальный квадрат на паре (φ', μ) и вложим его в следующую коммутативную диаграмму, строки которой точны:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi'"'] & V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] & V/W \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] & \widetilde{F} \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] & \widetilde{F}/F \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Здесь $V/W = \operatorname{Coker}\mu = \operatorname{Coker} f \in \mathcal{T}_\omega$, и потому $\widetilde{F}/F \in \mathcal{T}_\omega$. Пусть $\pi\colon \widetilde{F} \to \widetilde{F}/t\widetilde{F}$ – канонический морфизм. Композиция $\pi\widetilde{\mu}$ – мономорфизм, поскольку $t\widetilde{F} \cap F = 0$. При этом $\operatorname{Coker}(\pi\widetilde{\mu}) \simeq \widetilde{F}/(F + t\widetilde{F}) \in \mathcal{T}_\omega$. Но одновременно, поскольку F абсолютно чист, имеем $\operatorname{Coker}(\pi\widetilde{\mu}) \in \mathcal{F}_\omega$. Следовательно, $\pi\widetilde{\mu}$ – изоморфизм, а $\widetilde{\mu}$ – расщепляемый мономорфизм, и тогда $\varphi' = \varphi''\mu$ для некоторого морфизма φ''. Отсюда следует, что $\varphi = \varphi'' f$, т. е. индуцированный морфизм $f^*\colon (V, F) \to (U, F)$ сюръективен.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Сначала заметим, что любой инъективный объект E в категории $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ точен справа, т. е. для любой короткой точной последовательности в $\mathcal{A}$ вида (2.2) точна последовательность

$$E(C) \xrightarrow{Ed} E(B) \xrightarrow{Ei} E(A) \to 0;$$

это доказывается с использованием леммы Йонеды аналогично [1]. Теперь пусть Q – инъективная оболочка функтора F. По предложению 3.7 Q – ω-моно-функтор, и поэтому Q переводит ω-собственные последовательности в короткие точные последовательности (в $\mathcal{A}$b). Поскольку $Q \in \mathcal{F}_\omega$ и F абсолютно чист, то по предложению 3.8 F ω-точен слева.

(3) $\Longrightarrow$ (2). Пусть дана короткая точная последовательность в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

$$0 \to X_1 \xrightarrow{\alpha} X_2 \xrightarrow{\sigma} X_3 \to 0,$$

в которой $X_1 = F$ – ω-точный слева функтор, а $X_2 \in \mathcal{F}_\omega$. Надо доказать, что $X_3 \in \mathcal{F}_\omega$.

Рассмотрим произвольную ω-собственную последовательность вида (3.2) и построим следующую коммутативную диаграмму, столбцы которой – короткие точные последовательности:

$$\begin{array}{ccccc}
X_1(B) & \xrightarrow{X_1(d)} & X_1(A) & \xrightarrow{X_1(i)} & X_1(K) \\
{\scriptstyle\alpha_B}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_A}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_K}\downarrow \\
X_2(B) & \xrightarrow{X_2(d)} & X_2(A) & \xrightarrow{X_2(i)} & X_2(K) \\
{\scriptstyle\sigma_B}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma_A}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma_K}\downarrow \\
X_3(B) & \xrightarrow{X_3(d)} & X_3(A) & \xrightarrow{X_3(i)} & X_3(K).
\end{array} \tag{3.6}$$

Рассматривая строки этой диаграммы как комплексы (сосредоточенные в степенях 0, 1 и 2), получаем короткую точную последовательность в категории комплексов над $\mathcal{A}$b

$$0 \to \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2 \longrightarrow \mathcal{X}_3 \to 0,$$

где $\mathcal{X}_k$ представлен k-ой строкой диаграммы (3.6). Из соответствующей длинной точной когомологической последовательности получаем точную последовательность

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_2) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_3) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{X}_1).$$

Здесь $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_2) = 0$ (так как X_2 – ω-моно-функтор) и $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}_1) = 0$ (так как X_1 – ω-точен слева). Следовательно, $\mathrm{H}^0(\mathcal{X}_3) = 0$, т. е. X_3 – ω-моно-функтор. $\square$

§4. Основной результат

Рассмотрим композицию функторов

$$\Phi := T \circ \mathrm{Y} \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A}),$$

где $\mathrm{Y} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ задаётся соответствием Йонеды: $\mathrm{Y} \colon X \mapsto (-, X)$.

