Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 545, 2025 г.

А. Н. Медведев, Н. А. Широков

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим область $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, ограниченную достаточно гладкой кривой Γ. Точнее, подразумеваем, что $\Gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\Gamma' \in C([a,b])$, $\Gamma'(a) = \Gamma'(b)$, а также существуют постоянные δ_0, c_0, $\delta_1{>}0$ такие, что выполнены условия: $|\Gamma'(t)| \geqslant \delta_0$, $|\arg\Gamma'(t+s) - \arg\Gamma'(t)| \leqslant c_0 s^{\delta_1}$ для всех $t \in [a,b]$, $s > 0$. Обозначим через $\Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$ при $0 < \alpha < 1$ пространство Гёльдера функций f, аналитичных в $\mathcal{D}$ и удовлетворяющих условию $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant c_f |z_1 - z_2|^\alpha$ по всем $z_1, z_2 \in \overline{\mathcal{D}}$.

Достаточно давно известно [1, 2], что для функции $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$ при любом $n \in \mathbb{N}$ существует полином P_n, степени не выше n, такой, что $|f(z) - P_n(z)| \leqslant \widetilde{c}_f n^{-\alpha}$, $z \in \Gamma$.

Кроме того, согласно статье [3], функция $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$ может быть разложена в произведение внешней и внутренней в $\mathcal{D}$ функций, $f(z) = F(z)I(z)$, $z \in \overline{\mathcal{D}}$, где функция F задается значениями $|f|$ на Γ, а $|I(z)|{=}1$ п.в. по длине Γ при $z \in \Gamma$. Оказывается, что мультипликативная структура функции $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$ может быть отражена в структуре приближающего полинома P_n. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$, $f = F \cdot I$, где I – внутренняя, а F – внешняя функции в $\mathcal{D}$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ существуют полиномы P_n, q_n степени не выше n со следующими свойствами:*

(1) *найдутся постоянные $c_{f,1}$ и $c_{f,2}$ такие, что при $z \in \partial\mathcal{D}$ справедливы соотношения*

$$|f(z) - P_n(z)q_n(z)| \leqslant c_{f,1} \cdot n^{-\alpha}, \quad |F(z) - P_n(z)| \leqslant c_{f,2} \cdot n^{-\alpha}, \tag{1}$$

(2) *существует постоянная $c_{\mathcal{D}}$ такая, что для всякого $z \in \mathcal{D}$ выполняется оценка*

$$|q_n(z)| \leqslant c_{\mathcal{D}}, \tag{2}$$

Ключевые слова: полиномы, аппроксимация, классы Гёльдера, области с гладкой границей.

Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-11-00171, https://rsef.ru/project/23-11-00171/.

(3) *и при* $z \in \mathcal{D}$ *имеет место соотношение*

$$q_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} I(z). \tag{3}$$

§1. Приближающие полиномы.

Рассмотрим конформное отображение φ области $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{D}}$ на $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ такое, что $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$. Пусть ψ – обратное к φ отображение. Для $n \in \mathbb{N}$, $R = 1 + \dfrac{1}{n}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\xi \in \Gamma$ положим

$$\xi_{R,\theta} = \psi(Re^{-i\theta}\varphi(\xi)).$$

Обозначим

$$K_n(\theta) = \left(\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{18}, \quad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Выберем b_n из соотношения

$$b_n \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta = 1.$$

При $z \in \mathcal{D}$ полагаем

$$P_n(z) = \frac{b_n}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int\limits_{\Gamma} F(\xi)\left(\frac{1}{\xi_{R,\theta} - z} + \frac{\xi_{R,\theta} - \xi}{(\xi_{R,\theta} - z)^2}\right)d\xi\right)d\theta, \tag{4}$$

$$q_n(z) = \frac{b_n}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int\limits_{\Gamma} I(\xi)\left(\frac{1}{\xi_{R,\theta} - z} + \frac{\xi_{R,\theta} - \xi}{(\xi_{R,\theta} - z)^2}\right)d\xi\right)d\theta. \tag{5}$$

Введенные по этим формулам функции P_n и q_n являются полиномами степени не выше n (см. [2]).

