Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 547, 2025 г.

**Е. Ю. Воронецкий**

# КОПУЧКИ ПРО-ГРУПП СТЕЙНБЕРГА

## §1. Введение

В этой статье $G(\Phi, A)$ обозначает либо группу Шевалле типа $\Phi$ над коммутативным кольцом $A$ с единицей; либо полную линейную группу, построенную по ассоциативному кольцу $A$ с полным семейством полных ортогональных идемпотентов (а $\Phi$ имеет тип $\mathsf{A}_\ell$); либо нечётную унитарную группу, построенную по нечётному форменному кольцу $A = (R, \Delta)$ с сильным ортогональным гиперболическим семейством в смысле [1, §3.3], [2, §2] и [19, §4] (а $\Phi$ имеет тип $\mathsf{BC}_\ell$).

Для любой такой группы $G(\Phi, A)$ определена соответствующая группа Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A)$, она порождена корневыми образующими $G(\Phi, A)$, но только с "очевидными" соотношениями между ними. Если ранг $\Phi$ не меньше 3 и $A$ локально конечно над основным коммутативным кольцом $K$ с единицей, то канонический гомоморфизм $\mathrm{St}(\Phi, A) \to G(\Phi, A)$ имеет центральное ядро. В некоторых случаях (в том числе для групп Шевалле типов $\mathsf{A}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}$) это доказано в [4, 5, 9, 12, 13, 17, 18]. Общие случаи рассмотрены в [14, 19, 20] с использованием про-групп Стейнберга. Если ранг $\Phi$ равен 2, то для групп Шевалле имеются контрпримеры [22]. Относительная версия в некоторых случаях доказана при помощи подходящего «другого представления» ван дер Каллена [5, 11, 17].

Подход с использованием про-групп основан на следующем наблюдении. Для любого $k \in K$ можно построить локализацию $A_k$ и соответствующую группу $G(\Phi, A_k)$. Эта группа чуть проще, чем исходная $G(\Phi, A)$, так как копредел всех таких групп по $k$ не из простого идеала $\mathfrak{p} \leqslant K$ является группой $G(\Phi, A_\mathfrak{p})$ с разложением Гаусса. С другой стороны, $G(\Phi, -)$ является пучком в топологии Зарисского, то есть

---

*Ключевые слова*: группы Стейнберга, про-группы, скрещенные квадраты.

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" и программой социальных инвестиций "Родные города" ПАО "Газпром нефть".

$G(\Phi, A)$ можно восстановить по $G(\Phi, A_k)$ с достаточно большими $k$. Напомним, что в случаях линейных групп и групп Шевалле $A_k$ является $K$-модулем $\varinjlim(A \xrightarrow{k} A \xrightarrow{k} \ldots)$ с подходящей операцией умножения.

Локализация не работает для групп Стейнберга, поэтому вместо этого мы рассмотрим “колокализацию” $A^{(\infty,k)}$, это некоторая про-алгебра. Для линейных групп и групп Шевалле $A^{(\infty,k)}$ является про-$K$-модулем как формальный проективный предел $\varprojlim^{\mathrm{Pro}}(\ldots \xrightarrow{k} A \xrightarrow{k} A)$ с подходящим умножением. На пределе про-групп Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty,k)})$ при $k$ не из простого идеала $\mathfrak{p} \leqslant K$ имеется естественное действие группы $G(\Phi, A_\mathfrak{p})$ благодаря наличию в ней разложения Гаусса. Наконец, морфизмы из $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty,k)})$ в исходную $\mathrm{St}(\Phi, A)$ позволяют построить действие $G(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, A)$. Это действие задаёт структуру скрещенного модуля, в частности, ядро гомоморфизма $\mathrm{St}(\Phi, A) \to G(\Phi, A)$ центрально.

В этой статье мы докажем следующие результаты:

- Про-группы Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty,k)})$, изначально определённые как формальные проективные пределы нерелятивизованных групп Стейнберга, на самом деле являются формальными проективными пределами относительных групп Стейнберга. В частности, они являются скрещенными модулями над $\mathrm{St}(\Phi, A)$.
- Для каждого скрещенного модуля $\delta\colon X \to A$ (например, идеала) имеется скрещенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}(\Phi, A, X) & \longrightarrow & \mathrm{St}(\Phi, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\Phi, X) & \longrightarrow & G(\Phi, A), \end{array}$$

содержащий относительную группу Стейнберга. Это обобщение хорошо известных стандартных коммутационных формул для относительных элементарных групп [7, §8]

$$[\mathrm{E}(\Phi, A, I), G(\Phi, A)] = [\mathrm{E}(\Phi, A), G(\Phi, I)] = \mathrm{E}(\Phi, A, I).$$

- Про-группы Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty,k)})$ образуют копучок скрещенных про-модулей над $\mathrm{St}(\Phi, A)$ и $G(\Phi, A)$ в топологии Зарисского на сайте из главных открытых подмножеств $\mathrm{Spec}(K)$. Из этого следует, что про-группы Стейнберга можно доопределить на всех открытых квазикомпактных подмножествах $\mathrm{Spec}(K)$.

Кроме того, каждая такая про-группа имеет естественные задания образующими и соотношениями (в смысле про-групп) в терминах про-групп Стейнберга, соответствующих элементам покрытия $\mathrm{Spec}(K_k)$.

- Для любого мультипликативного подмножества $S \subseteq K$ имеется естественное действие $G(\Phi, S^{-1}A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty, S)})$. Случай $S = K \setminus \mathfrak{p}$ для простого идеала $\mathfrak{p}$ используется в локализационных доказательствах центральности $\mathrm{K}_2$, это обобщение основной идеи из доказательства нормальности элементарной подгруппы методом локализации и склейки [7, §4]. Мы докажем общее утверждение при помощи копучков.

## §2. Группы с коммутационными соотношениями

Мы используем обозначения $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ и ${}^{g}h = ghg^{-1}$ для групповых операций. Действие группы $G$ на группе $H$ также обычно обозначается через $(g, h) \mapsto {}^{g}h$. *Системой корней* мы называем конечную кристаллографическую неприводимую систему корней, не обязательно редуцированную (то есть допускается тип $\mathsf{BC}_\ell$). Напомним, что подмножество $\Sigma \subseteq \Phi$ системы корней называется *специальным замкнутым*, если $\Sigma$ содержится в открытом полупространстве и $(\Sigma + \Sigma) \cap \Phi \subseteq \Sigma$. *Насыщенной подсистемой корней* $\Phi$ будем называть пересечение $\Phi$ с подпространством. Если $X \subseteq \Phi$ содержится в открытом полупространстве, то $\langle X \rangle$ обозначает наименьшее специальное замкнутое подмножество $\Phi$, содержащее $X$. *Размерностью* подмножества $\Phi$ будем называть размерность его линейной оболочки. Элементы стандартного ортонормированного базиса $\mathbb{R}^n$ обозначаются прямым шрифтом через $\mathrm{e}_i$, в то время как похожее обозначение $e_i$ относится к идемпотентам в кольце (эти обозначения всегда встречаются в разных контекстах).

Рассмотрим группу $G$ с набором гомоморфизмов $t_\alpha \colon P_\alpha \to G$ из нильпотентных групп $P_\alpha$, где $\alpha$ пробегает систему корней $\Phi$ ранга $\ell \geqslant 3$. Предположим, что

- для любого специального замкнутого подмножества $\Sigma \subseteq \Phi$ операция умножения $\prod_{\alpha \in \Sigma \setminus 2\Sigma} P_\alpha \to G$, $(p_\alpha)_\alpha \mapsto \prod_\alpha t_\alpha(p_\alpha)$ инъективна;
- если $\alpha, 2\alpha \in \Phi$ (то есть $\Phi$ типа $\mathsf{BC}_\ell$ и $\alpha$ ультракороткий), то $P_{2\alpha} \leqslant P_\alpha$ и $t_{2\alpha}(p) = t_\alpha(p)$ при $p \in P_{2\alpha}$;

- если $\alpha$ и $\beta$ не противоположно направлены, то выполнена *коммутационная формула Шевалле*
$$[t_\alpha(p), t_\beta(q)] = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta\in\Phi\\ i,j>0}} t_{i\alpha+j\beta}(f_{\alpha\beta ij}(p,q)),$$
где $f_{\alpha\beta ij}\colon P_\alpha \times P_\beta \to P_{i\alpha+j\beta}$ – это некоторые фиксированные отображения.

В таком случае мы говорим, что $G$ является *группой с коммутационными соотношениями типа* $\Phi$, это изменённое определение из [16, §3]. Групповые операции на $P_\alpha$ обозначаются через $\dot{+}$. Ясно, что $P_\alpha$ абелевы кроме случая, когда $\alpha$ ультракороткий и $\Phi$ имеет тип $\mathsf{BC}_\ell$. В этом исключительном случае $P_\alpha$ нильпотентна класса 2, $P_\alpha, P_\alpha]^{\cdot} \leqslant P_{2\alpha}$ и $[P_\alpha, P_{2\alpha}]^{\cdot} = \dot{0}$.

Зафиксируем коммутативное кольцо $K$ с единицей. В этой статье мы изучаем следующие три класса групп $G(\Phi, A)$ с коммутационными соотношениями типа $\Phi$, построенных по различным алгебраическим объектам $A$:

- Пусть $A$ – целая коммутативная $K$-алгебра с единицей и $\Phi$ – редуцированная система корней. Тогда $G(\Phi, A) = G^{\mathrm{sc}}(\Phi, A)$ обозначает группу $A$-точек односвязной групповой схемы Шевалле с системой корней $\Phi$. Здесь $P_\alpha(A) = A$ для всех $\alpha \in \Phi$.
- Пусть $\Phi$ имеет тип $\mathsf{A}_\ell$, а $A$ – локально конечная обобщённая матричная алгебра над $K$, то есть ассоциативная $K$-алгебра с единицей и полным набором ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_{\ell+1}$, причём $e_i$ полны в смысле $A = Ae_iA$ и все конечно порождённые подалгебры $A$ конечны над $K$. Мы свяжем с $A$ группу $G(\mathsf{A}_\ell, A) = \mathrm{GL}(A) = A^*$ с корневыми гомоморфизмами
$$t_{\mathrm{e}_i-\mathrm{e}_j} = t_{ij}\colon P_{\mathrm{e}_i-\mathrm{e}_j}(A) = e_iAe_j \to G(\mathsf{A}_\ell, A), \quad p \mapsto 1 + p$$
при $i \neq j$. В случае матричной алгебры $A = \mathrm{M}(n, K)$ получается группа $G(\mathsf{A}_{\ell-1}, K)$ из первого класса.
- Пусть $\Phi$ имеет тип $\mathsf{BC}_\ell$, а $A = (R, \Delta)$ – локально конечная *нечётная форменная $K$-алгебра* с *сильным ортогональным гиперболическим семейством* ранга $\ell$ в смысле [19, §4] и [1, §3.3]. Напомним, что нечётная форменная $K$-алгебра $(R, \Delta)$ состоит из ассоциативной $K$-алгебры $R$ без единицы, инволюции $a \mapsto \bar{a}$ на $R$, группы $\Delta$ с групповой операцией $\dot{+}$, групповых гомоморфизмов $\phi\colon R \to \Delta$ и $\pi\colon \Delta \to R$, отображения $\rho\colon \Delta \to R$ и