Предложение 4.1. 1) *Функтор $\Phi \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ переводит ω-собственные последовательности в короткие точные последовательности в категории $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$.*

2) *Функтор Φ отражает короткие точные последовательности, т. е. если дана пара морфизмов в $\mathcal{A}$ $E \colon K \to A \to B$ и $\Phi(E)$ – короткая точная последовательность в $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$, то E – ω-собственная последовательность.*

Доказательство. 1) Пусть

$$E \colon K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{d} B \tag{4.1}$$

– ω-собственная последовательность. Применяя к ней функтор Y, получаем следующую точную последовательность

$$0 \to (-, K) \xrightarrow{(-,i)} (-, A) \xrightarrow{(-,d)} (-, B). \tag{4.2}$$

Так как T – точный функтор (см. [8, p.367]), то получаем следующую точную последовательность в $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$

$$\Phi(E) \colon 0 \to \Phi(K) \xrightarrow{\Phi i} \Phi(A) \xrightarrow{\Phi d} \Phi(B).$$

Остаётся доказать, что Φd – эпиморфизм. Пусть $\nu \colon (-, B) \to W$ – коядро $(-, d)$; надо доказать, что $W \in \mathcal{T}_\omega$. Фиксируем $Z \in \mathcal{A}$, а затем $z \in W(Z)$. Пусть $\varphi \colon Z \to B$ – морфизм такой, что $\nu_Z(\varphi) = z$. Построим универсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{d'} & Z \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A & \xrightarrow{d} & B. \end{array}$$

Тогда непосредственно получаем, что $W(d')(z) = 0$. Так как $d' \in \omega$, это доказывает, что $W \in \mathcal{T}_\omega$.

2) Функтор T индуцирует эквивалентность категорий $T' \colon \mathcal{L}_\omega \to \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$, поэтому точна последовательность (4.2), и тогда $i = \ker d$. Пусть $\nu \colon (-, B) \to W$ – коядро морфизма $(-, d)$. Так как $T(-, d)$ –

эпиморфизм, то $W \in \mathcal{T}_\omega$. Поэтому для $\nu_B(\mathrm{id}\,_B) \in W(B)$ найдется ω-собственное коядро $d'\colon B' \to B$, для которого $W(d')\nu_B(\mathrm{id}\,_B) = 0$. Из коммутативности следующей диаграммы, строки которой точны,

$$\begin{array}{ccccc} (B,A) & \xrightarrow{(B,d)} & (B,B) & \xrightarrow{\nu_B} & W(B) \\ {\scriptstyle (d')^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle (d')^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle W(d')} \\ (B',A) & \xrightarrow{(B',d)} & (B',B) & \xrightarrow{\nu_{B'}} & W(B') \end{array} \tag{4.3}$$

следует, что

$$\nu_{B'}(d') = \nu_{B'}(d',-)(\mathrm{id}\,_B) = W(d')\nu_B(\mathrm{id}\,_B) = 0,$$

а тогда $d' = (B',d)(\zeta) = d\zeta$ для некоторого $\zeta \in (B',A)$. Таким образом, по аксиоме $\mathrm{P}\overline{3}$ получаем, что $d \in \omega$. Следовательно, E – ω-собственная последовательность. □

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – скелетно малая предабелева категория, ω – собственный класс коядер в $\mathcal{A}$. Существуют абелева категория $\mathcal{C}$ и эквивалентность $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}'$, где $\mathcal{C}'$ – полная категория в $\mathcal{C}$, которые обладают следующими свойствами*:

(а) *если $E\colon K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{d} B$ – ω-собственная последовательность в $\mathcal{A}$, то*

$$\Phi(E)\colon \Phi(K) \xrightarrow{\Phi i} \Phi(A) \xrightarrow{\Phi d} \Phi(B)$$

– короткая точная последовательность в $\mathcal{C}$;

(б) *функтор Φ отражает короткие точные последовательности.*

Кроме того, $\mathcal{C}'$ замкнута относительно расширений тогда и только тогда, когда $\omega \subset \omega_{st}$.