Учитывая выбор постоянных b_n, получаем следующую форму для остатка $F(z) - P_n(z)$:

$$\begin{aligned}
&F(z) - P_n(z) \\
&= \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_\Gamma F(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi_{R,\theta} - z} - \frac{\xi_{R,\theta} - \xi}{(\xi_{R,\theta} - z)^2}\right) d\xi\right) d\theta \\
&= \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_\Gamma F(\xi)\frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} d\xi\right) d\theta;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&F(z) - P_n(z) \\
&= \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_\Gamma F(\xi)\frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} d\xi\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$I(z) - q_n(z) = \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_\Gamma I(\xi)\frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} d\xi\right) d\theta. \tag{7}$$

Функция $\xi_{R,\theta}$ аналитична по ξ в $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$, поэтому для всякой окружности $S_\rho = \{\xi \mid |\xi| = \rho\}$, содержащей $\overline{\mathcal{D}}$ внутри, получаем равенство

$$\int_\Gamma \frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} d\xi = \int_{S_\rho} \frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} d\xi. \tag{8}$$

При $\xi \to \infty$ имеем соотношение

$$\frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} = \frac{(Re^{-i\theta} - 1)^2}{(Re^{-i\theta})^2\xi} + \frac{c_1 z}{\xi^2} + \dots \tag{9}$$

Отсюда получаем формулу

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_\Gamma \frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z)^2(\xi - z)} d\xi\right) d\theta \\
&= b_n \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(1 - \frac{1}{R}e^{i\theta}\right)^2 d\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Соотношение (10) дает оценку

$$|\mu_n| \leqslant \frac{c}{n^2}. \tag{11}$$

Рассмотрим $z \in \mathcal{D}$ и пусть $z \to z_0 \in \Gamma$. Поскольку $F \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$, согласно статье [3] из равенств (6), (10) получаем соотношение

$$F(z_0) - P_n(z_0) - \mu_n F(z_0)$$
$$= \frac{b_n}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int\limits_{\Gamma}(F(\xi) - F(z_0))\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^2}{(\xi_{R,\theta}-z_0)^2(\xi - z_0)}d\xi\right)d\theta. \tag{12}$$

§2. Доказательство соотношений (2) и (3) основной теоремы.

Далее будем использовать следующее утверждение (см [4, 5]) доказанное для любого континуума $\mathcal{D}$.

Лемма. *В рамках изложенной постановки, существует универсальная постоянная c_0, для которой при любых $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \Gamma$ и $z_0 \in \Gamma$ справедливы оценки*

$$|\xi_{R,\theta} - \xi| \leqslant c_0(n|\theta| + 1)^4|\xi_{R,0} - \xi|, \tag{13}$$

$$|\xi_{R,\theta} - z_0| \geqslant \frac{1}{c_0}(n|\theta| + 1)^{-4}|\xi_{R,0} - z_0|. \tag{14}$$

Докажем вначале соотношение (3). Пусть $z \in \mathcal{D}$, $\operatorname{dist}(z, \Gamma) = \delta > 0$, $z_0 \in \Gamma$, $|z - z_0| = \delta$. Тогда $|\xi_{R,\theta} - z| \geqslant \delta$, $|\xi - z| \geqslant \delta$ при $\xi \in \Gamma$, и из соотношений (7) и (13), учитывая что $|I(z)| \leqslant 1$, получаем неравенство

$$|I(z) - q_n(z)| \leqslant \frac{c}{\delta^3} b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)(n|\theta| + 1)^4 \frac{1}{n} d\theta \leqslant \frac{c}{\delta^3}\frac{1}{n}. \tag{15}$$

При выводе оценки (15) мы также учли выбор величин b_n и то, что для области $\mathcal{D}$ с условиями, наложенными на границу Γ, выполняется соотношение $|\xi_{R,0} - \xi| \leqslant \dfrac{c}{n}$ (см. [2]). Неравенство (15) влечет (3).

Докажем соотношение (2). Будем его доказывать при $n \geqslant N_0$, где N_0 выберем исходя из геометрических свойств области $\mathcal{D}$. Неравенство (2) при $n < N_0$ выполнится за счет увеличения постоянной $c_{\mathcal{D}}$.

