Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 545, 2025 г.

А. С. Колпаков, Н. А. Широков

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ И. И. ПРИВАЛОВА

§1. Введение

Пусть Γ – жорданова спрямляемая кривая, ограничивающая область D, $G = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, функция f принадлежит пространству $C(\Gamma)$. Положим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ z \in D,$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ z \in G.$$

Обозначим через $H^\beta\left(\overline{D}\right)$, $H^\beta\left(\overline{G}\right)$, $H^\beta(\Gamma)$, $0 < \beta < 1$, пространства функций, аналитических в D, G и удовлетворяющих на указанных множествах условию Гёльдера порядка β. Для $h \in H^\beta\left(\overline{G}\right)$ требуем $h(\infty) = 0$. И. И. Приваловым [1, глава 3, §4] установлено, что при условии, что кривая Γ кусочно-гладкая без точек заострения и $f \in H^\beta(\Gamma)$, выполняются соотношения $g \in H^\beta\left(\overline{D}\right)$, $h \in H^\beta\left(\overline{G}\right)$ и $f(z) = g(z) - h(z),\ z \in \Gamma$.

Заключение теоремы остается справедливым, если ослабить предположение о кривой Γ до условия соизмеримости длины дуги и хорды кривой.

Естественен вопрос о возможности представить функцию $f \in H^\beta(\Gamma)$ в виде $f(z) = g(z) - h(z)$ (или, переобозначим $-h$ через h) в виде $f(z) = g(z) + h(z)$ с $g \in H^\beta\left(\overline{D}\right)$ и $h \in H^\beta\left(\overline{G}\right)$ в случае неспрямляемой кривой Γ. В данной работе мы показываем, что для некоторых классов неспрямляемых кривых Γ сохраняется аналог теоремы И. И. Привалова.

Ключевые слова: аналитические функции, классы Гёльдера, условие Альфорса–Давида.

Работа второго автора выполнена за счёт гранта РНФ 23-11-00171, https://rscf.ru/project/23-11-00171/.

Определение 1. *Пусть* $E \subset \mathbb{C}$ *– компакт,* $0 < \theta < 2$, $\Lambda_\theta(S)-$ θ*-мера Хаусдорфа множества* $S \subset \mathbb{C}$. *Следуя П. Маттиле* [2], *будем называть множество* E *множеством Альфорса–Давида размерности* θ, *если для любого круга* $\overline{B}_r(z) = \{\zeta : \ |\zeta - z| \leqslant r\}$ *с центром* $z \in E$ *и любого* r, $0 < r < \operatorname{diam} E$, *с некоторыми постоянными* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *не зависящими от* z *и* r, *выполняются соотношения*

$$C_1 r^\theta \leqslant \Lambda_\theta\left(E \cap \overline{B}_r(z)\right) \leqslant C_2 r^\theta.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* Γ *– жорданова дуга, являющаяся множеством Альфорса–Давида размерности* $1+\alpha$, $0 < \alpha < 1$, *и пусть* $\beta \in (\alpha, 1)$. *Пусть функция* f *принадлежит пространству* $H^\beta(\Gamma)$. *Тогда существуют функции* $g \in H^\beta\left(\overline{D}\right)$ *и* $h \in H^\beta\left(\overline{G}\right)$ *такие, что*

$$f(z) = g(z) + h(z), \quad z \in \Gamma. \tag{1}$$

§2. Продолжение функции f на $\mathbb{C}$

Будем применять подход Е. М. Дынькина [3] к продолжению функции на всю комплексную плоскость, модифицируя его. Для $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ пусть $z_0 = z_0(z) \in \Gamma-$ ближайшая к z точка,

$$d(z) = |z - z_0(z)| = \operatorname{dist}(z, \Gamma), \quad d_0(z) = \frac{1}{2}d(z),$$
$$d_n(z) = \max\left(d_0(z), \frac{1}{n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Определим множества G_n, D_n, $\widetilde{\Omega}_n$ следующим образом:

$$G_n = \left\{z \in G : \ d_0(z) \geqslant \frac{1}{n}\right\}, \quad D_n = \left\{z \in D : \ d_0(z) \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$
$$\widetilde{\Omega}_n = \left\{\zeta : \ d(\zeta) \leqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Функцию $\tilde{f}_0(z)$, следуя Е. М. Дынькину [3], определим так:

$$\tilde{f}_0(z) = \begin{cases} f\left(z_0(z)\right), & \text{если } \ d(z) \leqslant \operatorname{diam}\Gamma, \\ 0, & \text{если } \ d(z) > \operatorname{diam}\Gamma. \end{cases}$$

