Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 545, 2025 г.

Д. В. Руцкий

СЛАБАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ПЭЛИ–ВИНЕРА

В недавней работе П. А. Куликова [5], среди прочего, с помощью операторной техники была получена слабая факторизация пространства Пэли–Винера PW^1_{2a} в сумму произведений $\mathrm{PW}^p_a \cdot \mathrm{PW}^q_a$ при $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. В настоящей заметке мы покажем, что с помощью метода из работы А. Л. Вольберга [9] в случае подходящих рациональных показателей можно получить разложение PW^1_{2a} в сумму произведений вида $\mathrm{PW}^p_{2a/p} \cdot \mathrm{PW}^q_{2a/q}$ с конечным числом слагаемых. Более того, этот же метод позволяет получить слабую факторизацию пространств Пэли–Винера $\mathrm{PW}^{X^2}_{2a}$ в сумму трёх слагаемых вида $\mathrm{PW}^X_a \cdot \mathrm{PW}^X_a$ для произвольной перестановочно инвариантной решётки измеримых функций X, обладающей свойством Фату и r-выпуклой при некотором $r > 0$, и аналогичные результаты для пространств полиномов на окружности. В случае пространств типа Харди на бидиске результат А. Л. Вольберга допускает обобщение на пространства типа Харди для 1-вогнутых перестановочно инвариантных пространств, что, в частности, частично обобщает известную слабую факторизацию С. Фергюсон и М. Лэйси пространства $\mathrm{H}_1\left(\mathbb{T}^2\right)$.

§1. Основные результаты

Для функций из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $a > 0$ пространство Пэли–Винера на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется как пространство функций $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}^n)$, носитель преобразования Фурье $\hat{f}$ которых лежит в кубе $[-a, a]^n$. Для подходящих квазинормированных пространств $X \supset \mathcal{S}_a(\mathbb{R}^n)$ функций на $\mathbb{R}^n$ соответствующие пространства Пэли–Винера $\mathrm{PW}^X_a(\mathbb{R}^n)$ определяются как замыкание класса $\mathcal{S}_a(\mathbb{R}^n)$ в X. Их дискретными аналогами являются пространства полино-

Ключевые слова: слабая факторизация, пространства Пэли–Винера, пространства полиномов, перестановочно инвариантные пространства, пространства Харди.

Исследования в §2 выполнены за счет гранта Российского научного фонда 23-11-00171, `https://rscf.ru/project/23-11-00171/`.

мов $\mathcal{P}_N(\mathbb{T}^n)$ степени не выше N на торе $\mathbb{T}^n$; соответствующие квазинормированные пространства мы будем обозначать через $\mathcal{P}_N^X(\mathbb{T}^n)$.

Квазинормированной решёткой измеримых функций называется квазинормированное пространство X со свойством идеала: если $|f| \leqslant g$ для некоторой измеримой функции f и $g \in X$, то $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$. Хотя основные результаты настоящей работы изначально получаются для классических пространств Лебега в роли X, представляется важным отметить, что они также естественным образом обобщаются на перестановочно инвариантные квазинормированные решётки измеримых функций X, т.е. пространства с квазинормой, удовлетворяющей условию $\|f\|_X = \||f|^*\|_{X_{\mathbb{R}_+}}$, $f \in X$, для некоторого квазинормированного пространства измеримых функций $X_{\mathbb{R}_+}$ на луче $\mathbb{R}_+$, где через $|f|^*$ обозначена невозрастающая перестановка функции $|f|$. В частности, таковыми являются все пространства Лебега, Орлича, Марцинкевича и многие другие.