Пусть $z_0 \in \Gamma$, а точка z лежит в $\mathcal{D}$ и достаточно близка к z_0. Положим $S_{\delta_0}(z_0) = \{\xi \mid |\xi - z_0| = \delta_0\}$. Условия, наложенные на границу Γ, влекут, что существует δ_0, не зависящее от $z_0 \in \Gamma$ и такое, что множество $S_{\delta_0}(z_0) \cap \mathcal{D}$ состоит из одной дуги. Выберем такое δ_0. Кроме того, при любом δ_1, $0 < \delta_1 < \delta_0$, и любом $z_0 \in \Gamma$ множество $S_{\delta_1}(z_0) \cap \mathcal{D}$

также будет состоять из одной дуги. Положим $N_0 = \left[\frac{1}{\delta_0}\right] + 1$. Тогда при любом $n \geqslant N_0$ и любом $z_0 \in \Gamma$ множество $S_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap \mathcal{D}$ состоит из одной дуги. Положим $\widehat{\gamma}_n(z_0) = \overline{S_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap \mathcal{D}}$; пусть $\gamma_n(z_0) \subset \Gamma$ – меньшая дуга с концами $S_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap \partial\mathcal{D}$, $\Gamma_n(z_0) = \Gamma \backslash \gamma_n(z_0)$. Далее для сокращения записи будем использовать обозначения $\widehat{\gamma}_n = \widehat{\gamma}_n(z_0)$, $\gamma_n = \gamma_n(z_0)$, $\Gamma_n = \Gamma_n(z_0)$.

Пусть $n \geqslant N_0$, $z \in \mathcal{D}$, $z_0 \in \Gamma$, $|z - z_0| \leqslant \frac{1}{2n}$. Тогда из соотношений (5) и (7) получаем равенство

$$\begin{aligned}
&I(z) - q_n(z) \\
&= \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_{\Gamma_n} I(\xi)\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^2}{(\xi_{R,\theta}-z)^2(\xi-z)}d\xi\right)d\theta \\
&+ \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_{\gamma_n} I(\xi)\left(\frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi_{R,\theta}-z} - \frac{\xi_{R,\theta}-\xi}{(\xi_{R,\theta}-z)^2}\right)d\xi\right)d\theta \\
&= \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_{\Gamma_n} I(\xi)\frac{(\xi_{R,\theta}-\xi)^2}{(\xi_{R,\theta}-z)^2(\xi-z)}d\xi\right)d\theta \qquad (16)\\
&+ \frac{b_n}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(2\pi i I(z) - \int_{\widehat{\gamma}_n}\frac{I(\xi)}{\xi-z}d\xi - \int_{\gamma_n} I(\xi)\left(\frac{1}{\xi_{R,\theta}-z} + \frac{\xi_{R,\theta}-\xi}{(\xi_{R,\theta}-z)^2}\right)d\xi\right)d\theta.
\end{aligned}$$

При $\xi \in \widehat{\gamma}_n$, $|z - z_0| \leqslant \frac{1}{2n}$, имеем $|\xi - z| \geqslant \frac{1}{2n}$, поэтому

$$\left|-\int_{\widehat{\gamma}_n}\frac{I(\xi)}{\xi-z}d\xi\right| \leqslant 2n\int_{\widehat{\gamma}_n}|d\xi| \leqslant 4\pi. \qquad (17)$$