Доказательство. В качестве $\mathcal{C}$ можно взять категорию Фрейда $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$, и тогда функтор $\Phi = T \circ \mathrm{Y}\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ задаёт эквивалентность $\Phi\colon \mathcal{A} \to \operatorname{Im}\Phi$, где $\mathcal{C}' := \operatorname{Im}\Phi$ – полная подкатегория, состоящая из классов, представленных представимыми функторами. Тогда свойства (а) и (б) уже доказаны в предложении 4.1.

Теперь предположим, что все коядра в ω стабильны. Тогда замкнутость относительно расширений подкатегории $\operatorname{Im}\Phi$ доказывается аналогично [11]. Для удобства читателя приведём соответствующее рассуждение.

Рассмотрим короткую точную последовательность в $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ вида

$$T(-,K) \xrightarrow{a} F \xrightarrow{p} T(-,B).$$

Можно считать, что $F \in \mathcal{L}_\omega$, поскольку коединица сопряжённости $\eta\colon TS \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}/\mathcal{S}}$ – естественный изоморфизм. Ввиду наличия эквивалентности $T'\colon \mathcal{L}_\omega \to \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ для некоторых морфизмов α и π в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ имеем $a = T\alpha, p = T\pi$. Используя предложение 2.4, получаем, что $\alpha = \ker \pi$. Пусть $\nu\colon (-,B) \to W$ – коядро морфизма π в $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Так как $T\pi = p$ – эпиморфизм, то $W \in \mathcal{T}_\omega$. Следовательно, существует ω-собственное коядро $d\colon Z \to B$ такое, что $(Wd)(\nu_B(\mathrm{id}\,_B)) = 0$. Положим $i := \ker d$. С помощью диаграммы, аналогичной (4.3), получаем, что

$$\nu_Z(d) = \nu_Z(d,B)(\mathrm{id}\,_B) = (Wd)(\nu_B(\mathrm{id}\,_B) = 0.$$

Следовательно, существует $z \in W(Z)$, для которого $d = \pi_Z(z)$. По лемме Йонеды элементу z соответствует некоторое естественное преобразование $s\colon (-,Z) \to F$. Прямое вычисление показывает, что $\pi s = (-,d)$. Это приводит к построению следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (-,K') \arrow[r, "(-,i)"] \arrow[d, "t"'] & (-,Z) \arrow[r, "(-,d)"] \arrow[d, "s"'] & (-,B) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & (-,K) \arrow[r, "\alpha"] & F \arrow[r, "\pi"] & (-,B).
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Поскольку строки её точны, то t – это морфизм, индуцируемый морфизмом s. Так как соответствие Йонеды задаёт вполне унивалентный функтор, то $t = (-,\tau)$ для некоторого морфизма $\tau\colon K' \to K$. Построим коуниверсальный квадрат на паре $\{\tau, i\}$ и вложим его в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tau"'] & Z \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\tau'"'] & B \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, "i'"] & V \arrow[r, "d'"] & B.
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Ввиду аксиомы P$\overline{3}$ $d' \in \omega$. По предположению i' – ядро, и тогда $i' = \ker d'$. Применяя функтор $\Phi = T \circ \Upsilon$ к диаграмме (4.5), получим диаграмму того же вида в категории $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ и с помощью диаграммного поиска убеждаемся, что в ней левый квадрат коуниверсален. С другой стороны, применяя функтор T к диаграмме (4.4), вновь получаем диаграмму, в которой левый квадрат коуниверсален. Но оба упомянутых квадрата построены на одной и той же паре морфизмов, а именно, $\{\Phi i, \Phi\tau\} = \{T(-,i), Tt\}$, следовательно, $\Phi V \simeq TF$.