Степень решётки X^δ (её $1/\delta$-конвексификация) определяется как пространство $X^\delta = \{f \mid |f|^{1/\delta} \in X\}$ с соответствующей квазинормой $\|f\|_{X^\delta} = \||f|^{1/\delta}\|_X^\delta$. Решётка X обладает свойством Фату, если для любой последовательности $f_j \in X$, $\|f_j\|_X \leqslant 1$, $f_j \to f$ почти всюду справедливо $f \in X$, $\|f\|_X \leqslant 1$. Решётка X обладает порядково непрерывной квазинормой, если для любой невозрастающей последовательности $f_n \in X$, $f_n \geqslant 0$, $f_n \to 0$ почти всюду также верно $\|f_n\|_X \to 0$. Порядково сопряжённое пространство X' для нормированной решётки X состоит из измеримых функций g с конечной нормой $\|g\|_{X'} = \sup\{\int |fg| \mid f \in X, \|f\|_X \leqslant 1\}$. Подробнее про решётки см., например, [11].

Для квазинормированных пространств X и Y измеримых функций на одном и том же множестве и $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ вводятся пространства

$$X \odot_N Y = \left\{ h \mid h = \sum_{j=1}^{N} f_j g_j,\ f_j \in X, g_j \in Y; \sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_X \|g_j\|_Y < \infty \right\},$$

$$\|h\|_{X \odot_N Y} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_X \|g_j\|_Y \mid h = \sum_{j=1}^{N} f_j g_j \right\}, \quad X \odot Y = X \odot_\infty Y.$$

Поскольку в основном интересующем нас случае будет лишь конечное число слагаемых, мы не отвлекаемся на обсуждение деталей этих определений. Для решёток измеримых функций пространство $X \odot_1 Y$

— это обычное поточечное произведение, которое мы будем обозначать через XY.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты. Следующие две теоремы, доказательство которых приводится ниже в §2, получаются, фактически, одним и тем же рассуждением из работы А. Л. Вольберга [9], где результат для полиномов изложен лишь в случае $X = \mathrm{L}_1$. По-видимому, не совсем очевидно, что почти такое же рассуждение работает и для всех симметричных пространств. Результаты о конечной слабой факторизации также получались с разложением в сумму четырёх слагаемых (которые в нормированном случае всегда можно вывести из разложений с бесконечным числом слагаемых; см. [1, предложение 4.1]), однако при наличии подходящих свойств мажорирования (см. предложения 5 и 6 ниже, а также [1, §7]) уменьшить их количество до трёх не составляет никакого труда.

Теорема 1. *Пусть X — перестановочно инвариантная квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{R}$ со свойством Фату, r-выпуклая при некотором $r > 0$. Тогда $\mathrm{PW}_{2a}^{X^2} = \mathrm{PW}_a^X \odot_3 \mathrm{PW}_a^X$ при $a > 0$, причём имеет место эквивалентность квазинорм с константой, зависящей лишь от r.*

Теорема 2. *Пусть X — перестановочно инвариантная квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{T}$ со свойством Фату, r-выпуклая при некотором $r > 0$. Тогда $\mathcal{P}_{2N}^{X^2} = \mathcal{P}_N^X \odot_3 \mathcal{P}_N^X$ при $N \in \mathbb{N}$, причём имеет место эквивалентность квазинорм с константой, зависящей лишь от r.*

Из теоремы 1 легко получить следующий аналог недавнего результата [5, теорема 1.2].

Следствие 3. *Пусть показатель $1 < p < \infty$ имеет вид $p = 2^m/k$ при $k, m \in \mathbb{N}$, и $a > 0$. Тогда $\mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_1}(\mathbb{R}) = \mathrm{PW}_{a/p}^{\mathrm{L}_p}(\mathbb{R}) \odot_N \mathrm{PW}_{a/p'}^{\mathrm{L}_{p'}}(\mathbb{R})$ при некотором $N \in \mathbb{N}$, зависящем только от m.*

Отметим, что рассуждение, аналогичное изложенному в [9], впоследствии также было проведено в [1, §7] для пространств Пэли–Винера и для модельных пространств K_θ^1 в случае однокомпонентной внутренней функции θ, который явно включает в себя случай полиномов, и его также можно обобщить на достаточно общие перестановочно инвариантные пространства вместо L_1, что, как и приложения к интерполяции вещественным и комплексным методом, будет уместнее сделать в отдельной работе. Однако пока неясно, можно ли в общем случае модельных пространств установить слабую факторизацию для пространств, близких к K_θ^∞.