Если $z \in \Gamma$, то $d(z) = 0$ и $\tilde{f}_0(z) = f(z)$. Теперь зададим функции $f_0(z)$ и $f_n(z)$, $n \geqslant 1$:

$$f_0(z) = \frac{1}{\pi d_0^2(z)} \int\limits_{\overline{B}_{d_0(z)}(z)} \tilde{f}_0(\zeta) dm_2(\zeta), \tag{2}$$

$$f_n(z) = \frac{1}{\pi d_n^2(z)} \int\limits_{\overline{B}_{d_n(z)}(z)} \tilde{f}_0(\zeta) dm_2(\zeta), \tag{3}$$

в (2) и (3) m_2 означает двумерную меру Лебега в $\mathbb{C}$. Отметим, что при $d(z) \geqslant \frac{2}{n}$ и $\zeta \in \overline{B}_{d_0(z)}(z)$ имеем

$$d(\zeta) \geqslant d(z) - d_0(z) = \frac{1}{2} d(z) \geqslant \frac{1}{n},$$

поэтому $d_n(z) = d_0(z)$ и $f_n(z) = f_0(z)$.

Далее, справедливо соотношение $|d(z_1) - d(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$, поэтому по теореме Г. Радемахера [4] функция $d_0(z)$ дифференцируема m_2-почти всюду на множестве $\mathbb{C} \backslash \Gamma$, а тогда и $d_n(z)$ дифференцируема m_2-почти всюду на $\mathbb{C}$ и, поскольку для $d_n(z)$ выполняется неравенство $|d_n(z_1) - d_n(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$, для m_2-почти всех $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$ справедливы оценки

$$|\operatorname{grad} d_0(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\operatorname{grad} d_n(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Из оценок (4) следует, что для m_2-почти всех $z \in \mathbb{C}$ имеются оценки

$$|f'_{0\bar{z}}(z)| \leqslant c d^{\beta-1}(z), \quad |f'_{n\bar{z}}(z)| \leqslant c d_n^{\beta-1}(z) \leqslant c n^{1-\beta}. \tag{5}$$

Соотношения (5) позволяют применить к функции $f_n(z)$ формулу Грина при всех $z \in \mathbb{C}$:

$$f_n(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f'_{n\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Положим $B_0 = B_{2 \operatorname{diam} \Gamma}(0)$. Интегрирование в (6) ведётся по кругу B_0.

§3. Оценки интегралов

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$I = \int\limits_{B_r(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) \leqslant c r^{\beta}, \quad z \in \Gamma,\ 0 < r < 1. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $2^{-N-1} < r \leqslant 2^{-N}$. Достаточно проверить, что

$$\int\limits_{B_{2^{-N}}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) \leqslant c 2^{-N\beta}. \tag{7'}$$

Пусть

$$I_k = \int\limits_{B_{2^{-k}}(z) \setminus B_{2^{-k-1}}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta).$$

Тогда

$$I = \sum_{k=N}^{\infty} I_k. \tag{8}$$

Далее

$$I_k < 2^{k+1} \int\limits_{B_{2^{-k}}(z)} d^{\beta-1}(\zeta) dm_2(\zeta) \overset{\text{def}}{=} 2^{k+1} J_k. \tag{9}$$

Имеем

$$J_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \int\limits_{B_{2^{-k}}(z) \cap \left(\widetilde{\Omega}_{2^\nu} \setminus \widetilde{\Omega}_{2^{\nu+1}}\right)} d^{\beta-1}(\zeta) dm_2(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=k}^{\infty} J_{k\nu}. \tag{10}$$

При $\zeta \notin \widetilde{\Omega}_{2^{\nu+1}}$ выполнено соотношение $d(\zeta) \geqslant c 2^{-\nu}$. Положим

$$\widetilde{\Omega}_{k\nu} = \overline{B}_{2^{-k}}(z) \cap \widetilde{\Omega}_{2^\nu}, \quad \Lambda_{k\nu} = m_2\left(\widetilde{\Omega}_{k\nu}\right).$$

Тогда получим оценку

$$J_{k\nu} \leqslant c 2^{-\nu(\beta-1)} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{k\nu}} dm_2(\zeta) \leqslant c 2^{\nu(1-\beta)} \Lambda_{k\nu}.$$