Теперь предположим, что подкатегория $\operatorname{Im}\Phi$ замкнута относительно расширений. Пусть дана ω-собственная последовательность E вида (4.1). Надо доказать, что $i = \ker d$ – полустабильное ядро. Пусть $\psi\colon K \to K'$ – произвольный морфизм. Построим коуниверсальный квадрат на паре $\{i,\psi\}$ и вложим его в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{d} & B \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & {\scriptstyle\widetilde{\psi}}\downarrow & & \| \\ K' & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{A} & \xrightarrow{\widetilde{d}} & B. \end{array} \tag{4.6}$$

Отметим, что по аксиоме Р$\overline{3}$ $\widetilde{d} \in \omega$. Построим в категории $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ коуниверсальный квадрат на паре $\{\Phi i, \Phi\psi\}$. По предложению 4.1 $\Phi(E)$ – короткая точная последовательность. Поэтому построенный квадрат вкладывается в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \Phi(K) & \xrightarrow{\Phi i} & \Phi(A) & \xrightarrow{\Phi d} & \Phi(B) \\ {\scriptstyle\Phi\psi}\downarrow & & {\scriptstyle\Psi'}\downarrow & & \| \\ \Phi(K') & \xrightarrow{I'} & F & \xrightarrow{D'} & \Phi(B). \end{array} \tag{4.7}$$

С помощью диаграммного поиска легко устанавливаем, что нижняя строка этой диаграммы – тоже короткая точная последовательность. По предположению $F \simeq \Phi(A')$ для некоторого $A' \in \mathcal{A}$; можно считать, что $F = \Phi(A')$. Так как Φ вполне унивалентен, то $I' = \Phi(i'), D' = \Phi(d')$, $\Psi' = \Phi(\psi')$ для подходящих морфизмов i', d', ψ'.

Из коуниверсальности левого квадрата в диаграмме (4.7) следует точность последовательности

$$0 \to \Phi(K) \overset{(\Phi i, \Phi\psi)^{\mathrm{T}}}{\longrightarrow} \Phi(A) \oplus \Phi(K') \overset{(-\Phi\psi', \Phi i')}{\longrightarrow} \Phi(A') \to 0.$$

Применяя к ней предложение 4.1, получаем ω-собственную последовательность

$$K \overset{(i,\psi)^{\mathrm{T}}}{\longrightarrow} A \oplus K' \overset{(-\psi', i')}{\longrightarrow} A'.$$

Таким образом, квадрат

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\ i\ } & A \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi'} \\ K' & \xrightarrow{\ i'\ } & A'. \end{array}$$

коуниверсален.

Наконец, ввиду предложения 4.1 из точности нижней строки в (4.7) следует, что последовательность $K' \xrightarrow{i'} A' \xrightarrow{d'} B$ является ω-собственной. В частности, получаем, что $i' = \ker d'$ – ядро. □

Список литературы

1. P. Freyd, *Abelian categories.* N. Y., 1964.
2. P. Freyd, *Representations in abelian categories.* — in: Proc. Conference on categorical algebra (La Jolla, 1965), Springer (1966), 95–120.
3. D. Quillen, *Higher algebraic* K-*theory*, I. — Lect. Notes Math. **341** (1973), 85–147.
4. А. И. Генералов, *Относительная гомологическая алгебра в предабелевых категориях*, I. *Производные категории.* — Алгебра и анализ **4**, No. 3 (1992), 98–119.
5. А. И. Генералов, *Производные категории аддитивной категории.* — Алгебра и анализ **4**, No. 5 (1992), 91–103.
6. F. Richman, E. A. Walker, *Ext in preabelian categories.* — Pacif. J. Math. **71**, No. 2 (1977), 521–535.
7. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* т. 1, М. (1977).
8. P. Gabriel, *Des catégories abeliennes.* — Bull. Soc. Math. France **90**, No. 3 (1962), 323–448.
9. П. Габриель, М. Цисман, *Категории частных и теория гомотопий.* М. (1971).
10. С. Маклейн, *Категории для работающего математика.* М. (2004).
11. B. Keller, *Chain complexes and stable categories.* — Manuscripta Math. **67**, f. 4 (1990), 379–417.

Generalov A. I. Relative homological algebra in preabelian categories and Freyd category.

We describe an exact embedding of a preabelian category with a fixed proper class of cokernels into an abelian category. This abelian category is constructed similar to the category used by Freyd in the embedding of an exact category (in the sense of Qullen) into the mentioned abelian category. The embedding functor constructed in the paper reflects short

exact sequences. Moreover, the image of this functor is closed with respect to extensions if and only if cokernels from the given proper class are stable.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 19 октября 2025 г.