Примечательно, что приводимое ниже доказательство теорем 1 и 2, по существу, вполне элементарно, и из него видно, что соответствующее разложение даже можно выписать в виде явной (хоть и довольно громоздкой) формулы, сомножители которой коммутируют со сдвигами, и непрерывно зависят от исходной функции, что иногда бывает очень полезно. Похожие дискретные конструкции в [1, §7] весьма наглядны и изящны, и допускают такие же обобщения на перестановочно инвариантные пространства, однако их обоснование требует несколько более тонкой работы (нужен подходящий вариант неравенства Планшереля–Полиа). Несложно таким же способом получить и векторнозначные обобщения, т.е. факторизацию

$$\mathrm{PW}_{2a}^{\mathrm{L}_{p/2}\left(l^{s/2}\right)} = \mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_p(l^s)} \odot_3 \mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_p(l^s)}$$

соответствующим образом определённых векторнозначных пространств Пэли–Винера.

Наконец, приводимое рассуждение, по-видимому, допускает интересные многомерные обобщения, частично уже сделанные в [9]. Мы укажем лишь следующее обобщение известного результата С. Фергюсон и М. Лэйси [3] (соответствующего случаю $X = \mathrm{L}_1$), получающееся тем же рассуждением что и [9, теорема 2.1]. Здесь $\mathrm{H}_X\left(\mathbb{T}^2\right)$ – это пространство типа Харди на бидиске.

Теорема 4. *Пусть X – перестановочно инвариантная квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{T}^2$ со свойством Фату, 1-вогнутая и r-выпуклая при некотором $r > 0$. Тогда имеет место непрерывное вложение $\mathrm{H}_X\left(\mathbb{T}^2\right) \subset \mathrm{H}_{X^{1/2}}\left(\mathbb{T}^2\right) \odot \mathrm{H}_{X^{1/2}}\left(\mathbb{T}^2\right)$. В частности, $\mathrm{H}_1\left(\mathbb{T}^2\right) = \mathrm{H}_2\left(\mathbb{T}^2\right) \odot \mathrm{H}_2\left(\mathbb{T}^2\right)$.*

Набросок доказательства приводится ниже в §3. Отметим, что оно кардинально отличается от результатов, основанных на оценках с коммутаторами, и, по существу, тоже конструктивно, хотя явную формулу для разложений полиномиальных функций написать здесь вряд ли получится.

Необходимо также отметить, что недавно в работе [3], а также в ряде последующих работ, был обнаружен серьёзный пробел (см. [6]), и в настоящее время вопрос о возможности подходящей характеризации сопряжённых пространств к вещественным пространствам Харди $\mathrm{H}_1(\mathbb{T}^n)$ в терминах коммутаторов остаётся открытым при $n \geqslant 2$. Тем не менее, простое следствие из результата А. Л. Вольберга [9, теорема 2.1], которым является последнее утверждение теоремы 4, даёт альтернативное доказательство слабой факторизации при $n = 2$ и соответствующего варианта теоремы Нехари.

§2. Факторизация пространств Пэли–Винера

Ключевым моментом являются следующие аналоги утверждения [9, лемма 1.2].

Предложение 5. *Пусть X – перестановочно инвариантная квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{R}^n$ со свойством Фату, r-выпуклая при некотором $r > 0$. В случае $n > 2$ дополнительно предположим, что $X = \mathrm{L}_p$, $0 < p < \infty$. Тогда для всякой функции $f \in \mathrm{PW}_a^X$ и любых $a > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ найдётся мажоранта $g \geqslant |f|$, такая, что $g \in \mathrm{PW}_{\varepsilon a}^X$ и $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ с константой C, зависящей лишь от ε и r.*