правого действия $(-) \cdot (=)$ мультипликативного моноида $R \rtimes K$ на $\Delta$ групповыми эндоморфизмами таких, что

$$\begin{aligned}
\pi(\phi(a)) &= 0, & \phi(a + \bar{a}) = \phi(\bar{a}ak) &= \dot{0}, \\
\rho(\phi(a)) &= a - \bar{a}, & v \dotplus u &= u \dotplus \phi(\overline{\pi(u)}\pi(v)) \dotplus v, \\
\phi(a) \cdot b &= \phi(\overline{b}\, ab), & \rho(u \dotplus v) &= \rho(u) - \overline{\pi(u)}\pi(v) + \rho(v), \\
\pi(u \cdot b) &= \pi(u)b, & 0 &= \rho(u) + \overline{\pi(u)}\pi(u) + \overline{\rho(u)}, \\
\rho(u \cdot b) &= \overline{b}\, \rho(u)b, & u \cdot (b + b') &= u \cdot b \dotplus \phi(\overline{b'}\rho(u)b) \dotplus u \cdot b'
\end{aligned}$$

при $u, v \in \Delta$, $a \in R$, $b, b' \in R \rtimes K$, $k \in K$ (инволюция на $R \rtimes K$ продолжается по формуле $\overline{a \rtimes k} = \bar{a} \rtimes k$). Она называется локально конечной, если любая конечно порождённая $K$-подалгебра $R$ конечна над $K$. Сильное ортогональное гиперболическое семейство состоит из идемпотентов $e_i \in R$ и элементов $q_i \in \Delta$ при $i \in \{-\ell, \ldots, -1, 1, \ldots, \ell\}$ таких, что

$$\begin{aligned}
e_i e_j &= 0, & \overline{e_i} &= e_{-i}, & e_i &\in R e_j R, \\
\pi(q_i) &= e_i, & \rho(q_i) &= 0, & q_i &= q_i \cdot e_i
\end{aligned}$$

при $i \neq j$. Имеется естественная *унитарная группа* $G(\Phi, A) = \mathrm{U}(R, \Delta)$ с гомоморфизмами

$$t_{\mathrm{e}_j - \mathrm{e}_i} = T_{ij} \colon P_{\mathrm{e}_j - \mathrm{e}_i}(A) = e_i R e_j \to G(\Phi, A) \text{ for } i + j > 0 \text{ and } i \neq j;$$
$$t_{\mathrm{e}_j} = T_j \colon P_{\mathrm{e}_j}(A) = \{u \in \Delta \cdot e_j \mid e_k \pi(u) = 0 \text{ for all } k\} \to G \text{ for } j \neq 0;$$

также $t_{2\mathrm{e}_j}$ – это сужения $t_{\mathrm{e}_j}$ на $P_{2\mathrm{e}_j}(A) = \phi(e_{-j} R e_j) \leqslant P_{\mathrm{e}_j}(A)$.

Унитарные группы из третьего класса обобщают, в том числе, ортогональные и симплектические группы, см. [19, §2] или [1, §1.1]. Во всех случаях отображения $f_{\alpha\beta ij}$ можно выразить в терминах операций на $A$.

Для любой такой группы $G(\Phi, A)$ мы можем определить *группу Стейнберга* $\mathrm{St}(\Phi, A)$ как группу, порождённую элементами $x_\alpha(p)$ при $\alpha \in \Phi$, $p \in P_\alpha(A)$, удовлетворяющими *соотношениям Стейнберга*

- $x_\alpha(p)\, x_\alpha(q) = x_\alpha(p \dotplus q)$;
- если $\alpha, 2\alpha \in \Phi$ и $p \in P_{2\alpha}(A)$, то $x_{2\alpha}(p) = x_\alpha(p)$;
- если $\alpha$ и $\beta$ не противоположно направлены, то

$$[x_\alpha(p), x_\beta(q)] = \prod_{\substack{i\alpha + j\beta \in \Phi \\ i, j > 0}} x_{i\alpha + j\beta}(f_{\alpha\beta ij}(p, q)).$$

Ясно, что $\mathrm{St}(\Phi, A)$ с отображениями $x_\alpha$ тоже является группой с коммутационными соотношениями типа $\Phi$. Имеется канонический гомоморфизм $\mathrm{st}\colon \mathrm{St}(\Phi, A) \to G(\Phi, A)$, $x_\alpha(p) \mapsto t_\alpha(p)$. Для любого специального замкнутого подмножества $\Sigma \subseteq \Phi$ группа $\mathrm{St}(\Sigma, A) = \langle x_\alpha(P_\alpha(A)) \rangle \leqslant \mathrm{St}(\Phi, A)$ по определению инъективно отображается в $G(\Phi, A)$.

Нам также понадобятся относительные группы Стейнберга. Естественным контекстом для изучения относительных объектов являются *алгебраически когерентные полуабелевы категории* [6]. В любой полуабелевой категории $\mathcal{A}$ есть понятия внутренних действий и скрещенных модулей. *Действия* объекта $A$ из $\mathcal{A}$ на объекте $X$ – это то же самое, что и классы изоморфизма расщеплённых справа точных последовательностей $\dot{0} \to X \to X \rtimes A \leftrightarrows A \to \dot{0}$, средний член называется *полупрямым произведением* (он задаётся действием с точностью до единственного изоморфизма). *Предскрещенным модулем* в $\mathcal{A}$ называется морфизм $\delta\colon X \to A$ вместе с действием $A$ на $X$ таким, что $\delta$ эквивариантно относительно этого действия ($A$ действует на самом себе естественным образом). *Скрещенный модуль* – это предскрещенный модуль, в котором естественное действие $X$ на себе является обратным образом действия $A$ на $X$.

*Морфизм* $(f, g)$ из скрещенного модуля $\delta\colon X \to A$ в скрещенный модуль $\delta\colon Y \to B$ состоит из морфизмов $f\colon X \to Y$ и $g\colon A \to B$ таких, что $\delta \circ f = g \circ \delta$ и $f$ является $A$-эквивариантным, где действие $A$ на $Y$ индуцируется через $g$.

Есть взаимно однозначное соответствие между классами изоморфизма предскрещенных модулей и *рефлексивных графов* в $\mathcal{A}$, то есть наборов $(A, B, p_1, p_2, d)$, где $p_i\colon B \to A$ – это морфизмы с общим сечением $d$. А именно, $X$ соответствует $\mathrm{Ker}(p_2)$ и $\delta$ индуцируется $p_1$. Классы изоморфизма скрещенных модулей соответствуют классам изоморфизма *внутренних категорий* (или *внутренних группоидов*), то есть рефлексивных графов с морфизмами композиции $\lim(B \xrightarrow{p_2} A \xleftarrow{p_1} B) \to B$, превращающих $(\mathcal{A}(T, A), \mathcal{A}(T, B))$ в категории для любого объекта $T$. Такой морфизм композиции обязательно единственен.

Например, в категории групп гомоморфизм $\delta\colon X \to G$ является скрещенным модулем, если $G$ действует на $X$, $\delta({}^g x) = {}^g\delta(x)$ и *тождество Пайффера* ${}^x y = {}^{\delta(x)} y$ выполнено для всех $x, y \in X$.

С этого момента $\mathcal{A}$ обозначает одну из следующих алгебраически когерентных полуабелевых категорий:

- В случае групп Шевалле $\mathcal{A}$ – это категория всех коммутативных $K$-алгебр, не обязательно с единицей. В этой категории действия $A$ на $X$ задаются биаддитивными умножениями $A \times X \to X$, превращающими $X$ в $A$-алгебру. Гомоморфизм $\delta\colon X \to A$ является скрещенным модулем, если $A$ действует на $X$, $\delta(ax) = a\delta(x)$ и $xy = \delta(x)y$ для всех $x, y \in X$ and $a \in A$.
- В линейном случае $\mathcal{A}$ – это категория всех ассоциативных $K$-алгебр. Здесь действия $A$ на $X$ задаются парами умножений $A \times X \to X$ и $X \times A \to X$, превращающих $X$ в $A$-$A$-бимодуль и удовлетворяющих тождествам $(ax)y = a(xy)$, $(xa)y = x(ay)$, $(xy)a = x(ya)$ при $x, y \in X$ и $a \in A$. Гомоморфизм $\delta\colon X \to A$ является скрещенным модулем, если $A$ действует на $X$, $\delta(ax) = a\delta(x)$, $\delta(xa) = \delta(x)a$ и $xy = \delta(x)y = x\delta(y)$ для всех $x, y \in X$ и $a \in A$.
- В унитарном случае $\mathcal{A}$ – это категория нечётных форменных $K$-алгебр. Действия и скрещенные модули в этой категории описаны в [19, §2], [1, §1.4] и [2, §2].

Объекты $A$ категории $\mathcal{A}$ из определений $G(\Phi, A)$ выше будем называть *абсолютными* (то есть если $A$ локально конечно и имеет единицу, семейство идемпотентов или сильное ортогональное гиперболическое семейство). Группы $P_\alpha(-)$, $G(\Phi, -)$ и $\mathrm{St}(\Phi, -)$ являются функторами, заданными на подкатегории абсолютных объектов $\mathcal{A}$, в которой морфизмы – это гомоморфизмы, сохраняющие единицу, идемпотенты или сильное ортогональное гиперболическое семейство соответственно. Все эти функторы перестановочны с прямыми пределами, $P_\alpha(-)$ и $G(\Phi, -)$ перестановочны с конечными пределами, $P_\alpha(-)$ и $\mathrm{St}(\Phi, -)$ перестановочны с сюръективными гомоморфизмами.

Пусть $\delta\colon X \to A$ – скрещенный модуль над абсолютным объектом в $\mathcal{A}$, тогда $X \rtimes A$ тоже абсолютен. Так как $G(\Phi, -)$ сохраняет конечные пределы, мы определим $G(\Phi, X)$ как ядро $G(\Phi, X \rtimes A) \to G(\Phi, A)$, это скрещенный модуль над $G(\Phi, A)$ естественным образом. Ясно, что $G(\Phi, X)$ имеет коммутационные соотношения типа $\Phi$ с корневыми гомоморфизмами $t_\alpha\colon P_\alpha(X) \to G(\Phi, X)$, где $P_\alpha(X)$ – это ядра $P_\alpha(X \rtimes A) \to P_\alpha(A)$. Определим *нерелятивизованную группу Стейнберга* $\mathrm{St}(\Phi, X)$ так же, как $\mathrm{St}(\Phi, A)$, то есть как группу с образующими $x_\alpha(a)$ при $\alpha \in \Phi$, $a \in P_\alpha(X)$, удовлетворяющими соотношениям Стейнберга. Она имеет подгруппы $\mathrm{St}(\Sigma, X)$ для специальных замкнутых подмножеств $\Sigma \subseteq \Phi$.