Тогда формулы (16) и (17) влекут оценку

$$\begin{aligned}
|-q_n(z)| \leqslant 2 &+ \frac{b_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_{\gamma_n}\frac{|I(\xi)|}{|\xi_{R,\theta}-z|}|d\xi|\right)d\theta \\
&+ \frac{b_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int_{\gamma_n}\frac{|I(\xi)||\xi_{R,\theta}-\xi|}{|\xi_{R,\theta}-z|^2}|d\xi|\right)d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{b_n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\Bigg(\int\limits_{\Gamma_n}\frac{|I(\xi)||\xi_{R,\theta}-\xi|^2}{|\xi_{R,\theta}-z|^2|\xi-z|}|d\xi|\Bigg)d\theta\\
&\leqslant 2+\frac{b_n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\Bigg(\int\limits_{\gamma_n}\frac{|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-z|}\Bigg)d\theta\\
&+\frac{b_n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\Bigg(\int\limits_{\gamma_n}\frac{|\xi_{R,\theta}-\xi|}{|\xi_{R,\theta}-z|^2}|d\xi|\Bigg)d\theta\\
&+\frac{b_n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\Bigg(\int\limits_{\Gamma_n}\frac{|\xi_{R,\theta}-\xi|^2}{|\xi_{R,\theta}-z|^2|\xi-z|}|d\xi|\Bigg)d\theta.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Предполагаем, что z настолько близко к z_0, что справедливо неравенство

$$
|\xi_{R,\theta}-z|\geqslant\frac{1}{2}|\xi_{R,\theta}-z_0|,\xi\in\Gamma,\theta\in(-\pi,\pi]. \tag{19}
$$

Такую близость z к z_0 можно предполагать в силу того, что при $z\in\mathcal{D}$, $z_0\in\Gamma$, $\theta\in(-\pi,\pi]$, согласно свойствам гладкости границы Γ, имеем оценки

$$
|\xi_{R,\theta}-z|\geqslant\frac{c}{n},\ |\xi_{R,\theta}-z_0|\geqslant\frac{c}{n}.
$$

Лемма и соотношение (19) влекут неравенства

$$
\begin{aligned}
&b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{K_n(\theta)}{|\xi_{R,\theta}-z|}d\theta\\
&\qquad\leqslant c\frac{1}{|\xi_{R,0}-z_0|}b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)(1+n|\theta|)^4d\theta\leqslant c\frac{1}{|\xi_{R,0}-z_0|}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для последнего слагаемого в (18) получаем оценку

$$
\begin{aligned}
b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\frac{|\xi_{R,\theta}-\xi|^2}{|\xi_{R,\theta}-z|^2}d\theta&\leqslant c\frac{|\xi_{R,0}-\xi|^2}{|\xi_{R,0}-z_0|^2}b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)(1+n|\theta|)^{16}d\theta\\
&\leqslant c\frac{|\xi_{R,0}-\xi|^2}{|\xi_{R,0}-z_0|^2}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Аналогично, для последнего слагаемого в (18) получаем оценку выражением

$$c\frac{|\xi_{R,0}-\xi|}{|\xi_{R,0}-z_0|^2}.$$

Как следует из результатов статьи [2], для кривой Γ с предполагаемой гладкостью имеются оценки

$$|\xi_{R,0}-\xi|\leqslant\frac{c}{n},\ |\xi_{R,0}-z_0|\geqslant\frac{c}{n},$$

а при $\xi\in\Gamma_n$ имеем $|\xi_{R,0}-z_0|\asymp|\xi-z_0|$. Применяя соотношения (20), (21) и приведенные неравенства, из неравенства (18) получаем оценку

$$|q_n(z)|\leqslant 2+cn\int\limits_{\gamma_n}|d\xi|+c\frac{1}{n}n^2\int\limits_{\gamma_n}|d\xi|+\frac{1}{n^2}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{|d\xi|}{|\xi-z_0|^3}\leqslant c. \tag{22}$$

Устремляя в (22) z к z_0, $z_0\in\Gamma$, получаем оценку (2).

§3. Свойства факторизации $f = IF$.

Пусть $A\in\mathcal{D}$ – произвольная фиксированная точка, функция Φ конформно отображает область $\mathcal{D}$ на $\mathbb{D}$ так, что $\Phi(A)=0$, $\Phi'(A)>0$, Ψ – обратное отображение. Положим $J(\xi)=I(\Psi(\xi))$. Тогда J – внутренняя функция в единичном круге $\mathbb{D}$. Пусть $U(\xi)=F(\Psi(\xi))$. Тогда U – внешняя функция в $\mathbb{D}$. Предполагаем, что $U(0)=F(A)>0$. Тогда для функции J справедливо разложение $J(\xi)=\lambda B(\xi)S(\xi)$, где $|\lambda|=1$,

$$B(\xi)=\prod_{\alpha:\ J(\alpha)=0}\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}\frac{\alpha-\xi}{1-\overline{\alpha}\xi},\quad S(\xi)=\exp\left(\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\xi+t}{\xi-t}d\mu(t)\right),$$