Для сокращения дальнейших записей обозначим $r = 2^{-k}$, $\rho = 2^{-\nu}$; $N(k,\nu)$ – количество замкнутых кругов радиуса $C_1\rho$, покрывающих множество $\widetilde{\Omega}_{k\nu}$ с использованием теоремы П. Маттилы для множества $\Gamma \cap \widetilde{\Omega}_{k\nu}$:

$$N(k,\nu) \leqslant c \left(\frac{r}{\rho}\right)^{1+\alpha}.$$

Тогда для $\Lambda_{k\nu}$ получается оценка:

$$\Lambda_{k\nu} = m_2\left(\widetilde{\Omega}_{k\nu}\right) \leqslant c \left(\frac{r}{\rho}\right)^{1+\alpha} \cdot \rho^2.$$

Отсюда получаем оценку для $J_{k\nu}$:

$$J_{k\nu} \leqslant c\rho^{\beta-1} \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^{1+\alpha} \cdot \rho^2 = cr^{1+\alpha}\rho^{\beta-\alpha} = c2^{-k(1+\alpha)} \cdot 2^{-\nu(\beta-\alpha)}.$$

Тогда величина J_k оценится так:

$$J_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} J_{k\nu} \leqslant cr^{1+\alpha} \sum_{\nu=k}^{\infty} 2^{-\nu(\beta-\alpha)} = cr^{1+\alpha} \cdot r^{\beta-\alpha} = cr^{1+\beta} = c2^{-k(1+\beta)}, \quad (11)$$

поэтому

$$I_k = 2^{k+1} J_k \leqslant c2^k \cdot 2^{-k(1+\beta)} = c2^{-k\beta}.$$

Окончательно,

$$I = \sum_{k=N}^{\infty} I_k \leqslant c \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\beta} = c2^{-N\beta},$$

что и утверждалось в $(7')$. □

Лемма 2. *Пусть* $z \in \Gamma$, *тогда*

$$K_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_n} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) \leqslant c \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta-\alpha}. \quad (12)$$

Доказательство. Для сокращения обозначений положим $r = \frac{1}{n}$, $R_\nu = 2^\nu r$. Число N_0 выбрано из условий $2^{N_0-1} r \leqslant \operatorname{diam}\Gamma < 2^{N_0} r$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_n} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) &= \int\limits_{B_r(z)\cap\widetilde{\Omega}_n} \ldots + \sum_{\nu=1}^{N_0} \int\limits_{\left(B_{R_\nu}(z)\setminus B_{R_{\nu-1}}(z)\right)\cap\widetilde{\Omega}_n} \ldots \\ &\leqslant cr^\beta + c\sum_{\nu=1}^{N_0} \frac{1}{R_\nu} \int\limits_{B_{R_\nu}(z)\cap\widetilde{\Omega}_n} d^{\beta-1}(\zeta) dm_2(\zeta). \end{aligned} \quad (13)$$

В оценке (13) мы применили лемму 1 к первому слагаемому. Далее,

$$\int\limits_{B_{R_\nu}(z)\cap\widetilde{\Omega}_n} d^{\beta-1}(\zeta) dm_2(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \int\limits_{B_{R_\nu}(z)\cap\left(\widetilde{\Omega}_{2^l n}\setminus\widetilde{\Omega}_{2^{l+1} n}\right)} d^{\beta-1}(\zeta) \quad dm_2(\zeta). \quad (14)$$

Пусть $N\,(cr, R_\nu)$ – количество замкнутых кругов радиуса cr, покрывающих множество $\Gamma \cap B_{R_\nu}(z)$. При выборе абсолютной постоянной c

данное множество кругов будет покрывать и множество $\widetilde{\Omega}_n \cap B_{R_\nu}(z)$. Для $N(cr, R_\nu)$ по теореме П. Маттилы имеется оценка

$$N(cr, R_\nu) \leqslant c\left(\frac{R_\nu}{r}\right)^{1+\alpha}. \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) влекут неравенство

$$\int\limits_{B_{R_\nu}(z)\cap\widetilde{\Omega}_n} d^{\beta-1}(\zeta)dm_2(\zeta) \leqslant c\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{2^l}\right)^{\beta-1} m_2\left(B_{R_\nu}(z)\cap\widetilde{\Omega}_{2^l n}\right). \tag{16}$$