Напомним, что имеются естественные гомоморфизмы

$$\begin{aligned} p_1 &\colon X \rtimes A \to A,\ x \rtimes a \mapsto a, \\ p_2 &\colon X \rtimes A \to A,\ x \rtimes a \mapsto \delta(x) \dotplus a, \\ d &\colon A \to X \rtimes A,\ a \mapsto \dot{0} \rtimes a. \end{aligned}$$

Они индуцируют гомоморфизмы групп $p_{i*}\colon \operatorname{St}(\Phi, X \rtimes A) \to \operatorname{St}(\Phi, A)$ и $d_*\colon \operatorname{St}(\Phi, A) \to \operatorname{St}(\Phi, X \rtimes A)$, так что $\operatorname{St}(\Phi, X \rtimes A) = \operatorname{Ker}(p_{1*}) \rtimes \operatorname{St}(\Phi, A)$. *Относительной группой Стейнберга* [10, 15] называется

$$\operatorname{St}(\Phi, A, X) = \frac{\operatorname{Ker}(p_{1*})}{[\operatorname{Ker}(p_{1*}), \operatorname{Ker}(p_{2*})]}.$$

Это скрещенный модуль над $\operatorname{St}(\Phi, A)$ (поэтому мы профакторизовали по коммутанту). Имеется естественный гомоморфизм $\operatorname{St}(\Phi, X) \to \operatorname{St}(\Phi, A, X)$, поэтому относительные группы Стейнберга тоже имеют коммутационные соотношения типа $\Phi$.

Имеется следующее задание $\operatorname{St}(\Phi, A, X)$ образующими и соотношениями как абстрактной группы. Для любого корня $\alpha \in \Phi$ *толстой $\alpha$-серией* будем называть множество вида $\Phi \cap (\mathbb{R}_{>0}\beta + \mathbb{R}\alpha)$ для корня $\beta \in \Phi$, линейно независимого с $\alpha$. Ясно, что $\Phi \setminus \mathbb{R}\alpha$ является дизъюнктным объединением толстых $\alpha$-серий, все они являются специальными замкнутыми множествами. Толстая $\alpha$-серия $\Sigma$ имеет размерность 1 или 2, в первом случае $\Sigma = \langle \beta \rangle$, где $(\alpha, \beta)$ является базисом насыщенной подсистемы корней типа $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$ (или, возможно, $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{BC}_1$, если $\Phi$ имела тип $\mathsf{BC}_\ell$). В двумерном случае прямая $\mathbb{R}\alpha$ однозначно восстанавливается по $\Sigma$. Для любой толстой $\alpha$-серии $\Sigma$ группы $\operatorname{St}(\langle \pm\alpha \rangle, A)$ нормализуют $\operatorname{St}(\Sigma, X)$.

**Лемма 1.** *Пусть $X$ – скрещенный модуль над $A$. Тогда $\operatorname{St}(\Phi, A, X)$ порождается элементами $z_\alpha(a, p) = {}^{x_{-\alpha}(p)} x_\alpha(a)$, где $a \in P_\alpha(X)$ и $p \in P_{-\alpha}(A)$, $\alpha \in \Phi \setminus 2\Phi$ и элементами $z_\Sigma(g, h) = {}^h g$, где $g \in \operatorname{St}(\Sigma, X)$, $h \in \operatorname{St}(-\Sigma, A)$ и $\Sigma \subseteq \Phi$ является двумерной толстой $\alpha$-серией. Соотношения между образующими имеют вид*

- $z_\alpha(a \dotplus b, p) = z_\alpha(a, p)\, z_\alpha(b, p)$;
- $z_\Sigma(gg', h) = z_\Sigma(g, h)\, z_\Sigma(g', h)$;
- $z_\Sigma(x_\alpha(a), x_{-\alpha}(p)) = z_\alpha(a, p)$ *при* $\alpha \in \Sigma$;
- $[z_\alpha(a, p), z_\beta(b, q)] = 1$ *для толстой $\alpha$-серии* $\mathbb{R}_{>0}\beta$;
- ${}^{z_\alpha(a,p)} z_\Sigma(g, h) = z_\Sigma\big({}^{t_{-\alpha}(p)\, t_\alpha(\delta(a))\, t_{-\alpha}(\dot{-} p)} g, {}^{t_{-\alpha}(p)\, t_\alpha(\delta(a))\, t_{-\alpha}(\dot{-} p)} h\big)$ *для толстой $\alpha$-серии $\Sigma$;*

- $z_{\langle\alpha,\beta\rangle\setminus\mathbb{R}\alpha}\big({}^{t_\alpha(p)}g, {}^{t_\alpha(p)}(h\,x_\beta(q))\big) = z_{\langle\alpha,\beta\rangle\setminus\mathbb{R}\beta}\big({}^{t_\beta(q)}g, x_\alpha(p)\,h\big)$ *для базиса* $(\alpha, \beta)$ *двумерной неприводимой насыщенной подсистемы корней в* $\Phi$*,* $g \in \mathrm{St}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus (\mathbb{R}\alpha \cup \mathbb{R}\beta), X)$*,* $h \in \mathrm{St}(\langle\alpha,\beta\rangle \setminus (\mathbb{R}\alpha \cup \mathbb{R}\beta), A)$*;*
- $z_\alpha(a, p \dotplus \delta(b)) = {}^{z_{-\alpha}(b,\dot{0})}z_\alpha(a, p)$.

**Доказательство.** Это [21, теорема 1] для полных линейных групп, [21, теорема 2] для групп Шевалле с простыми связями, [2, теорема 2] для нечётных унитарных групп и [2, теорема 3] для групп Шевалле с двойными связями. □

## §3. Про-группы Стейнберга

Группы $G(\Phi, A)$ образуют пучки в топологии Зарисского в следующем смысле. Возьмём элементы $k_1, \ldots, k_n \in K$, порождающие единичный идеал, то есть покрытие $\mathrm{Spec}(K)$ главными открытыми подсхемами $\mathrm{Spec}(K_{k_i})$. Любой абсолютный объект $A$ из $\mathcal{A}$ имеет естественные локализации $A_{k_i}$, для нечётных форменных алгебр подробности можно найти в [19, §3] или [1, §2.2]. Тогда $G(\Phi, A)$ является пределом диаграммы $G(\Phi, A_{k_i}) \rightrightarrows G(\Phi, A_{k_i k_j})$ в категории групп. Аналогично, все $P_\alpha(A)$ также образуют пучки в топологии Зарисского. К сожалению, группы Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, A)$ в общем случае пучки не образуют.

Напомним, что у любой категории $\mathcal{C}$ есть *про-пополнение* $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Объекты $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ – это *формальные проективные пределы* $\varprojlim^{\mathrm{Pro}}_i X_i$ *проективных систем* $(X_i)_i$ в $\mathcal{C}$, то есть контравариантных функторов из малых фильтрованных категорий, таких как $\mathbb{N} = (0 \to 1 \to \ldots)$, в $\mathcal{C}$. Морфизмы в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ задаются формулой

$$\mathrm{Pro}(\mathcal{C})\big(\varprojlim^{\mathrm{Pro}}_i X_i, \varprojlim^{\mathrm{Pro}}_j Y_j\big) = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathcal{C}(X_i, Y_j),$$

где предел и копредел справа берутся в категории множеств. Если $X = \varprojlim^{\mathrm{Pro}}_i X_i$ является про-объектом с категорией индексов $\mathcal{I}$, а $u \colon \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ – кофинальный функтор, то естественный морфизм $X \to \varprojlim^{\mathrm{Pro}}_j X_{u(j)}$ будет изоморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Категория $\mathcal{C}$ вкладывается в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ естественным образом, то есть функтор $\mathcal{C} \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$, $X \mapsto X$ вполне строг.

Так как категория про-множеств $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ декартова, удобно обозначать составные морфизмы в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ при помощи термов первого порядка. Например, $[x, y]$ обозначает коммутатор $G \times G \to G$ для любого группового объекта $G$ (или аддитивный коммутатор для кольцевого объекта в зависимости от контекста), а $f(g(x), h(y)) = f(h(x), g(y))$ для морфизмов $g, h\colon X \to Y$, $f\colon Y \times Y \to Z$ означает, что составные морфизмы $f \circ (g \times h)$ и $f \circ (h \times g)$ равны. Мы будем писать $x \in X$, когда формальная переменная $x$ из терма первого порядка имеет в качестве области про-множество $X$.

Есть канонический "забывающий" функтор из $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$ в категорию групповых объектов в категории про-множеств, он вполне строгий: морфизм $f\colon G \to H$ про-групп, рассматриваемых как про-множества, является морфизмом про-групп тогда и только тогда, когда $f(xy) = f(x)\,f(y)$ при $x, y \in G$ (то есть выполнено равенство между соответствующими морфизмами $G \times G \to H$ в категории про-множеств). Аналогично, «забывающий» функтор из $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ в категорию $\mathcal{A}$-объектов в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ является вполне строгим.

Категории $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$ являются алгебраически когерентными полуабелевыми в силу [8, §1.9]. Действия в них такие же, как и «обычные» действия соответствующих алгебраических объектов в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ согласно [3, теоремы 1, 5, 6] и [1, теорема 4], то есть действия про-объекта $G$ на про-объекте $X$ задаются семейством действий $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(T, G)$ на $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(T, X)$, естественному по про-множеству $T$. Объект $G$ из $\mathcal{A}$ может действовать на объекте $X$ из $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ двумя способами: как про-объект (внутри $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$) или через семейство действий $G$ на $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})(T, X)$, естественное по $T$. В первом случае будем называть действие *сильным*, а во втором – *слабым*. Каждое сильное действие индуцирует соответствующее слабое действие. Например, сильное действие группы $G$ на про-группе $X$ – это морфизм $a\colon G \times X \to X$ про-множеств такой, что $a(gh, x) = a(g, a(h, x))$, $a(1, x) = x$ и $a(g, xy) = a(g, x)\,a(g, y)$ при $g, h \in G$ и $x, y \in X$. С другой стороны, слабое действие $G$ на $X$ – это просто гомоморфизм групп $G \to \mathrm{Aut}(X)$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ следующую категорию. Объектами будут элементы $K$, морфизмы из $k$ в $k'$ – это элементы $k''$ такие, что $k' = kk''$, тождественные морфизмы задаются элементом 1, а композиция совпадает с умножением. Ясно, что локализация $\mathcal{K}$ по морфизмам $k^t\colon k \to k^{t+1}$ антиэквивалентна упорядоченному множеству главных открытых подмножеств $\mathrm{Spec}(K)$, а класс таких морфизмов удовлетворяет подходящему условию Оре. Для любого $k \in K$ имеется функтор

$$\begin{aligned} k^{(-)}\colon \mathbb{N} \to \mathcal{K}, \quad & n \mapsto k^n, \\ & (n \leqslant m) \mapsto (k^{m-n}\colon k^n \to k^m). \end{aligned}$$

Для каждого $s \in K$ и объекта $A$ из $\mathcal{A}$ мы построим *$s$-гомотоп* $\delta\colon A^{(s)} \to A$ (как скрещенный модуль в $\mathcal{A}$) следующим образом:

- Для линейных групп и групп Шевалле $A^{(s)} = \{a^{(s)} \mid a \in A\}$ с операциями $a^{(s)} + b^{(s)} = (a+b)^{(s)}$, $\delta\bigl(a^{(s)}\bigr) = as$, $ab^{(s)} = a^{(s)}b = (ab)^{(s)}$, $a^{(s)}b^{(s)} = (abs)^{(s)}$.
- В унитарном случае конструкция приведена в [1, §3.2]. А именно, если $A = (R, \Delta)$, то $R^{(s)}$ – это соответствующий гомотоп $R$ как $K$-алгебры, а $\Delta^{(s)}$ – это абстрактная группа с образующими $\phi(a^{(s)})$ и $u^{(s)}$ при $a \in R$, $u \in \Delta$ со следующими соотношениями: $\phi\colon R^{(s)} \to \Delta^{(s)}$ является гомоморфизмом с центральным образом, $(u \dotplus v)^{(s)} = u^{(s)} \dotplus v^{(s)}$, $\phi(r)^{(s)} = \phi\bigl((rs)^{(s)}\bigr)$, $\phi\bigl((r+\bar{r})^{(s)}\bigr) = \phi\bigl((\bar{r}rk)^{(s)}\bigr) = \dot{0}$. Операции задаются формулами

$$\overline{r^{(s)}} = \bar{r}^{(s)}, \qquad \pi\bigl(u^{(s)}\bigr) = \pi(u)^{(s)}, \quad \rho\bigl(u^{(s)}\bigr) = \bigl(\rho(u)s\bigr)^{(s)},$$
$$u^{(s)} \cdot r^{(s)} = (u \cdot rs)^{(s)}, \quad \delta\bigl(u^{(s)}\bigr) = \delta(u) \cdot s, \quad u \cdot r^{(s)} = u^{(s)} \cdot r = (u \cdot r)^{(s)}.$$

Конструкция гомотопов является контравариантным функтором из $\mathcal{K}$ в категорию скрещенных модулей над $A$. А именно, если $s''\colon s \to s'$ является морфизмом $\mathcal{K}$, то соответствующий гомоморфизм $A^{(s')} \to A^{(s)}$ задаётся формулами $a^{(s')} \mapsto (as'')^{(s)}$ и $u^{(s')} \mapsto (u \cdot s'')^{(s)}$.

*Колокализацией* объекта $A$ из $\mathcal{A}$ относительно мультипликативного множества $S \subseteq K$ будем называть формальный проективный предел $A^{(\infty, S)} = \varprojlim_{s \in \mathcal{S}} A^{(s)}$ в $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$ (или в про-пополнении категории скрещенных модулей над $A$), где объекты $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$ – это элементы $S$, а морфизмы $s \to s'$ – это $s'' \in S$ со свойством $s' = ss''$. Для каждого $k \in K$ также определим колокализацию $A^{(\infty, k)} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A^{(k^n)}$. Легко видеть, что:

- Если $S = \{1, k, k^2, \ldots\}$, то канонический морфизм $A^{(\infty, S)} \to A^{(\infty, k)}$ является изоморфизмом, даже если не все $k^n$ различны. Действительно, он задаётся предкомпозицией с кофинальным функтором $k^{(-)}\colon \mathbb{N} \to \mathcal{S}$.
- Для любого мультипликативного множества $S \subseteq K$ выполняется $A^{(\infty, S)} \cong \varprojlim_{s \in \mathcal{S}} A^{(\infty, s)}$, где проективный предел берётся в $\mathrm{Pro}(\mathcal{A})$. Здесь правую часть можно представить как $\varprojlim^{\mathrm{Pro}}_{(s,n) \in \mathcal{S} \times \mathbb{N}} A^{(s^n)}$, изоморфизм задаётся предкомпозицией с кофинальным функтором $(-)^{(=)}\colon \mathcal{S} \times \mathbb{N} \to \mathcal{S}$.

- Для любых $k \in K$ и $n > 0$ естественный морфизм $A^{(\infty,k^n)} \to A^{(\infty,k)}$, индуцированный $k^{n-1}\colon k \to k^n$, является изоморфизмом. Обратный к нему задаётся предкомпозицией с умножением на $n$ в категории индексов $\mathbb{N}$.

Про-группы $G\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ и $G\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ для абсолютного $A$ корректно определены как формальные проективные пределы соответствующих относительных групп. Для них есть корневые морфизмы $t_\alpha\colon P_\alpha\big(A^{(\infty,k)}\big) \to G\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ и $t_\alpha\colon P_\alpha\big(A^{(\infty,S)}\big) \to G\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ про-групп, удовлетворяющие определению группы с коммутационными соотношениями, в котором инъективные гомоморфизмы заменены на мономорфизмы. Напомним, что мономорфизмы в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$ – это в точности формальные проективные пределы инъективных гомоморфизмов групп.

Определим соответствующие про-группы Стейнберга $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ и $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ как в [14, §2.4], [19, §5], [20, §4], то есть как формальные проективные пределы нерелятивизованных групп Стейнберга над гомотопами $A$. Можно также задать их «образующими и соотношениями» в следующем смысле. Пусть у нас есть про-множества $X$, $Y_1$, …, $Y_m$ и морфизмы $g_{ij}\colon Y_i \to X$ между ними при $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Будем говорить, что про-группа $G$ вместе с морфизмом про-множеств $f\colon X \to G$ *задана образующими* $X$ *и соотношениями* $\prod_{j=1}^{n_i} g_{ij}(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant m$ и некоторых $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$, если

- эти соотношения выполнены в $G$, то есть $\prod_{j=1}^{n_i} f(g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$ как соответствующие морфизмы $Y_i^{n_i} \to G$ про-множеств;
- пара $(G, f)$ обладает следующим универсальным свойством: для любого про-множества $P$ и морфизма $f'\colon P \times X \to G'$ про-множеств, удовлетворяющего $\prod_{j=1}^{n_i} f'(p, g_{ij}(y))^{\varepsilon_{ij}} = 1$ для всех $i$, существует единственный $h\colon P \times G \to G'$ такой, что $h(p, xy) = h(p, x)h(p, y)$ и $f'(p, x) = h(p, f(x))$.

Сомножитель $P$ из второго условия нужен, потому что $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ не замкнута. Следующая простая лемма доказана в [1, §3.1].

**Лемма 2.** *Пусть $X$, $Y_1$, …, $Y_m$ – про-множества, $g_{ij}\colon Y_i \to X$ – морфизмы между ними при $1 \leqslant j \leqslant n_i$, а $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$ – целые числа. Тогда существует про-группа, порождённая $X$ с соотношениями*

$\prod\limits_{j=1}^{n_i} g_{ij}(y)^{\varepsilon_{ij}} = 1$, *она единственна с точностью до единственного изоморфизма. Кроме того, если диаграмма из* $X$, $Y_i$, $g_{ij}$ *является формальным проективным пределом соответствующих диаграмм в* **Set**, *то требуемая про-группа является формальным проективным пределом обычных групп с соответствующими представлениями.*

Следовательно, $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ и $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ можно определить как про-группы, порождённые $P_\alpha\big(A^{(\infty,k)}\big)$ и $P_\alpha\big(A^{(\infty,S)}\big)$ (то есть их копроизведением в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$), удовлетворяющими соотношениям Стейнберга. В силу универсального свойства существуют морфизмы $\mathrm{st}\colon \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big) \to G\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ про-групп такие, что $\mathrm{st}(x_\alpha(p)) = t_\alpha(p)$.

Ясно, что $A^{(\infty,k)}$, $P_\alpha\big(A^{(\infty,k)}\big)$, $G\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ и $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ образуют копредпучки про-$\mathcal{A}$-объектов или про-групп на сайте из главных открытых подмножеств $\mathrm{Spec}(K)$ с топологией Зарисского. Если $\mathfrak{p} \trianglelefteq K$ – простой идеал, то мы будем писать $(\infty, \mathfrak{p})$ вместо $(\infty, K \setminus \mathfrak{p})$ в верхних индексах. Кослои этих предпучков – это $A^{(\infty,\mathfrak{p})}$, $P_\alpha\big(A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$, $G\big(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$ и $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$ соответственно.

**Лемма 3.** *Пусть* $\alpha \in \Phi$, $S \subseteq K$ *– мультипликативное подмножество,* $\mathrm{St}\big(\Phi \setminus \alpha, A^{(\infty,S)}\big)$ *– про-группа с теми же образующими и соотношениями, что и* $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$, *но без образующих* $x_\beta(p)$ *при* $\beta \parallel \alpha$ *и соотношений*

- $x_\beta(p \dotplus q) = x_\beta(p)\, x_\beta(q)$ *при* $\beta \parallel \alpha$;
- $x_{2\beta}(p) = x_\beta(p)$ *при* $\beta \parallel \alpha$;
- $[x_\beta(p), x_\gamma(q)] = \prod\limits_{\substack{i\beta+j\gamma\in\Phi\\ i,j>0}} x_{i\beta+j\gamma}(f_{\beta\gamma ij}(p,q)), \quad \alpha \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\beta + \mathbb{R}_{\geqslant 0}\gamma.$

*Тогда канонический гомоморфизм* $\mathrm{St}\big(\Phi \setminus \alpha, A^{(\infty,S)}\big) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ *является изоморфизмом. Если* $\alpha, \beta \in \Phi$ *линейно независимы, то* $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ *как про-группа порождается множеством объектов* $x_\gamma\big(P_\gamma\big(A^{(\infty,S)}\big)\big)$ *при* $\gamma \notin \mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta$.

**Доказательство.** Для полных линейных групп это [20, предложение 1], для нечётных унитарных групп это доказано в [19, предложения 1, 2] или [1, теорема 5]. Для исключительных групп Шевалле почти такой же результат доказан в [14, теорема 1], но там исключаются только образующие $x_\alpha(a)$. Такое же доказательство проходит и для нашего утверждения.

С другой стороны, для данной статьи более слабого результата из [14] достаточно, если в случае групп Шевалле определить $D_\alpha(\Phi, A)$ как подгруппу, порождённую максимальным тором и $t_\alpha(P_\alpha(A))$ (вместо определения, данного в следующем разделе). $\square$

Естественно рассмотреть другое возможное определение про-групп Стейнберга, использующее релятивизацию. Так как $A^{(\infty,k)}$ является формальным проективным пределом скрещенных модулей над $A$ с точностью до изоморфизма, мы определим $\mathrm{St}'(\Phi, A^{(\infty,k)})$ как формальный проективный предел соответствующих относительных групп Стейнберга. У него есть задание образующими и соотношениями из леммы 1 в смысле про-групп. Имеется естественный морфизм про-групп $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big) \to \mathrm{St}'\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$.