μ – сингулярная мера на $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$. Определим $\operatorname{supp}_s I=\Psi(\operatorname{supp}\mu)$, $Z(f)=\{z\in\mathbb{D}\mid f(z)=0\}$, $\operatorname{supp}_i I=\operatorname{supp}_s I\cup\operatorname{clos}Z(f)$.

Если $f\in\Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$, то, как получено в [3], $\operatorname{mes}_1(\operatorname{supp}_i I\cap\Gamma)=0$, где mes_1 – одномерная мера Лебега на кривой Γ. Пусть $d(z)=\operatorname{dist}(z,\operatorname{supp}_i I)$. Для $z\in\Gamma$ положим

$$a(z)=\max\left(\frac{1}{d(z)},|I'(z)|\right). \tag{23}$$

Проводя рассуждения в [3] для области $\mathcal{D}$, ограниченной кривой Γ с рассматриваемыми требованиями гладкости, для $0<\alpha<1$, а не для $0<\alpha<1/2$, как это было в [3], и для $z\in\Gamma$, получаем следующее утверждение.

Теорема (A). *Пусть $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$, $f \not\equiv 0$, $0 < \alpha < 1$, $f = IF$, $F(A) > 0$, I – внутренняя функция в $\mathcal{D}$, F – внешняя функция в $\mathcal{D}$, величина $a(z)$ определена в* (23). *Тогда при $z \in \Gamma$ с некоторой постоянной $c_{f,3}$ справедлива оценка*

$$|f(z)| \leqslant c_{f,3}(a(z))^{-\alpha}, \quad z \in \Gamma. \tag{24}$$

Пусть

$$Z(J) = \Phi(Z(f)), \quad \mathrm{supp}_i J = \mathrm{supp}\mu \cup \mathrm{clos} Z(J), \quad d_{\mathbb{D}}(\xi) = \mathrm{dist}(\xi, \mathrm{supp}_i J).$$

Для $\xi \in \mathbb{T}$ справедлива формула

$$|J'(\xi)| = |(BS)'(\xi)| = \sum_{\alpha : J(\alpha)=0} \frac{1-|\alpha|^2}{|\xi-\alpha|^2} + 2\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(t)}{|\xi - t|^2}. \tag{25}$$

Из равенства (25) следует, что при $\xi_1 \in \mathbb{T}$, $|\xi_1 - \xi| \leqslant \frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(\xi)$ справедлива оценка $|J'(\xi_1)| \leqslant 4|J'(\xi)|$. Пусть $c_1 = \max\limits_{z \in \overline{\mathcal{D}}} |\Phi'(z)|$. Тогда, учитывая равенство $J'(\xi) = I'(\Psi(\xi))\Psi'(\xi)$ и то, что для $\Phi'(z)$ имеет место оценка $|\Phi'(z)| \geqslant c_2 > 0$ при $z \in \overline{\mathcal{D}}$, для точек $z_1, z \in \Gamma$ таких, что $d(z_1) \leqslant \dfrac{1}{2(c_1+1)} d(z)$, с постоянной c_3 выполняется неравенство

$$|I'(z_1)| \leqslant c_3 |I'(z)|. \tag{26}$$

§4. Доказательство оценок (1)

Пусть $z_0 \in \Gamma$. Так как $F \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$ (см. [3]), то, применяя равенство (12) и оценки (13) и (14) из леммы, получаем соотношение

$$\begin{aligned} &|F(z_0) - P_n(z_0) - \mu_n F(z_0)| \\ &\quad \leqslant \frac{b_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) \left(\int_{\Gamma} \frac{|F(\xi) - F(z_0)|}{|\xi - z_0|} \frac{|\xi_{R,0} - \xi|^2}{|\xi_{R,0} - z_0|^2} |d\xi| \right) (1 + n|\theta|)^{16} d\theta \\ &\qquad \leqslant c \int_{\Gamma} |\xi - z_0|^{\alpha - 1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + |\xi - z_0|\right)^2} |d\xi| \leqslant \frac{c}{n^\alpha}. \end{aligned} \tag{27}$$