Предложение 6. *Пусть X – перестановочно инвариантная квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{T}^n$ со свойством Фату, r-выпуклая при некотором $r > 0$. В случае $n > 2$ дополнительно предположим, что $X = \mathrm{L}_p$, $0 < p < \infty$. Тогда для всяких $f \in \mathcal{P}_N^X$, $M, N \in \mathbb{N}$, $M \leqslant N$ найдётся мажоранта $g \geqslant |f|$, такая, что $g \in \mathcal{P}_M^X$ и $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ с константой C, зависящей лишь от r и M/N.*

Ограничение пространствами Лебега при $n > 2$ связано с тем, что в этом случае неизвестно, являются ли K-замкнутыми соответствующие пары с бесконечным показателем. Впрочем, также можно проверить эти утверждения для произвольных q-вогнутых перестановочно инвариантных решёток при $q < \infty$, используя результаты о двойственности и реитерации вещественных интерполяционных пространств банаховых решёток чтобы отойти от бесконечного показателя, но этим мы для простоты заниматься не будем. Все необходимые сведения об общих вещественных интерполяционных пространствах можно найти, например, в [2]. В настоящей работе применяются лишь случаи $n = 1$ предложения 5 и $n = 2$ предложения 6, однако нет никаких причин ограничивать размерность.

Доказательство предложения 6 для $X = \mathrm{L}_1$ в случае $n = 1$ приведено в [9, лемма 1.2]. Многомерный случай аналогичен одномерному и легко из него выводится в нормированном случае; см. [9, лемма 2.1.1]. Мы приведём лишь доказательство предложения 5; предложение 6 в полной общности получается тем же способом с учётом деталей из [9, лемма 1.2].

Сначала проверим случай $X = \mathrm{L}_p$, где либо $1 < p \leqslant \infty$, и тогда положим $\rho = 1$, либо $1/p$ является натуральным числом, и тогда положим $\rho = p$. Хотя можно для простоты с помощью растяжений свести всё к случаю $a = 1$, для наглядности в сравнении со случаем предложения 6 мы этого делать не будем. Пусть $f \in \mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_p}(\mathbb{R}^n)$. По теореме Шварца–Пэли–Винера функция $F(z) = e^{ia(z_1+\dots+z_n)}f(z)$ продолжается с $z \in \mathbb{R}^n$ до целой функции экспоненциального типа от $z \in \mathbb{C}^n$. Функция $\Phi(z) = e^{-i2a(z_1+\dots+z_n)}F(z)$ аналитична и ограничена в нижней полиполуплоскости $\mathbb{C}_-^n$, поэтому функция $|\Phi|^p$ плюрисубгармонична в ней, и

$$e^{-2np} \int\limits_{(\mathbb{R}-i/a)^n} |F|^p = \int\limits_{(\mathbb{R}-i/a)^n} |\Phi|^p \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F|^p,$$

откуда $\|F(\cdot - i/a)\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant e^{2n}\|F\|_{\mathrm{L}_p}$ (при $p = \infty$ эта оценка сразу получается из принципа максимума). Пусть теперь H – это плюригармоническое продолжение функции $|F(z)|^\rho$ с остова $(\mathbb{R} - i/a)^n$ в область $(\mathbb{C}_+ - i/a)^n$. Тогда из плюрисубгармоничности функции $|F|^\rho$ вытекает оценка $H(x) \geqslant |F(x)|^\rho = |f(x)|^\rho$, $x \in \mathbb{R}^n$. По лемме Гарнака для областей $\Omega = [(x - 2/a, x + 2/a) \times (-i/a, i/a)]^n$ и множеств $I = [(x - 1/a, x + 1/a) \times i\{0\}]^n$, $x \in \mathbb{R}$, отношение $\frac{\max_I H}{\min_I H}$ ограничено некоторой постоянной A, не зависящей от a и x. Поэтому для свёртки с соответствующим аналогом ядра Фейера

$$K_R(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n K_{1,R}(t_j), \quad K_{1,R}(t) = R\left(\frac{\sin(\pi t R)}{\pi t R}\right)^2, \quad R = \rho\varepsilon a,$$