**Теорема 1.** *Пусть $k \in K$, а $A$ – абсолютный объект из $\mathcal{A}$. Тогда морфизм $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big) \to \mathrm{St}'\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ про-групп является изоморфизмом.*

**Доказательство.** Построим сильное действие каждого $\mathrm{St}(\langle\alpha\rangle, A)$ на $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ при помощи формулы

$$^{x_\alpha(p)}g = F_\alpha\big({}^{x_\alpha(p)}F_\alpha^{-1}(g)\big),$$

где $F_\alpha\colon \mathrm{St}\big(\Phi\backslash\alpha, A^{(\infty,k)}\big) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ – это изоморфизм из леммы 3. Действие $\mathrm{St}\big(\Phi \setminus \alpha, A^{(\infty,k)}\big)$ на правой части задаётся коммутационной формулой Шевалле. Так как все соотношения Стейнберга используют только корни из насыщенных подсистем корней ранга не больше 2, то из второго утверждения леммы 3 вытекает, что эти сильные действия удовлетворяют соотношениям Стейнберга.

Это ещё не даёт нам сильного действия $\mathrm{St}(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$. Но мы можем построить морфизмы про-множеств

$$\begin{aligned} z_\alpha &\colon P_\alpha\big(A^{(\infty,k)}\big) \times P_{-\alpha}(A) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big), \\ z_\Sigma &\colon \mathrm{St}\big(\Sigma, A^{(\infty,k)}\big) \times \mathrm{St}(-\Sigma, A) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big) \end{aligned}$$

из леммы 1, используя сильные действия $P_\alpha(A)$. Легко проверить, что они удовлетворяют соотношениями, так что морфизм $f$ из условия имеет ретракцию.

Наконец, остаётся проверить, что все образующие $\mathrm{St}'\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ пропускаются через $f$. Действительно,

$$\begin{aligned} z_\alpha(a,p) &= {}^{x_{-\alpha}(p)}f(F_\alpha(F_\alpha^{-1}(x_\alpha(a)))) \\ &= f\big(F_\alpha\big({}^{x_{-\alpha}(p)}F_\alpha^{-1}(x_\alpha(a))\big)\big) = f(z_\alpha(a,p)) \end{aligned}$$

со значениям в $\mathrm{St}'\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$. Образующие $z_\Sigma(g,h)$ можно выразить в терминах $z_\alpha(a,p)$, используя соотношения из леммы 1. $\square$

Если теперь взять проективные пределы в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$, то из теоремы 1 следует, что $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ является формальным проективным пределом относительных групп Стейнберга для любого мультипликативного подмножества $S \subseteq K$.

## §4. Стандартные коммутационные формулы

В этом разделе мы докажем аналоги стандартных коммутационных формул. Напомним абсолютный случай:

**Лемма 4.** *Гомоморфизм* $\mathrm{St}(\Phi, A) \to G(\Phi, A)$ *является скрещенным модулем единственным образом. Эта структура скрещенного модуля естественна по* $A$.

**Доказательство.** Существование и единственность доказаны в [14, теорема 3], [19, теорема 3], [20, теорема 2] и [1, теорема 7]. Теперь возьмём морфизм $f\colon A \to B$ абсолютных объектов. Так как $\mathrm{St}(\Phi, A)$ совершенна, достаточно доказать, что

$$[{}^{f_*(g)}f_*(x), {}^{f_*(g)}f_*(y)] = [f_*({}^g x), f_*({}^g y)]$$

для всех $x, y \in \mathrm{St}(\Phi, A)$ и $g \in G(\Phi, A)$. Но ${}^{f_*(g)}f_*(x) \equiv f_*({}^g x)$ по модулю $\mathrm{K}_2(\Phi, B) = \mathrm{Ker}(\mathrm{St}(\Phi, B) \to G(\Phi, B))$ и $\mathrm{K}_2(\Phi, B)$ центральна в $\mathrm{St}(\Phi, B)$, откуда и следует утверждение. $\square$

Для всех $\alpha \in \Phi$ существуют подгруппы $D_\alpha(\Phi, A) \leqslant G(\Phi, A)$, нормализующие $\mathrm{St}(\Sigma, A) \leqslant G(\Phi, A)$ для всех толстых $\alpha$-серий $\Sigma$ и содержащие как максимальный тор (в подходящем смысле), так и корневые подгруппы $t_{\pm\alpha}(P_{\pm\alpha}(A))$. А именно,

- В случае групп Шевалле $D_\alpha(\Phi, A)$ порождается максимальным тором и корневыми подгруппами $t_{\pm\alpha}(P_{\pm\alpha}(A))$ как групповая подсхема. Как абстрактная группа она порождена максимальным тором и подгруппой, изоморфной $\mathrm{SL}(2, A)$ либо $\mathrm{PGL}(2, A)$.

- В линейном случае $D_\alpha(\Phi, A)$ – это диагональная подгруппа относительного нового семейства идемпотентов, полученного «исключением» $\alpha$ [20, §2]. Локально по Зарисскому она порождена обычной диагональной подгруппой и корневыми подгруппами $t_{\pm\alpha}(P_{\pm\alpha}(A))$.
- В унитарном случае $D_\alpha(\Phi, A)$ – это диагональная подгруппа относительного нового ортогонального гиперболического семейства, полученного «исключением» $\alpha$, см. [19, §5] или [1, §1.7].

Эти подгруппы естественны по $A$, они образуют подпучки Зарисского в $G(\Phi, A)$ и перестановочны с прямыми пределами и конечными пределами по $A$.

Для любого мультипликативного подмножества $S \subseteq K$ объект $S^{-1}A$ слабо действует на $A^{(\infty,S)}$, так что группа $G(\Phi, S^{-1}A)$ слабо действует на про-группе $G\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$. Эти слабые действия естественны по $A$ и суперъестественны по $S$ в следующем смысле: для любых мультипликативных подмножеств $S \subseteq S' \subseteq K$ морфизм $A^{(\infty,S')} \to A^{(\infty,S)}$ является $S^{-1}A$-эквивариантным, а $G\big(\Phi, A^{(\infty,S')}\big) \to G\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$ – $G(\Phi, S^{-1}A)$-эквивариантным.

**Лемма 5.** *Возьмём простой идеал $\mathfrak{p} \trianglelefteq K$. Тогда группа $G(\Phi, A_\mathfrak{p})$ порождается подобъектами $D_\alpha(\Phi, A_\mathfrak{p})$ при $\alpha \in \Phi$. Имеется единственное слабое действие $G(\Phi, A_\mathfrak{p})$ на $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$, делающее диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{St}\big(\Sigma, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \arrow[d, "\mathrm{st}"] \\ & G\big(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \end{tikzcd}$$

*$D_\alpha(\Phi, A_\mathfrak{p})$-эквивариантной для любого корня $\alpha$ и толстой $\alpha$-серии $\Sigma$. Это слабое действие естественно по $A$. Морфизм $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}) \to \mathrm{St}(\Phi, A)$ является $G(\Phi, A)$-эквивариантным, где $G(\Phi, A)$ слабо действует на про-группе Стейнберга через $G(\Phi, A_\mathfrak{p})$.*

**Доказательство.** Это [14, предложение 4.3], [19, теорема 1], [20, предложение 3] и [1, лемма 26]. □

Копредпучки $k \mapsto A^{(\infty,k)}$ и $k \mapsto \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ являются “коотделимыми”:

**Лемма 6.** *Пусть* $S \subseteq K$ *– мультипликативное подмножество. Тогда семейство мофризмов* $A^{(\infty,\mathfrak{p})} \to A^{(\infty,S)}$ *является совместно эпиморфным в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$, *где* $\mathfrak{p}$ *пробегает все простые идеалы* $K$, *не пересекающие* $S$. *То же самое верно для семейств* $P_\alpha\big(A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \to P_\alpha\big(A^{(\infty,S)}\big)$ *и* $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$.

**Доказательство.** Унитарный случай доказан в [1, лемма 27]. Для других случаев возьмём морфизмы про-групп $f, g\colon A^{(\infty,S)} \to B$, у которых совпадают сужения на все $A^{(\infty,\mathfrak{p})}$ при $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Не умаляя общности, $B$ является абстрактной группой, а $f$ и $g$ заданы гомоморфизмами $A^{(s)} \to B$ для некоторого $s \in S$. Положим

$$\mathfrak{a} = \big\{k \in K \mid f\big(ka^{(s)}\big) = g\big(ka^{(s)}\big) \text{ for all } a \in A\big\},$$

это идеал $K$. По предположению, он не содержится ни в одном простом идеале, не пересекающем $S$, поэтому $\mathfrak{a}$ пересекает $S$. Другими словами, $f = g$ как морфизмы про-групп. Отсюда легко следуют утверждения про $P_\alpha\big(A^{(\infty,S)}\big)$ и $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,S)}\big)$. □

Напомним, что *скрещенный квадрат* групп состоит из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\widehat{\nu}"] \arrow[d, "\widehat{\mu}"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[r, "\mu"] & P \end{tikzcd}$$

в категории групп вместе с действиями $P$ на $M$, $N$, $L$ и отображением $h\colon M \times N \to L$ такими, что

- $L$, $M$ и $N$ являются скрещенными модулями над $P$;
- $\widehat{\mu}$, $\widehat{\nu}$ и $h$ являются $P$-эквивариантными;
- $h(mm', n) = {}^{\mu(m)}h(m', n)\, h(m, n)$,
  $h(m, nn') = h(m, n)\, {}^{\nu(n)}h(m, n')$;
- $\widehat{\mu}(h(m, n)) = m\, {}^{\nu(n)}m^{-1}$, $\widehat{\nu}(h(m, n)) = {}^{\mu(m)}n\, n^{-1}$;
- $h(m, \widehat{\nu}(l)) = {}^{\mu(m)}l\, l^{-1}$, $h(\widehat{\mu}(l), n) = l\, {}^{\nu(n)}l^{-1}$.

Отображение $h$ называется *скрещенным спариванием*. Ясно, что оно удовлетворяет соотношениям

$$h(m, 1) = h(1, n) = 1,$$

$$h(m^{-1}, n) = {}^{\mu(m)^{-1}}h(m, n)^{-1},$$

$$h(m, n^{-1}) = {}^{\nu(n)^{-1}}h(m, n)^{-1}.$$

Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "\widehat{\nu}"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\widehat{\mu}"'] & & N \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\nu"] & \\
& L' \arrow[rr, "\widehat{\nu}"] \arrow[dd, "\widehat{\mu}"] & & N' \arrow[dd, "\nu"] \\
M \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "f"] & & P \arrow[dr, "f"] & \\
& M' \arrow[rr, "\mu"] & & P'
\end{tikzcd}$$

называется *морфизмом скрещенных квадратов*, если передняя и задняя грани являются скрещенными квадратами, $f({}^{p}l) = {}^{f(p)}f(l)$, $f({}^{p}n) = {}^{f(p)}f(n)$, $f({}^{p}m) = {}^{f(p)}f(m)$ (то есть диаграмма индуцирует морфизмы скрещенных модулей) и $f(h(m,n)) = h(f(m), f(n))$.