В оценках (27) мы воспользовались тем, что для области $\mathcal{D}$ выполняется соотношения $|\xi_{R,0} - \xi| \asymp \frac{1}{n}$, $|\xi_{R,\theta} - z_0| \asymp |\xi - z_0| + \frac{1}{n}$ (см. [2]), и стандартной оценкой сингулярного интеграла по Γ. Учитывая формулу (11), из (27) получаем оценку

$$|F(z_0) - P_n(z_0)| \leqslant \frac{c}{n^\alpha},$$

это вторая оценка в (1). Далее,

$$\begin{aligned} &|f(z_0) - P_n(z_0)q_n(z_0)| \\ &\qquad = |(F(z_0) - P_n(z_0))q_n(z_0) + F(z_0)(I(z_0) - q_n(z_0))| \\ &\qquad \leqslant |F(z_0) - P_n(z_0)||q_n(z_0)| + |F(z_0)||I(z_0) - q_n(z_0)| \\ &\qquad \leqslant c\frac{1}{n^\alpha} + |F(z_0)||I(z_0) - q_n(z_0)|. \end{aligned} \tag{28}$$

В соотношениях (28) мы воспользовались оценкой (2) и уже доказанной второй оценкой в (1). Пусть $d(z_0) > 0$. Тогда для выражения $I(z_0) - q_n(z_0) - \mu_n I(z_0)$ можно применить формулу, аналогичную соотношениям (12), получаем равенство

$$\begin{aligned} &I(z_0) - q_n(z_0) - \mu_n I(z_0) \\ &\qquad = \frac{b_n}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\left(\int\limits_{\Gamma}(I(\xi) - I(z_0))\frac{(\xi_{R,\theta} - \xi)^2}{(\xi_{R,\theta} - z_0)^2(\xi - z_0)}d\xi\right)d\theta. \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим два случая. Пусть $n < 4(c_1 + 1)a(z_0)$. Тогда соотношения (24), (3) и (28) влекут оценку

$$|f(z_0) - P_n(z_0)q_n(z_0)| \leqslant \frac{c}{n^\alpha} + ca^{-\alpha}(z_0) \leqslant \frac{c}{n^{-\alpha}}. \tag{30}$$

Для случая $n \geqslant 4(c_1 + 1)a(z_0)$ рассмотрим

$$\begin{aligned} &\gamma_n = \left\{z \in \Gamma \ : \ |z - z_0| \leqslant \frac{1}{n}\right\}, \\ &\gamma_a = \left\{z \in \Gamma \ : \ \frac{1}{n} < |z - z_0| \leqslant \frac{1}{2(c_1 + 1)a(z_0)}\right\}, \ \Gamma_a = \Gamma\backslash\gamma_a. \end{aligned}$$

Из соотношения (26) следует, что при $z \in \gamma_n \cup \gamma_a$ выполняется неравенство

$$|I'(z)| \leqslant c_3|I'(z_0)| \leqslant c_3 a(z_0). \tag{31}$$

Применяя равенство (29) и оценки (13), (14) и (31), получаем соотношение

$$
\begin{aligned}
&|I(z_0) - q_n(z_0) - \mu_n I(z_0)| \\
&\leqslant \frac{b_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) \left(\int_{\Gamma} \frac{|I(\xi) - I(z_0)|}{|\xi - z_0|} \frac{|\xi_{R,0} - \xi|^2}{|\xi_{R,0} - z_0|^2} |d\xi| \right) (1 + n|\theta|)^{16} d\theta \\
&\leqslant c \int_{\gamma_n} \frac{|I(\xi) - I(z_0)|}{|\xi - z_0|} |d\xi| + c \int_{\gamma_a} \frac{|I(\xi) - I(z_0)|}{|\xi - z_0|} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + |\xi - z_0|\right)^2} |d\xi| \qquad (32) \\
&\quad + c \int_{\Gamma_a} \frac{|I(\xi) - I(z_0)|}{|\xi - z_0|} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + |\xi - z_0|\right)^2} |d\xi| \\
&\leqslant c \frac{1}{n} a(z_0) + c \frac{1}{n} a(z_0) + c \frac{1}{n^2} a^2(z_0) \leqslant c \frac{a(z_0)}{n}.
\end{aligned}
$$