Заменяя в (15) r на $2^{-l}r$, а $\widetilde{\Omega}_n$ на $\widetilde{\Omega}_{2^l n}$, получаем соотношение

$$N\left(c2^{-l}r, R_\nu\right) \leqslant c\left(\frac{R_\nu}{2^{-l}r}\right)^{1+\alpha} = c\left(\frac{R_\nu}{r}\right)^{1+\alpha}\cdot 2^{l(1+\alpha)}, \tag{17}$$

тогда формулы (16) и (17) влекут

$$\int\limits_{B_{R_\nu}(z)\cap\widetilde{\Omega}_n} d^{\beta-1}(\zeta)dm_2(\zeta) \leqslant c\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{2^l}\right)^{\beta-1}\left(\frac{R_\nu}{r}\right)^{1+\alpha} 2^{l(1+\alpha)}\left(2^{-l}r\right)^2$$

$$= c\sum_{l=0}^{\infty} R_\nu^{1+\alpha}\left(2^{-l}r\right)^{\beta+1-(\alpha+1)} = cR_\nu^{1+\alpha}r^{\beta-\alpha}. \tag{18}$$

Применяя (13), (15) и (18), находим, что

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_n}\frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta-z|}dm_2(\zeta) \leqslant cr^\beta + c\sum_{\nu=1}^{N_0}\frac{1}{R_\nu}\cdot R_\nu^{1+\alpha}\cdot r^{\beta-\alpha} = cr^\beta + c\sum_{\nu=1}^{N_0}R_\nu^\alpha r^{\beta-\alpha}. \tag{19}$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{N_0}R_\nu^\alpha = r^\alpha\sum_{\nu=1}^{N_0}2^{\nu\alpha} \leqslant cr^\alpha 2^{N_0\alpha} = c\left(r2^{N_0}\right)^\alpha \leqslant c. \tag{20}$$

Из (19) и (20) находим, что

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_n}\frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta-z|}dm_2(\zeta) \leqslant cr^\beta + cr^{\beta-\alpha} \leqslant c\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta-\alpha}.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $z \notin \Gamma$, $d(z) = r$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) \leqslant cr^\beta. \tag{21}$$

Доказательство. При $\zeta \in B_{\frac{r}{2}}(z)$ имеем соотношение $d(\zeta) \geqslant \frac{r}{2}$, поэтому, используя формулы (9), (11), имеем

$$\int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) = \int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) + \int\limits_{B_{2r}(z)\setminus B_{\frac{r}{2}}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta)$$

$$\leqslant cr^{\beta-1} \int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(z)} \frac{dm_2(\zeta)}{|\zeta - z|} + c \cdot \frac{1}{r} \int\limits_{B_{2r}(z)\setminus B_{\frac{r}{2}}(z)} d^{\beta-1}(\zeta) dm_2(\zeta) \leqslant cr^{\beta-1} \cdot r + c \cdot \frac{1}{r} \cdot r^{\beta+1} = cr^\beta.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $z \in \Gamma$. *Тогда имеется неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_r(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|^2} dm_2(\zeta) \leqslant cr^{\beta-1}. \tag{22}$$

Доказательство. Положим $R_n = 2^n r$, и пусть N_0 удовлетворяет условию $R_{N_0-1} < \operatorname{diam} \Gamma \leqslant R_{N_0}$. Тогда, применяя формулы (9), (11), находим

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_r(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|^2} dm_2(\zeta) &= \sum_{n=1}^{N_0+1} \int\limits_{B_{R_n}(z)\setminus B_{R_{n-1}}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|^2} dm_2(\zeta) \\
&\leqslant c \sum_{n=1}^{N_0+1} \frac{1}{R_n^2} \int\limits_{B_{R_n}(z)} d^{\beta-1}(\zeta) dm_2(\zeta) \\
&\leqslant c \sum_{n=1}^{N_0+1} \frac{1}{R_n^2} \cdot R_n^{\beta+1} = c \sum_{n=1}^{N_0+1} r^{\beta-1} 2^{n(\beta-1)} \leqslant cr^{\beta-1}.
\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана. □

§4. Интегральное представление функции $f(z)$

Применяя соотношение (6) и учитывая, что при $d(\zeta) \geqslant \frac{2}{n}$ имеем равенство $f_n(\zeta) = f_0(\zeta)$, получаем формулу:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{n\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{n\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{n\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta) \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{n\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta). \end{aligned} \tag{23}$$