Мы собираемся построить скрещенный квадрат по диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}(\Phi, A, X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{st}"'] & \mathrm{St}(\Phi, A) \arrow[d, "\mathrm{st}"] \\
G(\Phi, X) \arrow[r, "\delta"] & G(\Phi, A).
\end{tikzcd} \tag{*}$$

для любого скрещенного модуля $\delta\colon X \to A$ над абсолютным объектом в $\mathcal{A}$. Легко видеть, используя лемму 4, что имеется действие $G(\Phi, X \rtimes A) = G(\Phi, X) \rtimes G(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, X \rtimes A) = \mathrm{Ker}(p_{1*}) \rtimes \mathrm{St}(\Phi, A)$, задаваемое формулой

$$^{(g \rtimes u)}(x \rtimes a) = \big({}^{g}({}^{u}x)\, \langle g, {}^{u}a \rangle\big) \rtimes {}^{u}a$$

для некоторых действий $G(\Phi, A)$ и $G(\Phi, X)$ на $\mathrm{Ker}(p_{1*})$ и отображения $\langle -, = \rangle\colon G(\Phi, X) \times \mathrm{St}(\Phi, A) \to \mathrm{Ker}(p_{1*})$ таких, что

$$\begin{aligned}
&{}^{u}({}^{a}x) = {}^{{}^{u}a}({}^{u}x), && \delta({}^{g}x) = {}^{\delta(g)}\delta(x), && \mathrm{st}({}^{g}x) = {}^{g}\mathrm{st}(x), \\
&{}^{u}({}^{g}x) = {}^{{}^{u}g}({}^{u}x), && \delta({}^{u}x) = {}^{u}\delta(x), && \mathrm{st}({}^{u}x) = {}^{u}\mathrm{st}(x), \\
&\langle g, ab \rangle = \langle g, a \rangle\, {}^{a}\langle g, b \rangle, && \delta(\langle g, a \rangle) = {}^{\delta(g)}a\, a^{-1}, && \mathrm{st}(\langle g, a \rangle) = g\, {}^{\mathrm{st}(a)}g^{-1}, \\
&\langle gh, a \rangle = {}^{g}\langle h, a \rangle\, \langle g, a \rangle, && \langle \mathrm{st}(x), a \rangle = x\, {}^{a}x^{-1}, && {}^{x}y = {}^{\mathrm{st}(x)}y, \\
&{}^{u}\langle g, a \rangle = \langle {}^{u}g, {}^{u}a \rangle, && \langle g, a \rangle\, {}^{a}({}^{g}x) = {}^{g}({}^{a}x)\, \langle g, a \rangle, && {}^{a}x = {}^{\mathrm{st}(a)}x
\end{aligned}$$

при $x, y \in \mathrm{Ker}(p_{1*})$, $a, b \in \mathrm{St}(\Phi, A)$, $g, h \in G(\Phi, X)$, $u, v \in G(\Phi, A)$.

В силу леммы 5 для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \trianglelefteq K$ группы $G(\Phi, X_{\mathfrak{p}})$ и $G(\Phi, A_{\mathfrak{p}})$ слабо действуют на $\mathrm{Ker}\big(p_{1*}^{(\infty, \mathfrak{p})}\big)$ и для каждого

$g \in G(\Phi, X_\mathfrak{p})$ существует морфизм $\langle g, - \rangle\colon \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr) \to \mathrm{Ker}\bigl(p_{1*}^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr)$ про-множеств, удовлетворяющий тем же 15 тождествам. Так же,

$$ {}^g\mathrm{can}(x) = \mathrm{can}({}^g x),\ \ {}^u\mathrm{can}(x) = \mathrm{can}({}^u x),\ \ \langle g, \mathrm{can}(a) \rangle = \mathrm{can}(\langle g, a \rangle) $$

для всех $g \in G(\Phi, X)$ и $u \in G(\Phi, A)$, где $\mathrm{can}\colon \mathrm{Ker}\bigl(p_{1*}^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr) \to \mathrm{Ker}(p_{1*})$ и $\mathrm{can}\colon \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr) \to \mathrm{St}(\Phi, A)$ – это канонические морфизмы.

**Теорема 2.** *Пусть $\delta\colon X \to A$ – это скрещенный модуль над абсолютным объектом в $\mathcal{A}$. Тогда существуют единственное действие $G(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, A, X)$ и единственное скрещенное спаривание*

$$ \langle -, = \rangle\colon G(\Phi, X) \times \mathrm{St}(\Phi, A) \to \mathrm{St}(\Phi, A, X) $$

*такие, что действие $\mathrm{St}(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, A, X)$ пропускается через действие $G(\Phi, A)$ и (*) является скрещенным квадратом. Этот скрещенный квадрат естественен по $\delta\colon X \to A$.*

**Доказательство.** Мы покажем, что структура скрещенного квадрата задаётся действием $G(\Phi, A)$ на $\mathrm{Ker}(p_{1*})$ и отображением $\langle -, = \rangle\colon G(\Phi, X) \times \mathrm{St}(\Phi, A) \to \mathrm{Ker}(p_{1*})$ (так что она автоматически естественна по $\delta\colon X \to A$). Положим $N = [\mathrm{Ker}(p_{1*}), \mathrm{Ker}(p_{2*})] \leqslant \mathrm{Ker}(p_{1*})$, так что $\mathrm{St}(\Phi, A, X) = \mathrm{Ker}(p_{1*})/N$. Легко видеть, что $N$ порождается элементами вида ${}^x y\, {}^{\delta(x)} y^{-1}$ при $x, y \in \mathrm{Ker}(p_{1*})$, а также сохраняется под действием $G(\Phi, A)$.

Чтобы показать, что $N$ также $G(\Phi, X)$-инвариантно, проверим, что

$$ {}^{\delta(g)}x \equiv {}^g x \pmod N $$

при $g \in G(\Phi, X)$ и $x \in \mathrm{Ker}(p_{1*})$. Так как обе части являются гомоморфизмами по $x$, по лемме 6 достаточно проверить, что

$$ {}^{\delta(g)}x \equiv {}^g x \pmod{N^{(\infty, \mathfrak{p})}} $$

для любого простого идеала $\mathfrak{p} \trianglelefteq K$, любого элемента $g \in G(\Phi, X_\mathfrak{p})$ и формальной переменной $x \in \mathrm{Ker}\bigl(p_{1*}^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr)$. Здесь $N^{(\infty, \mathfrak{p})} \leqslant \mathrm{Ker}\bigl(p_{1*}^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr)$ – это под-про-группа, порождённая ${}^x y\, {}^{\delta(x)} y^{-1}$ при $x, y \in \mathrm{Ker}\bigl(p_{1*}^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr)$, она очевидно $\mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty, \mathfrak{p})}\bigr)$-инвариантна (и, в частности, нормальна). Достаточно проверить тождество для образующих $g \in G(\Phi, X_\mathfrak{p})$. Используя тождества ${}^{u}{}^{g}x = {}^u\bigl({}^g\bigl({}^{u^{-1}}x\bigr)\bigr)$, ${}^{u}{}^{\delta(g)}x = {}^u\bigl({}^{\delta(g)}\bigl({}^{u^{-1}}x\bigr)\bigr)$ и лемму 5, применённую к $X \rtimes A$ и $A$, можем считать, что $g \in D_\alpha(\Phi, X_\mathfrak{p})$, где

$$ D_\alpha(\Phi, (X \rtimes A)_\mathfrak{p}) = D_\alpha(\Phi, X_\mathfrak{p}) \rtimes D_\alpha(\Phi, A_\mathfrak{p}). $$

Используя тождества
$$^{g}\big({}^{a}x\big) \equiv {}^{\delta(\langle g,a\rangle)\, a}\big({}^{g}x\big) \pmod{N^{(\infty,\mathfrak{p})}},$$
$$^{\delta(g)}\big({}^{a}x\big) = {}^{\delta(\langle g,a\rangle)\, a}\big({}^{\delta(g)}x\big)$$
и лемму 3, применённую к $X \rtimes A$ и к $A$, мы также можем считать, что $x$ имеет область $\mathrm{St}\big(\Sigma, X^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$ для толстой $\alpha$-серии $\Sigma$. Но теперь обе части совпадают в $\mathrm{St}\big(\Sigma, X^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \leqslant \mathrm{Ker}\big(p_{1*}^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$, так как их образы под действием st одинаковы.

Тем же способом мы проверим, что
$$\langle g, \delta(x)\rangle\, x \equiv {}^{g}x \pmod N$$
при $g \in G(\Phi, X)$ и $x \in \mathrm{Ker}(p_{1*})$. Легко видеть, что обе части являются гомоморфизмами по $x$ по модулю $N$. В силу леммы 6 достаточно проверить, что
$$\langle g, \delta(x)\rangle\, x \equiv {}^{g}x \pmod{N^{(\infty,\mathfrak{p})}}$$
для простого идеала $\mathfrak{p} \trianglelefteq K$, $g \in G(\Phi, X_{\mathfrak{p}})$ и формальной переменной $x \in \mathrm{Ker}\big(p_{1*}^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$. Здесь обе части являются также морфизмами прогрупп $\mathrm{Ker}\big(p_{1*}^{(\infty,\mathfrak{p})}\big) \to \mathrm{Ker}\big(p_{1*}^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)/N^{(\infty,\mathfrak{p})}$ для любого $g$. Так как
$$\langle gh, \delta(x)\rangle\, x = {}^{g}\big(\langle h, \delta(x)\rangle\, x\big)\, {}^{g}x^{-1}\, \langle g, \delta(x)\rangle\, x,$$
то $N^{(\infty,\mathfrak{p})}$ является $G(\Phi, X_{\mathfrak{p}})$-инвариантной. Кроме того,
$$\langle {}^{u}g, \delta(x)\rangle\, x = {}^{u}\Big(\big\langle g, \delta\big({}^{u^{-1}}x\big)\big\rangle\, {}^{u^{-1}}x\Big),$$
поэтому мы можем применить лемму 5 и считать, что $g \in D_\alpha(X_{\mathfrak{p}})$. Используя тождество $\langle g, \delta({}^{a}x)\rangle\, {}^{a}x \equiv {}^{\delta(\langle g,a\rangle)\, a}\big(\langle g, \delta(x)\rangle\, x\big) \pmod{N^{(\infty,\mathfrak{p})}}$, мы также можем считать, что $x \in \mathrm{St}\big(\Sigma, X^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$ для толстой $\alpha$-серии $\Sigma$. Теперь опять обе части совпадают в $\mathrm{St}\big(\Sigma, X^{(\infty,\mathfrak{p})}\big)$, так как их образы под действием st одинаковы.

Теперь легко видеть, что все действия и отображение $\langle -, = \rangle$ в (*) корректно определены и образуют скрещенный квадрат.

Докажем единственность. Действие $G(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, A, X)$ единственно по модулю ядра $\mathrm{st}\colon \mathrm{St}(\Phi, A, X) \to G(\Phi, X)$, а $\mathrm{St}(\Phi, A)$ централизует это ядро по аксиомам скрещенных квадратов. Кроме того,
$$\mathrm{St}(\Phi, A, X) = [\mathrm{St}(\Phi, A), \mathrm{St}(\Phi, A, X)]$$
в $\mathrm{St}(\Phi, A, X) \rtimes \mathrm{St}(\Phi, A)$ (так как $\mathrm{St}(\Phi, A \rtimes X)$ совершенна) и ${}^{g}[a, x] = [{}^{g}a, {}^{g}x]$ для любых $g \in G(\Phi, A)$, $a \in \mathrm{St}(\Phi, A)$, $x \in \mathrm{St}(\Phi, A, X)$. Следовательно, действие $G(\Phi, A)$ на $\mathrm{St}(\Phi, A, X)$ единственно.