В оценках (32) мы воспользовались соотношением (31), поскольку при $\xi \in \gamma_a \cup \gamma_n$ имеем

$$
|I(\xi) - I(z_0)| = \left| \int_{z_0}^{\xi} I'(s) ds \right| \leqslant c_3 |\overset{\frown}{\xi, z_0}| a(z_0) \leqslant c_4 a(z_0) |\xi - z_0|,
$$

где $|\overset{\frown}{\xi, z_0}|$ – длина дуги Γ между ξ и z_0, и тем, что

$$
\int_{\Gamma_a} \frac{1}{n^2} \frac{1}{|\xi - z_0|^2} |d\xi| \leqslant \frac{c}{n}, \quad \int_{\Gamma_a} \frac{1}{n^2} \frac{1}{|\xi - z_0|^3} |d\xi| \leqslant \frac{c}{n^2} a^2(z_0).
$$

Применяя к оценке (32) соотношение (24), получаем неравенство

$$
|F(z_0)||I(z_0) - q_n(z_0)| \leqslant c(a(z_0))^{-\alpha} \frac{a(z_0)}{n} \leqslant \frac{c}{n^\alpha} \qquad (33)
$$

в силу рассматриваемого случая. Из оценок (33), (30) получаем первое неравенство в соотношении (1). Теорема доказана.

Список литературы

1. В. К. Дзядык, *О приближении аналитических функций в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей.* — Третья летняя математическая школа, “Наукова думка”, Киев, (1965), 29–82.
2. Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами.* — Докл. АН СССР, **205**, No. 4 (1972), 798–800.

3. Н. А. Широков, *Классы Гёльдера в областях Лаврентьева.* — Исследования по линейным операторам и теории функций. 29, Зап. научн. семин. ПОМИ, **282**, (2001), 256–275.
4. В. И. Белый, В. М. Миклюков, *Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций.* — Изв. АН СССР. Сер. матем., **38**, No. 6 (1974), 1343–1361.
5. В. И. Белый, *Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей* — Матем. сб., **102(144)**, No. 3 (1977), 331–361.

Medvedev A. N., Shirokov N. A. Multiplicative polynomial approximation.

Let $\mathcal{D}$ be a bounded domain on the complex plain $\mathbb{C}$ with sufficiently smooth boundary. We denote by $\Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$, $0 < \alpha < 1$, the class of analytic functions in $\mathcal{D}$ satisfying the α-Hölder condition in $\overline{\mathcal{D}}$.

Each function $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$ can be factored as $f = FI$ with F an outer function defined in terms of the boundary values of $|f|$, and with I an inner function such that $|I(z)| = 1$ a.e. in $\partial\mathcal{D}$.

The following result was obtained.

Theorem. *Let $f \in \Lambda^\alpha(\overline{\mathcal{D}})$, $f = F \cdot I$. Then for every $n \in \mathbb{N}$ there exist polynomials P_n, q_n of degrees at most n such that the following properties hold.*

There exist constants $c_{f,1}$ и $c_{f,2}$ such that for any $z \in \partial\mathcal{D}$

$$|f(z) - P_n(z)q_n(z)| \leqslant c_{f,1} \cdot n^{-\alpha}, \ |F(z) - P_n(z)| \leqslant c_{f,2} \cdot n^{-\alpha}.$$

There is constant $c_{\mathcal{D}}$ such that for any $z \in \mathcal{D}$

$$|q_n(z)| \leqslant c_{\mathcal{D}}.$$

Finally, for any $z \in \mathcal{D}$

$$q_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} I(z).$$

Санкт-Петербургский электротехнический университет, 197376, ул. проф. Попова, д.5, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: alkomedvedev@gmail.com

Поступило 20 июня 2025 г.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 191023, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com