Учитывая оценки (5), находим, что

$$\left|\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta)\right| \leqslant c\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|}dm_2(\zeta), \tag{24}$$

$$\left|\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{n\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}dm_2(\zeta)\right| \leqslant c\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{n^{1-\beta}}{|\zeta - z|}dm_2(\zeta) \leqslant c\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|}dm_2(\zeta). \tag{25}$$

Пусть $z_0 \in \Gamma$, $|z - z_0| = d(z)$. Положим $|z - z_0| = r$. Тогда имеем соотношения

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|}dm_2(\zeta) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\cap B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|}dm_2(\zeta) + \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\setminus B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|}dm_2(\zeta)$$

$$\leqslant \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) + c \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]} \setminus B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z_0|}\, dm_2(\zeta)$$

$$\leqslant \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) + cK_{\left[\frac{n}{2}\right]}(z_0) \leqslant cr^\beta + cr^{\beta-\alpha} \leqslant c\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta-\alpha}. \quad (26)$$

В неравенствах (26) мы воспользовались оценками (12) леммы 2 и (21) леммы 3. Соотношения (24)$-$(26) влекут, что

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{n\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{1}{\pi} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{\left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad (27)$$

поэтому соотношения (23) и (27) дают формулу

$$f_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta), \;\; z \notin \Gamma. \quad (28)$$

Положим

$$f_0^*(z_0) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z_0} dm_2(\zeta), \;\; z_0 \in \Gamma. \quad (29)$$

В соотношении (29) z_0 – произвольная точка кривой Γ. Пусть $z \notin \Gamma$, $|z - z_0| = r$, z_0 не обязательно ближайшая точка к z. Тогда, учитывая соотношение (28), имеем:

$$f_0^*(z_0) - f_0(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{f'_{0\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z_0} dm_2(\zeta)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_{2r}(z)} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{\zeta - z}\right) f'_{0\bar\zeta}(\zeta) dm_2(\zeta) \overset{\text{def}}{=} A(z) - B(z_0) + C(z_0, z). \quad (30)$$

Применяя леммы 1, 3 и 4, находим, что

$$|A(z)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{|f'_{0\bar\zeta}(\zeta)|}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) \leqslant c \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z|} dm_2(\zeta) \leqslant cr^\beta, \quad (31)$$

$$|B(z_0)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z)} \frac{|f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|\zeta - z_0|} dm_2(\zeta) \leqslant c \int\limits_{B_{4r}(z_0)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z_0|} dm_2(\zeta) \leqslant cr^{\beta}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} |C(z_0, z)| &\leqslant c|z - z_0| \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_{2r}(z)} \frac{|f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^2} dm_2(\zeta) \\ &\leqslant cr \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_{2r}(z)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z_0|^2} dm_2(\zeta) \leqslant cr^{\beta}. \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь из (30)−(33) следует, что

$$|f_0^*(z_0) - f_0(z)| \leqslant cr^{\beta}. \quad (34)$$

Далее,

$$f_0^*(z_0) - f(z_0) = (f_0^*(z_0) - f_0(z)) + (f_0(z) - f(z_0)). \quad (35)$$

Учитывая, что $f_0(\zeta)$ является продолжением функции f на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, из (34) и (35) заключаем, что

$$|f_0^*(z_0) - f(z_0)| \leqslant |f_0^*(z_0) - f_0(z)| + |f(z) - f(z_0)| \leqslant cr^{\beta} + cr^{\beta} = cr^{\beta}.$$

Поскольку число $r > 0$ произвольно, видим, что $f_0^*(z_0) = f(z_0)$, и получаем интегральное представление для $f(z_0)$:

$$f(z_0) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z_0} dm_2(\zeta), \quad z_0 \in \Gamma. \quad (36)$$

§5. Окончание доказательства

Положим

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{G} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta), \quad z \in \overline{D}, \quad (37)$$

$$h(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} dm_2(\zeta), \quad z \in \overline{G}. \quad (38)$$

Из соотношений (36)−(38) следует, что при $z \in \Gamma$ имеется равенство $g(z) + h(z) = f(z)$. Из (37) следует, что функция g аналитична в D, а функция h аналитична в G. Осталось проверить, что функция g