Возьмём любые $g \in G(\Phi, X)$, $a \in \mathrm{St}(\Phi, A)$, $b \in \mathrm{St}(\Phi, A)$ и положим $u = \langle g, a\rangle$, $v = \langle g, b\rangle$. Тогда

$$\langle g, [a, b]\rangle = u\bigl({}^{\mathrm{st}(a)}v\bigr)\bigl({}^{\mathrm{st}(aba^{-1})}u^{-1}\bigr)\bigl({}^{\mathrm{st}([a,b])}v^{-1}\bigr).$$

Как $u$, так и $v$ однозначно определены по модулю ядра $\mathrm{st}\colon \mathrm{St}(\Phi, A, X) \to G(\Phi, X)$. Но отсюда следует, что $\langle g, [a, b]\rangle$ однозначно определено, так как

$$\begin{aligned} w\bigl({}^{\mathrm{st}(a)}v\bigr)\bigl({}^{\mathrm{st}(aba^{-1})}w^{-1}\bigr) &= w\bigl({}^{\mathrm{st}(a)\delta(g)\,\mathrm{st}(b)\delta(g)^{-1}\,\mathrm{st}(a)^{-1}}w^{-1}\bigr)\bigl({}^{\mathrm{st}(a)}v\bigr) \\ &= \bigl\langle \mathrm{st}(w), {}^{\mathrm{st}(a)\delta(g)}b\bigr\rangle\bigl({}^{\mathrm{st}(a)}v\bigr) = {}^{\mathrm{st}(a)}v, \\ w\bigl({}^{\mathrm{st}(ba^{-1})}u^{-1}\bigr)\bigl({}^{\mathrm{st}(ba^{-1}b^{-1})}w^{-1}\bigr) &= w\bigl({}^{\mathrm{st}(b)\delta(g)\,\mathrm{st}(a^{-1})\delta(g)^{-1}\,\mathrm{st}(b^{-1})}w^{-1}\bigr)\bigl({}^{\mathrm{st}(ba^{-1})}u^{-1}\bigr) \\ &= \bigl\langle \mathrm{st}(w), {}^{\mathrm{st}(b)\delta(g)}a^{-1}\bigr\rangle\bigl({}^{\mathrm{st}(ba^{-1})}u^{-1}\bigr) = {}^{\mathrm{st}(ba^{-1})}u^{-1} \end{aligned}$$

для всех $w \in \mathrm{St}(\Phi, A, X)$ из ядра st. Группа $\mathrm{St}(\Phi, A)$ совершенна, поэтому скрещенное спаривание единственно. $\square$

## §5. Копучки

Согласно теоремам 1 и 2 имеется скрещенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,k)}\bigr) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{St}(\Phi, A) \\ {\scriptstyle \mathrm{st}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{st}} \\ G\bigl(\Phi, A^{(\infty,k)}\bigr) & \xrightarrow{\delta} & G(\Phi, A), \end{array}$$

естественный по $k \in K$ и $A$. В частности, $\mathrm{St}(\Phi, A^{(\infty,k)})$ являются скрещенными модулями над $G(\Phi, A)$ естественным образом.

Для каждого морфизма $k \to k'$ в $\mathcal{K}$ обозначим морфизмы

$$\begin{aligned} A^{(\infty,k')} &\to A^{(\infty,k)}, & G\bigl(\Phi, A^{(\infty,k')}\bigr) &\to G\bigl(\Phi, A^{(\infty,k)}\bigr), \\ P_\alpha\bigl(A^{(\infty,k')}\bigr) &\to P_\alpha\bigl(A^{(\infty,k)}\bigr), & \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,k')}\bigr) &\to \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,k)}\bigr) \end{aligned}$$

через $\mathrm{can}^{k'}_k$. Следующий результат показывает, что $P_\alpha\bigl(A^{(\infty,k)}\bigr)$ являются копучками абелевых про-групп, кроме случая, когда $2\alpha \in \Phi$.

**Лемма 7.** *Пусть $k_i$, $t_i$ и $s$ – элементы $K$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ такие, что $s \in \sum_{i=1}^{n} k_i K$. Про-группа $P_\alpha\bigl(A^{(\infty,s)}\bigr)$ порождается $\mathrm{can}^{sk_i}_s$ с соотношениями*

- $\bigl[\mathrm{can}^{sk_i}_s(a), \mathrm{can}^{sk_j}_s(b)\bigr]^{\cdot} = 0$ *для всех $i$ и $j$;*
- $\mathrm{can}^{sk_i}_s(a + b) = \mathrm{can}^{sk_i}_s(a) \dotplus \mathrm{can}^{sk_i}_s(b)$*;*

- $\mathrm{can}_s^{sk_i}\big(\mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j}(a)\big) = \mathrm{can}_s^{sk_j}\big(\mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}(a)\big)$ *при* $i \neq j$;

*если только не* $2\alpha \in \Phi$ *или* $\frac{\alpha}{2} \in \Phi$. *В случае* $2\alpha \in \Phi$ *про-группа* $P_\alpha\big(A^{(\infty,s)}\big)$ *порождается* $\mathrm{can}_s^{sk_i}$ *с соотношениями*

- $\big[\mathrm{can}_s^{sk_i}(u), \mathrm{can}_s^{sk_j}(v)\big]^{\cdot} = \mathrm{can}_s^{sk_i}\big(\phi\big(\overline{\mathrm{can}_1^{sk_j}(\pi(v))}\,\pi(u)\big)\big)$ *для всех* $i$ *и* $j$;
- $\mathrm{can}_s^{sk_i}(u \dotplus v) = \mathrm{can}_1^{sk_i}(u) \dotplus \mathrm{can}_s^{sk_i}(v)$;
- $\mathrm{can}_s^{sk_i}\big(\mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j}(u)\big) = \mathrm{can}_s^{sk_j}\big(\mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}(u)\big)$ *при* $i \neq j$.

**Доказательство.** Напомним, что формальный проективный предел отображений $u_i\colon X_i \to Y_i$ является изоморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ тогда и только тогда, когда для каждого $i$ существуют индекс $i'$, морфизм $m\colon i' \to i$ и отображение $v_i\colon Y_{i'} \to X_i$ такие, что $u_i \circ v_i = Y_m\colon Y_{i'} \to Y_i$ и $v_i \circ u_{i'} = X_m\colon X_{i'} \to X_i$ (тогда $v_i$ являются компонентами обратного морфизма в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$).

Теперь зафиксируем корень $\alpha$. Определим $G = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} G_m$ как про-группу с представлением из условия, построенную в лемме 2 как формальный проективный предел групп с данными представлениями. Имеется очевидный морфизм $G \to P_\alpha\big(A^{(\infty,s)}\big)$, обратный к нему состоит из гомоморфизмов групп

$$a^{(s^{m'+m})} \mapsto \sum_{i=1}^{n} (at_{im})^{(s^m k_i^m)}$$

за исключением случаев $2\alpha \in \Phi$ и $\frac{\alpha}{2} \in \Phi$ и из

$$u^{(s^{m'+m})} \mapsto \dot{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}} (u \cdot t_{im})^{(s^m k_i^m)} \dotplus \dot{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}} \phi\big((\rho(u)s^m t_{im}t_{jm}k_j^m)^{(s^m k_i^m)}\big),$$

$$\phi\big(a^{(s^{m'+m})}\big) \mapsto \dot{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}} \phi\big((at_{im})^{(s^m k_i^m)}\big)$$

при $2\alpha \in \Phi$, где $m' = \max(0, (m-1)n+1)$ и $s^{m'} = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^m t_{im}$ для некоторых $t_{im} \in K$. $\square$

В частности, $K^{(\infty,k)}$ образуют копучок абелевых про-групп. Если $K$ является областью целостности, то каждое $K^{(\infty,k)}$ является под-про-кольцом $K$ (так как можно отождествить каждый $K^{(s)}$ с $Ks$) и $K/K^{(\infty,k)} = \varprojlim_n^{\mathrm{Pro}} K/Kk^n$ является формальным про-пополнением в $k$. Например, в случае $K = \mathbb{C}[x, y]$ продолжение этого копучка на $\mathrm{Spec}(K_x) \cup \mathrm{Spec}(K_y)$ является под-про-группой $K^{(\infty,x)} + K^{(\infty,y)} \leqslant K$ и

$$K/\bigl(K^{(\infty,x)} + K^{(\infty,y)}\bigr) = \varprojlim\nolimits_n^{\mathrm{Pro}} K/(Kx^n + Ky^n)$$

является про-группой формальных степенных рядов от двух переменных. Напомним, что значение пучка локализаций (то есть структурного пучка схемы $\mathrm{Spec}(K)$) на этом подмножестве совпадает с $K$.

Легко видеть, что формальный проективный предел отображений $u_i \colon X_i \to Y_i$ является эпиморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, если для каждого $i$ найдутся индекс $i'$ и морфизм $m \colon i' \to i$ такие, что образ $Y_m \colon Y_{i'} \to Y_i$ содержится в образе $u_i$ (на самом деле, это описание *регулярных эпиморфизмов*).

**Теорема 3.** *Пусть $A$ – абсолютный объект в $\mathcal{A}$, а $k_i$, $s$ – элементы $K$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ такие, что $s \in \sum_{i=1}^{n} k_i K$. Тогда про-группа* $\mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,s)}\bigr)$ *порождается* $\mathrm{can}_s^{sk_i} \colon \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,sk_i)}\bigr) \to \mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,s)}\bigr)$ *с соотношениями*

- $\mathrm{can}_s^{sk_i}(gh) = \mathrm{can}_s^{sk_i}(g)\, \mathrm{can}_s^{sk_i}(h)$;
- $\mathrm{can}_s^{sk_i}(\mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j}(g)) = \mathrm{can}_s^{sk_j}(\mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}(g))$ *при* $i \neq j$;
- ${}^{\mathrm{can}_s^{sk_i}(g)}\mathrm{can}_s^{sk_j}(h) = \mathrm{can}_s^{sk_j}\bigl({}^{\mathrm{can}_1^{sk_i}(g)}h\bigr)$ *при* $i \neq j$;

*в последнем соотношении группа* $\mathrm{St}(\Phi, A)$ *сильно действует на* $\mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,sk_j)}\bigr)$ *каноническим образом.*

**Доказательство.** В силу леммы 7 про-группа $\mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,s)}\bigr)$ порождается $x_\alpha^i = x_\alpha \circ \mathrm{can}_s^{sk_i}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\alpha \in \Phi$ с соотношениями

- $x_\alpha^i(a \dotplus b) = x_\alpha^i(a)\, x_\alpha^i(b)$;
- $x_\alpha^i(a) = x_{2\alpha}^i(a)$ при $a \in P_{2\alpha}\bigl(A^{(\infty,sk_i)}\bigr)$;
- $x_\alpha^i\bigl(\mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j}(a)\bigr) = x_\alpha^j\bigl(\mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}(a)\bigr)$;
- $[x_\alpha^i(a), x_\beta^j(b)] = \prod_{\substack{i\alpha + j\beta \in \Phi \\ i,j>0}} x_{i\alpha+j\beta}^i\bigl(f_{\alpha\beta ij}\bigl(a, \mathrm{can}_1^{sk_j}(b)\bigr)\bigr)$, если только $\alpha$ и $\beta$ не противоположно направлены.