имеет место оценка $K_{\rho\varepsilon a} * H(x) \geqslant b|f(x)|^\rho$, $x \in \mathbb{R}^n$, с некоторой постоянной b, не зависящей от a и x. Функция $g = (K_{\rho\varepsilon a} * H/b)^{1/\rho}$ является подходящей мажорантой, поскольку свёртка с ядрами K_R равномерно ограничена в пространствах L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Далее, чтобы обобщить это рассуждение на случай произвольных перестановочно инвариантных пространств X, заметим, что мажоранта g получается в виде некоторого квазисублинейного оператора T от f. А именно, $g = Tf = ([K_{\rho\varepsilon a} * P_a] * |F|^\rho/b)^{1/\rho}$, где P_a – свёртка с соответствующим ядром Пуассона (по каждой переменной). Решётка X^r банахова, поэтому решётка $Y = (X^{r/2})'$ 2-вогнута, откуда следует порядковая непрерывность её нормы (см., например, [8, предложение 9]), а значит, и соотношение $X^{r/2} = Y' = Y^*$. По [12, лемма 11 и теорема 3] пространство $X^{r/2}$ является интерполяционным для пары Кальдерона $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$ (строго говоря, результаты статьи [12] получены в случае измеримых пространств с мерой Лебега на отрезке, однако легко распространить их на всю прямую, рассматривая сужения на отрезки и переходя к пределу в ограниченности интерполируемого оператора с помощью условия Фату). Поэтому оно является вещественным интерполяционным пространством $K_\Phi(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$ для некоторой нормированной решётки измеримых функций Φ на $\mathbb{R}_+$, откуда

$$X = [K_\Phi(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)]^{2/r} = K_{\Phi^{2/r}}(\mathrm{L}_{r/2}, \mathrm{L}_\infty).$$

Уменьшая r, можно считать, что $2/r \in \mathbb{N}$. Положим $\rho = r/2$. Теперь, чтобы проверить ограниченность оператора T в пространстве PW_a^X в случае $n \leqslant 2$, достаточно воспользоваться K-замкнутостью пары $(\mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_{r/2}}, \mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_q})$ в паре $(\mathrm{L}_{r/2}, \mathrm{L}_q)$ при $q = \infty$, которая следует из результатов работы [13]. При $1 < q < \infty$ она также получается из K-замкнутости пар пространств Харди в полиполуплоскости с использованием подходящего обобщения [13, предложение 17], что позволяет в случае $n > 2$ получить с помощью обычной вещественной интерполяции ограниченность оператора T также в пространствах $\mathrm{PW}^{\mathrm{L}_p}$ при $p < 1$ и нецелых $1/p$.

Теоремы 1 и 2 легко выводятся из предложений 5 и 6. Действительно, для функции f из соответствующего пространства можно найти мажоранты $g_1 \geqslant |\mathrm{Re}\ f|$, $g_2 \geqslant |\mathrm{Im}\ f|$. Положим $g = g_1 + g_2$, $h_1 = g - \mathrm{Re}\ f \geqslant 0$, $h_2 = g - \mathrm{Im}\ f \geqslant 0$. Тогда $f = (1+i)g - h_1 - ih_2$. Факторизация положительных функций g, h_1 и h_2 в случае полиномов теперь сразу получается из теоремы Рисса–Фейера, а в случае пространств Пэли–Винера – из результатов К. М. Дьяконова [10, теорема 5]: если G – внешняя функция с модулем $g^{1/2}$, то $g = |G|^2$ и функция $e^{i2ax}\bar{G} = e^{i2ax}g/G$ аналитична в верхней полуплоскости, откуда следует, что $H = e^{iax}\bar{G} \in \mathrm{PW}_a^X$ и $g = |H|^2 = \bar{H}H$ является подходящим разложением. Другой естественный способ опирается на теорию целых функций: достаточно взять в качестве G каноническое произведение, построенное по нулям g в верхней полуплоскости, и тогда $g = GG^*$, где G^* – отражённая функция G. При этом сомножители в разложении первого слагаемого $(1+i)g$ даже можно брать из пространства $\mathrm{PW}_{\varepsilon a}^X$ с произвольными $0 < \varepsilon \leqslant 1$, однако константа растёт при уменьшении ε.