удовлетворяет условию Гёльдера порядка β в $\overline{D}$, а функция h удовлетворяет условию Гёльдера порядка β в $\overline{G}$. По теореме П. М. Тамразова [5] достаточно проверить выполнение условия Гёльдера при $z \in \Gamma$. Проведём проверку для функции g, для функции h рассуждения аналогичны. Итак, пусть $z_1, z_2 \in \Gamma$, $|z_2 - z_1| = r > 0$. Тогда имеем равенство

$$\begin{aligned} g(z_2) - g(z_1) = & -\frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z_1)\cap G} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z_2} dm_2(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z_1)\cap G} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z_1} dm_2(\zeta) \\ & - \frac{1}{\pi} \int\limits_{G\setminus B_{2r}(z_1)} f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right) dm_2(\zeta) \\ = & - \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z_1)\cap G} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z_2} dm_2(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{B_{2r}(z_1)\cap G} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z_1} dm_2(\zeta) \\ & - \frac{1}{\pi}(z_2 - z_1) \int\limits_{G\setminus B_{2r}(z_1)} \frac{f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta) dm_2(\zeta)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} -A(z_2) + B(z_1) + C(z_1, z_2). \end{aligned} \tag{39}$$

Применяя соотношение (7) леммы 1 и оценку (5), находим, что

$$|A(z_2)| \leqslant c \int\limits_{B_{4r}(z_2)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z_2|} dm_2(\zeta) \leqslant c r^{\beta}, \tag{40}$$

$$|B(z_1)| \leqslant c \int\limits_{B_{2r}(z_1)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z_1|} dm_2(\zeta) \leqslant c r^{\beta}. \tag{41}$$

Применяя оценку (22) леммы 4 и оценку (5), получаем неравенство

$$|C(z_1, z_2)| \leqslant c|z_2 - z_1| \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B_{2r}(z_1)} \frac{d^{\beta-1}(\zeta)}{|\zeta - z_1|^2} dm_2(\zeta) \leqslant c r \cdot r^{\beta-1} = c r^{\beta}. \tag{42}$$

Из соотношений (39)–(42) получаем оценку $|g(z_2) - g(z_1)| \leqslant c r^{\beta} = c|z_2 - z_1|^{\beta}$. Аналогично проводятся рассуждения для функции h. Теорема доказана.

Список литературы

1. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва, Ленинград (1950).
2. P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces.* Cambridge University Press (1995).
3. Е. М. Дынькин, *Гладкие функции на плоских множествах.* — ДАН СССР, **208**, №1 (1973), 25-27.
4. О. Л. Виноградов, *Математический анализ.* БХВ-Петербург (2017).
5. П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения.* Наукова думка, Киев (1975).

Kolpakov A. S., Shirokov N. A. Generalization of a theorem of I. I. Privalov.

Let $E \subset \mathbb{C}$ be a compact set. The set E is called an Ahlfors–David set of dimension θ, $0 < \theta < 2$, if there exist constants C_1, $C_2 > 0$ such that for any $z \in E$ and arbitrary r, $0 < r < \operatorname{diam} E$, one has

$$C_1 r^\theta \leqslant \Lambda_\theta \left(E \cap \overline{B}_r(z)\right) \leqslant C_2 r^\theta,$$

where $\Lambda_\theta(S)$ means the Hausdorff measure of dimension θ and $\overline{B}_r(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant r\}$.

Let Γ be a closed Jordan curve that is an Ahlfors–David set of dimension $1+\alpha$, $0 < \alpha < 1$, which bounds a domain D; we put $G = \mathbb{C} \backslash \overline{D}$. We introduce the spaces $H^\beta\left(\overline{D}\right)$ and $H^\beta\left(\overline{G}\right)$ as the spaces of functions g or h analytic respectively in D or G, $h(\infty) = 0$, and satisfying the β-Hölder condition in $\overline{D}$ or $\overline{G}$. We denote by $H^\beta(\Gamma)$ the space of all complex-valued functions f defined on Γ and satisfying the β-Hölder condition on it. We prove the following result.

Theorem. *Assume that* Γ *is a Jordan curve as described above,* $\alpha < \beta < 1$, $f \in H^\beta(\Gamma)$. *Then there exist functions* $g \in H^\beta\left(\overline{D}\right)$ *and* $h \in H^\beta\left(\overline{G}\right)$ *such that*

$$f(z) = g(z) + h(z), \ z \in \Gamma.$$

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ"
Санкт-Петербург
E-mail: kolpakov.andrew@gmail.com

Поступило 30 ноября 2024 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, Санкт-Петербург
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com