Действительно, коммутационная формула Шевалле из стандартного задания $\mathrm{St}\bigl(\Phi, A^{(\infty,s)}\bigr)$ образующими и соотношениями легко сводится к этим соотношениям, так как

$$\prod_{i=1}^{n} P_\alpha\bigl(A^{(\infty,sk_i)}\bigr) \to P_\alpha\bigl(A^{(\infty,s)}\bigr), \quad (a_i)_i \mapsto \dot{\sum_i} \mathrm{can}_s^{sk_i}(a_i)$$

является эпиморфизмом про-множеств и выполнено теоретико-групповое тождество

$$
\begin{aligned}
[\prod_{i=1}^{n} g_i, \prod_{j=1}^{m} h_j] = {}^{g_1\cdots g_{n-1}}\big([g_n, h_1]\,{}^{h_1}[g_n, h_2] \ldots {}^{h_1\ldots h_{m-1}}[g_n, h_m]\big) \\
{}^{g_1\cdots g_{n-2}}\big([g_{n-1}, h_1]\,{}^{h_1}[g_{n-1}, h_2] \ldots {}^{h_1\ldots h_{m-1}}[g_{n-1}, h_m]\big) \\
\ldots \\
\big([g_1, h_1]\,{}^{h_1}[g_1, h_2] \ldots {}^{h_1\ldots h_{m-1}}[g_1, h_m]\big).
\end{aligned}
$$

С другой стороны, это задание образующими и соотношениями эквивалентно заданию из условия, так как соотношения из условия выполнены для про-групп Стейнберга и влекут соотношения из доказательства. □

**Теорема 4.** *Пусть $A$ – это абсолютный объект в $\mathcal{A}$. Тогда предкопучок $k \mapsto \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,k)}\big)$ является копучком скрещенных про-модулей над $G(\Phi, A)$ или $\mathrm{St}(\Phi, A)$. Другими словами, для всех $k_i, s \in K$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ со свойством $s \in \sum_{i=1}^{n} k_i K$ скрещенный про-модуль $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,s)}\big)$ является универсальным скрещенным про-модулем с морфизмами*

$$\mathrm{can}_s^{sk_i} \colon \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,sk_i)}\big) \to \mathrm{St}\big(\big(\Phi, A^{(\infty,s)}\big)$$

*такими, что* $\mathrm{can}_s^{sk_i} \circ \mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j} = \mathrm{can}_s^{sk_j} \circ \mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}$.

**Доказательство.** Пусть $X$ – это скрещенный про-модуль над $G(\Phi, A)$ или $\mathrm{St}(\Phi, A)$, а $f_i \colon \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,sk_i)}\big) \to X$ – морфизмы скрещенных про-модулей, причём $f_i \circ \mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j} = f_j \circ \mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}$. Согласно теореме 3, существует единственный морфизм про-групп $g \colon \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,s)}\big) \to X$ такой, что $g \circ \mathrm{can}_s^{sk_i} = f_i$. Остаётся проверить, что $g$ является $G(\Phi, A)$-эквивариантным (или $\mathrm{St}(\Phi, A)$-эквивариантным). Но морфизм умножения

$$G(\Phi, A) \times \prod_{i=1}^{n} \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,sk_i)}\big) \to G(\Phi, A) \times \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty,s)}\big)$$

является эпиморфизмом про-множеств (это легко следует из теоремы 1), так что требуемая эквивариантность следует из эквивариантности $f_i$. □

Наконец, мы обобщим лемму 5 на произвольные мультипликативные подмножества.

**Теорема 5.** *Существуют единственные слабые действия всех* $G(\Phi, S^{-1}A)$ *на* $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, S)}\big)$ *для мультипликативных* $S \subseteq K$ *и абсолютных объектов* $A$ *из* $\mathcal{A}$ *такие, что морфизмы* $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, \mathfrak{p})}\big) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, S)}\big)$ *являются* $G(\Phi, S^{-1}A)$*-эквивариантными для всех простых идеалов* $\mathfrak{p} \trianglelefteq K$*, не пересекающих* $S$*. Такие слабые действия естественны по* $A$ *и суперъестественные по* $S$ *в следующем смысле: для любых мультипликативных подмножеств* $S \subseteq S'$ *морфизм* $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, S')}\big) \to \mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, S)}\big)$ *является* $G(\Phi, S^{-1}A)$*-эквивариантным.*

**Доказательство.** Единственность, естественность по $A$ и суперъестественность по $S$ следуют из леммы 6. Чтобы показать существование достаточно рассмотреть только мультипликативные подмножества вида $S = \{1, s, s^2, \ldots\}$ при $s \in K$. Возьмём $g \in G(\Phi, A_s)$. По лемме 5 существует покрытие Зарисского $\mathrm{Spec}(A_s) = \cup_{i=1}^{n} \mathrm{Spec}(A_{sk_i})$ (мы можем считать, что $s \in \sum_i k_i K$) такое, что образ $g$ в каждом $G(\Phi, A_{sk_i})$ лежит в произведении некоторых $D_\alpha(\Phi, A_{sk_i})$, так что по лемме 3 $g$ индуцирует автоморфизмы $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, sk_i)}\big)$ с требуемым свойством. Чтобы получить индуцированный эндоморфизм $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, s)}\big)$ мы применим теорему 3 и тождества

$$
\begin{aligned}
\mathrm{can}_s^{sk_i}\big({}^g(hh')\big) &= \mathrm{can}_s^{sk_i}\big({}^g h\, {}^g h'\big) = \mathrm{can}_s^{sk_i}\big({}^g h\big)\, \mathrm{can}_s^{sk_i}\big({}^g h'\big);\\
\mathrm{can}_s^{sk_i}\big({}^g \mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j}(h)\big) &= \mathrm{can}_s^{sk_i}\big(\mathrm{can}_{sk_i}^{sk_ik_j}({}^g h)\big)\\
&= \mathrm{can}_s^{sk_j}\big(\mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}({}^g h)\big) = \mathrm{can}_s^{sk_j}\big({}^g \mathrm{can}_{sk_j}^{sk_ik_j}(h)\big);\\
{}^{\mathrm{can}_s^{sk_i}({}^g h)}\mathrm{can}_s^{sk_j}\big({}^g h'\big) &= \mathrm{can}_s^{sk_j}\big({}^{g\ \mathrm{can}_1^{sk_i}(\mathrm{st}(h))} h'\big).
\end{aligned}
$$

Следовательно, $g$ задаёт эндоморфизм $\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, s)}\big)$ с требуемым свойством. Из единственности таких эндоморфизмов следует, что у нас есть гомоморфизм моноидов $G(\Phi, A_s) \to \mathrm{End}\big(\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, s)}\big)\big)$ с нужным свойством, он обязательно принимает значения в $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{St}\big(\Phi, A^{(\infty, s)}\big)\big)$. □

## Список литературы


1. Е. Ю. Воронецкий, *Младшая* K*-теория нечётных унитарных групп.* — Кандидатская диссертация, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 2022.

2. Е. Ю. Воронецкий, *Представление относительных унитарных групп Стейнберга.* — Алгебра и анализ **35:6** (2023), 45–86.
3. Е. Ю. Воронецкий, *Действия про-групп и про-колец.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **531** (2024), 53–70.
4. М. С. Туленбаев, *Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 162–169.
5. S. Böge, *Steinberggruppen von orthogonalen Gruppen.* — J. reine angew. Math., **494** (1998), 219–236.
6. A. S. Cigoli, J. R. A. Gray, T. Van der Linden, *Algebraically coherent categories.* — Theory and applications of categories **30:54** (2015), 1864–1905.
7. R. Hazrat, A. Stepanov, N. Vavilov, Z. Zhang, *The yoga of commutators.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 33–139.
8. P.-A. Jacqmin, Z. Janelidze, *On stability of exactness properties under the pro-completion.* — Adv. Math. **377** (2021), 107484.
9. W. van der Kallen, *Another presentation for Steinberg groups.* — Indag. Math. **80:4** (1977), 304–312.
10. F. Keune, *The relativization of* $\mathrm{K}_2$. — J. Algebra **54** (1978), 159–177.
11. A. Lavrenov, *Relative symplectic Steinberg group.* — препринт, `arXiv:1412.2421`.
12. A. Lavrenov, *Another presentation for symplectic Steinberg groups.* — J. Pure Appl. Alg. **219:9** (2015), 3755–3780.
13. A. Lavrenov, S. Sinchuk, *On centrality of even orthogonal* $\mathrm{K}_2$. — J. Pure Appl. Alg. **221:5** (2017), 1134–1145.
14. A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, *Centrality of* $\mathrm{K}_2$ *for Chevalley groups: a pro-group approach.* — Isr. J. Math. **262** (2024), 97–142.
15. J.-L. Loday, *Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs.* — J. Algebra **54** (1978), 178–202.
16. O. Loos, E. Neher, *Steinberg groups for Jordan pairs.* — Birkhäuser, New York, 2019.
17. S. Sinchuk, *On centrality of* $\mathrm{K}_2$ *for Chevalley groups of type* $\mathrm{E}_l$. — J. Pure Appl. Alg. **220:2** (2016), 857–875.
18. A. Stavrova, *On the congruence kernel of isotropic groups over rings.* — Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 4585–4626
19. E. Voronetsky, *Centrality of odd unitary* $\mathrm{K}_2$*-functor.* — препринт, `arXiv:2005.02926`.
20. E. Voronetsky, *Centrality of* $\mathrm{K}_2$*-functor revisited.* — J. Pure Appl. Alg. **225:4** (2021), 106547.
21. E. Voronetsky, *Explicit presentation of relative Steinberg groups.* — J. Algebra **602** (2022), 278–299.
22. M. Wendt, *On homotopy invariance for homology of rank two groups.* — J. Pure Appl. Alg. **216:10** (2012), 2291–2301.

Voronetsky E. Yu. Cosheaves of Steinberg pro-groups.

Steinberg pro-groups are certain pro-groups used to analyze ordinary Steinberg groups locally in Zariski topology. In this paper we show that Steinberg pro-groups associated with general linear groups, odd unitary groups, and Chevalley groups satisfy a Zariski cosheaf property as crossed pro-modules over the base groups. Also, we prove an analogue of the standard commutator formulae for relative Steinberg groups.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14 линия В. О., дом 29Б,
199178 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: voronetckiiegor@yandex.ru

Поступило 3 февраля 2025 г.