Отметим, что метод Ж. Пизье [7, предложение 1.2] (см. также [4, §2.4]), устанавливающий K-замнутость пар пространств Харди на окружности при помощи факторизации, нетрудно применить также и к ситуации, когда имеется слабая факторизация с фиксированным числом слагаемых, что при $n = 1$ даёт простое доказательство используемой выше K-замкнутости пары $(\mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_{r/2}}, \mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_q})$ в паре $(\mathrm{L}_{r/2}, \mathrm{L}_q)$ при $q < \infty$, не использующее никаких нетривиальных результатов о K-замкнутости пространств Харди. Соответствующее рассуждение целесообразнее будет изложить в другой работе.

Для проверки следствия 3 достаточно проделать следующую процедуру. На первом шаге берём исходную функцию $f_0 = f \in \mathrm{PW}_a^{\mathrm{L}_1}$. Далее, на j-м шаге в разложении $f_{j-1} = \sum_{l=1}^{N_{j-1}} \prod_{s=1}^{2^{j-1}} f_{l,s}$ каждую функцию $f_{l,s} \in \mathrm{PW}_{a/2^{j-1}}^{\mathrm{L}_{2^{j-1}}}$ при помощи теоремы 1 раскладываем в сумму трёх функций из $\mathrm{PW}_{a/2^j}^{\mathrm{L}_{2^j}}$ и раскрываем скобки. После m-го шага остаётся только сгруппировать по k и $2^m - k$ сомножителей в каждом слагаемом.

§3. Факторизация пространств Харди на бидиске

Для проверки теоремы 4 достаточно получить следующее обобщение утверждения [9, теорема 2.1]. Здесь через $\mathcal{PA}_N^X$ обозначается класс полиномов от двух переменных, индексы ненулевых коэффициентов которых лежат в множестве $[0, N]^2$.

Предложение 7. *Пусть X – перестановочно инвариантная квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{T}^2$ со свойством Фату, 1-вогнутая и r-выпуклая при некотором $r > 0$. Тогда*

$$z_2^N \mathcal{PA}_N^X \subset \mathcal{PA}_N^{X^{1/2}} \odot \mathcal{PA}_N^{X^{1/2}}$$

с равномерной по $N \in \mathbb{N}$ нормой вложения.

Мы упомянем лишь изменения, которые нужно внести в довольно сложную конструкцию из [9, §2]. Вначале, как и в теореме 2, ищется разложение заданного аналитического полинома $Q \in \mathcal{P}_N^X$ в линейную комбинацию четырёх положительных слагаемых при помощи предложения 6. Везде, где оцениваются свёртки с ядрами Фейера и другие мультипликаторы со стандартными условиями роста, являющиеся поэтому операторами Кальдерона–Зигмунда, соответствующие оценки по норме X получаются интерполяцией между подходящими (одномерными) пространствами Харди. Наконец, оценки вида [9, (2.16)] следуют из 2-вогнутости решётки $X^{1/2}$:

$$\left(\sum_m \|F^{(m)}\|^2_{X^{1/2}}\right)^{1/2} \leqslant \left\| \left(\sum_m |F^{(m)}|^2\right)^{1/2} \right\|_{X^{1/2}} = \left\| \sum_m |F^{(m)}|^2 \right\|_X^{1/2} = \|p_l\|_X^{1/2}.$$

Умножая соотношение в предложении 7 на z_2^{-2N}, получаем

$$z_2^{-N}\mathcal{PA}_N^X \subset z_2^{-N}\mathcal{PA}_N^{X^{1/2}} \odot z_2^{-N}\mathcal{PA}_N^{X^{1/2}}.$$

Отражение коэффициентов полиномов относительно оси z_1, т. е. отображение $P(z_1, z_2) \mapsto P(z_1, \bar{z}_2)$, даёт следующее более естественное утверждение.

