

А. А. Горшанова, Е. А. Лебедева

ПОРЯДКИ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ФРЕЙМАМИ ВСПЛЕСКОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Аппроксимационные свойства семейств функций, инвариантных относительно сдвига, и, в частности, систем всплесков изучались многими авторами (см., например, статьи [2, 4, 7, 14, 15] и ссылки на литературу в них) в различных пространствах для периодических и непериодических функций.

В настоящей работе мы изучаем семейства 1-периодических всплесков в пространстве L_2 , образующих фрейм Парсеваля. Их способность приближать функции оценивается с помощью порядков аппроксимации. В работе [1] авторами были предложены конструктивные необходимые и достаточные условия для построения периодического фрейма Парсеваля всплесков (см. пункт 4). В настоящей работе мы изучаем взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим периодическим кратномасштабным анализом (ПКМА) в терминах систем всплесков, построенных в [1]. В пункте 3 мы рассматриваем аппроксимационные свойства масштабирующих функций и формулируем условия, необходимые и достаточные для получения определённого порядка аппроксимации ПКМА (теорема 1). В пункте 4 мы изучаем аппроксимационные свойства фреймов. Теорема 3 даёт необходимые и достаточные условия для порядка аппроксимации фреймом в терминах масштабирующих последовательностей. В теореме 4 мы сравниваем порядки аппроксимации фреймом и ПКМА, и отмечаем условия совпадения этих порядков.

Ключевые слова: фрейм Парсеваля, периодические всплески, порядок аппроксимации.

Работа выполнена за счет Российского Научного Фонда 23-11-00178,
<https://rscf.ru/project/23-11-00178/>.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом L_2 обозначим пространство 1-периодических функций f таких, что $|f|^2$ суммируем на $[0, 1]$, l_2 обозначает пространство двусторонних последовательностей $a = \{a(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, для которых ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)|^2$ сходится. Символы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\|\cdot\|_2$ будем использовать для обозначения скалярного произведения и нормы как в пространстве L_2 , так и в пространстве l_2 , то есть

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) dx \quad \text{для функций } f, g \in L_2,$$

и

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \bar{b}(k) \quad \text{для последовательностей } a, b \in l_2.$$

Соответствующие нормы определяются равенством $\|\cdot\|_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$. Для $n \in \mathbb{Z}$ будем обозначать n -й коэффициент Фурье функции $f \in L_2$ символом $\hat{f}(n) = \langle f, e^{2\pi i n \cdot} \rangle$.

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{S}(2^j)$ пространство всех 2^j -периодических последовательностей $\{c(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ комплексных чисел, то есть таких, что $c(2^j p + k) = c(k)$ для всех $p, k \in \mathbb{Z}$.

Для $\nu \in \mathbb{R}$ под H^ν будем понимать пространство Соболева всех 1-периодических функций f таких, что $\|f\|_{H^\nu}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^\nu |\hat{f}(k)|^2 < \infty$.

В пространстве L_2 рассмотрим оператор сдвига $S_j^n f := f(\cdot + 2^{-j}n)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathcal{R}_j$, где

$$\mathcal{R}_j = \{-2^{j-1} + 1, -2^{j-1} + 2, \dots, 2^{j-1}\}, \quad \mathcal{R}_0 = \{0\}.$$

Положим $\delta_{\mathcal{R}_j}(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{R}_j \\ 0, & k \notin \mathcal{R}_j \end{cases}$ — характеристическая функция множества $\mathcal{R}_j$.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ зафиксируем натуральное число ρ_j и функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$. Семейство функций

$$\Psi = \{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$$

называется системой периодических всплесков, а сами функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$, называют всплесковыми генераторами или просто

всплесками. Говорят, что система всплесков Ψ образует фрейм Парсевала в L_2 , если для всех $f \in L_2$ выполняется равенство Парсевала

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2.$$

В литературе фрейм Парсевала также называют нормализованным жёстким фреймом [5–7].

§3. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМ КМА

Существует несколько различных определений периодического кратномасштабного анализа, отличающихся набором аксиом и объемлющим пространством (см., например, [3, 6, 9, 10, 12, 13]). В данной работе мы будем использовать определение с наименьшим числом аксиом, приведённое в работах [6, 9]. А именно, будем говорить, что для заданных функций $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{Z}_+$, последовательность подпространств $V_j = \text{span}\{S_j^k \varphi_j, k \in \mathcal{R}_j\} \subset L_2$, $j \in \mathbb{Z}_+$, образует ПКМА в L_2 , если $V_j \subseteq V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2$. При этом функции φ_j называются масштабирующими функциями, а последовательности их коэффициентов Фурье $\{\widehat{\varphi_j}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – масштабирующими последовательностями.

Аппроксимационные свойства ПКМА будем описывать с помощью порядка аппроксимации в терминах наилучшего приближения. Наилучшим приближением функции $f \in L_2$ подпространством V_j называют величину

$$E(f, V_j) = \text{dist}(f, V_j) = \inf_{g \in V_j} \|f - g\|_2.$$

Говорят, что ПКМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ имеет порядок аппроксимации, равный $\mu \geq 0$, если μ есть супремум неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие положительные постоянные C_γ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geq J_\gamma$ и всех функций $f \in H^\gamma$ верно неравенство

$$E(f, V_j) \leq 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}. \quad (3.1)$$

В определении не требуется, чтобы супремум достигался.

При описании порядка аппроксимации ПКМА в терминах масштабирующих последовательностей $\{\widehat{\varphi_j}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ мы следуем идеям, предложенным в [2]. Введём вспомогательные обозначения.