Предложение 8. *В условиях предложения* 7 *справедливо включение* $\mathcal{PA}_N^X \subset \mathcal{PA}_N^{X^{1/2}} \odot \mathcal{PA}_N^{X^{1/2}}$ *с равномерной по* $N \in \mathbb{N}$ *нормой вложения.*

Отсюда искомую факторизацию функции $f \in \mathrm{H}_X(\mathbb{T}^2)$ легко получить, приближая её достаточно быстро сходящимся рядом $f = \sum_j f_j$, $\|f_j\|_X \leqslant 2\|f\|_X (2C)^{-j}$, $j \geqslant 0$, из полиномов $f_j \in \mathcal{PA}_{N_j}^X$ (например, свёрток остатков частичных сумм с ядрами Фейера по каждой переменной), где C – константа в неравенстве треугольника решётки X.

Благодарности. Автор признателен рецензенту за ценные указания и П. А. Мозоляко, обратившего внимание автора на статью [6].

Список литературы

1. A. Baranov, R. Bessonov, V. Kapustin, *Symbols of truncated Toeplitz operators.* — J. Funct. Anal. **261**, No. 12 (2011), 3437–3456.

2. Y. Brudnyi, N. Kruglyak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1991.
3. S. Ferguson, M. Lacey, *A characterization of product BMO by commutators.* — Acta Math. **189** (2002), 143–160.
4. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
5. P. Kulikov, *Bounded symbols of Toeplitz operators on Paley-Wiener spaces and a weak factorization theorem.* — `arXiv:2510.01374.`
6. M. T. Lacey, S. Petermichl, J. C. Pipher, B. D. Wick, *Notification of error: Multiparameter Riesz commutators.* — Amer. J. Math. **143**, No. 2 (2021).
7. G. Pisier, *Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations.* I. — Pacific J. Math. **155** (1992), 341–368.
8. D. V. Rutsky, *Corona problem with data in ideal spaces of sequences.* — Archiv der Mathematik **108**, No. 6 (2017), 609–619.
9. A. Volberg, *Factorization of polynomials with estimates of norms.* — Operator Theory: Advances and Applications **149** (2004), 569–585.
10. К. М. Дьяконов, *Модули и аргументы аналитических функций из подпространств в H^p, инвариантных для оператора обратного сдвига.* — Сиб. матем. журн. **31** (1990), 64–79.
11. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* Невский Диалект; БХВ-Петербург, 4-е изд., 2004.
12. Б. С. Митягин, *Интерполяционная теорема для модулярных пространств.* — Матем. сб. **66**, No. 108 (1965), 473–482.
13. Д. В. Руцкий, *Варианты метода Бургейна для проверки* K*-замкнутости некоторых подпар.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **527** (2023), 155–182

Rutsky D. V. Weak factorization of Paley–Wiener spaces.

In the recent paper [5] by P. A. Kulikov, a weak factorization of the Paley–Wiener space PW^1_{2a} into a sum of products $\mathrm{PW}^p_a \cdot \mathrm{PW}^q_a$ was established for $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, by using a certain operator technique. In the present paper, it is shown that a method from A. L. Volberg's paper [9] allows one to decompose PW^1_{2a} into a finite sum of products $\mathrm{PW}^p_{2a/p} \cdot \mathrm{PW}^q_{2a/q}$ for suitable rational exponents. Moreover, the same method yields a weak factorization of the Paley–Wiener spaces $\mathrm{PW}^{X^2}_{2a}$ into a sum of three terms $\mathrm{PW}^X_a \cdot \mathrm{PW}^X_a$ for arbitrary rearrangement invariant lattices of measurable functions X having the Fatou property and r-convex with some $r > 0$, together with similar results for spaces of polynomials on the circle.

In the case of the Hardy spaces on the bidisk, another weak factorization result of A. L. Volberg from the same paper admits a generalization to

Hardy-type spaces for 1-concave rearrangement invariant lattices. In particular, this partially generalizes a notable weak factorization result of S. Ferguson and M. Lacey for the space $\mathrm{H}_1\left(\mathbb{T}^2\right)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27,
191023, Санкт-Петербург
Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 27 ноября 2025 г.