Для последовательностей $a, b \in l_2$ и $j \in \mathbb{N}$ обозначим через $[a, b]^j$ последовательность с коэффициентами

$$[a, b]_k^j := \sum_{l \in \mathbb{Z}} a(2^j l + k) \overline{b(2^j l + k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение корректно в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} a(2^j l + k) \overline{b(2^j l + k)} \right|^2 &\leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |a(k + 2^j l)|^2 \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |b(k + 2^j l)|^2 \right) \\ &\leq \|a\|_2^2 \cdot \|b\|_2^2. \end{aligned}$$

Из определения также ясно, что $[a, b]^j \in \mathcal{S}(2^j)$.

Символом Λ_j будем обозначать последовательность, элементы которой задаются с помощью соответствующей масштабирующей последовательности

$$\Lambda_j(k) := \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi_j}(k)|^2}{[\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j} \right)^{1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Полагая $\frac{0}{0} = 0$, приходим к корректному определению.

Также зафиксируем $\widehat{V}_j = \{ \widehat{f}(k) \}_{k \in \mathbb{Z}} : f \in V_j \}$ – множество всех последовательностей коэффициентов Фурье функций из подпространства V_j . Понятно, что $\widehat{V}_j$ есть линейное подпространство в l_2 и существует взаимно однозначное соответствие между элементами множеств V_j и $\widehat{V}_j$, сопоставляющее каждой функции последовательность её коэффициентов Фурье. Обозначим через $\mathcal{P}_j$ и $\widehat{\mathcal{P}}_j$ ортогональные проекторы на подпространства V_j и $\widehat{V}_j$ соответственно.

Лемма 1. Пусть $f \in L_2$. Тогда для $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{f}(k) = \widehat{\mathcal{P}}_j f(k) = \begin{cases} \frac{[\widehat{f}, \widehat{\varphi_j}]_k^j}{[\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j} \widehat{\varphi_j}(k), & \text{если } [\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Кроме того, если $\text{supp } \widehat{f} \subset \{2^j m + \mathcal{R}_j\}$ для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{Z}$, то

$$E^2(f, V_j) = \sum_{k \in \{2^j m + \mathcal{R}_j\}} |\widehat{f}(k)|^2 \Lambda_j^2(k).$$

Доказательство. Из равенства Парсеваля следует, что $\widehat{\mathcal{P}_j f} = \widehat{\mathcal{P}_j} \widehat{f}$. Обозначим

$$\alpha_k^j(f) = \begin{cases} \frac{[\widehat{f}, \widehat{\varphi_j}]_k^j}{[\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j}, & \text{если } [\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Ясно, что $\alpha^j(f)$ есть 2^j -периодическая последовательность и $\alpha^j(f)\widehat{\varphi_j}$ лежит в l_2 по неравенству Коши–Буняковского–Шварца:

$$\begin{aligned} \|\alpha^j(f)\widehat{\varphi_j}\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\alpha_k^j(f)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_j}(2^j n + k)|^2 = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \frac{[\widehat{f}, \widehat{\varphi_j}]_k^j^2}{([\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j)^2} \cdot [\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_k^j \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{R}_j} [\widehat{f}, \widehat{f}]_k^j = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор T_j на l_2 , действующий по правилу $T_j \widehat{f} = \alpha^j(f)\widehat{\varphi_j}$. Доказательство первого утверждения теоремы теперь сводится к доказательству того, что оператор T_j совпадает с оператором $\widehat{\mathcal{P}_j}$. В силу линейности операторов достаточно доказать, что они действуют одинаково на элементах подпространства V_j и его ортогонального дополнения $V_j^\perp$ в L_2 . Для функции $f \in V_j^\perp$ и любого $k \in \mathcal{R}_j$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, S_j^k \varphi_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\varphi_j}(n)} e^{2\pi i \cdot 2^{-j} n k} \\ &= \sum_{m \in \mathcal{R}_j} e^{2\pi i \cdot 2^{-j} m k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n + m) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j n + m)} = \sum_{m \in \mathcal{R}_j} [\widehat{f}, \widehat{\varphi_j}]_m^j e^{2\pi i \cdot 2^{-j} m k}, \end{aligned}$$

что возможно только при условии $[\widehat{f}, \widehat{\varphi_j}]^j = 0$ ввиду линейной независимости экспонент. Таким образом, $T_j \widehat{f} = 0$ для $f \in V_j^\perp$ и, по определению, $\widehat{\mathcal{P}_j} \widehat{f} = \widehat{\mathcal{P}_j} \widehat{f} = 0$.

Всякая функция $f \in V_j$ может быть представлена в виде линейной комбинации конечного числа сдвигов масштабирующей функции $\{\varphi_j(\cdot + 2^{-j} k)\}_{k \in \mathcal{R}_j}$. Поэтому достаточно изучить действие рассматриваемых операторов на сдвиги масштабирующей функции. Если $[\widehat{\varphi_j}, \widehat{\varphi_j}]_n^j = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, то в частности $\widehat{\varphi_j}(n) = 0$ и

$$\widehat{\mathcal{P}_j} \left(\widehat{S_j^k \varphi_j} \right)_n = e^{2\pi i \cdot 2^{-j} k n} \widehat{\varphi_j}(n) = 0.$$

Если $[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_n^j \neq 0$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\alpha_n^j(S_j^k \varphi_j) = \frac{\left[e^{2\pi i \cdot 2^{-j} kn} \widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j \right]_n^j}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_n^j} = e^{2\pi i \cdot 2^{-j} kn}$$

для всех $k \in \mathcal{R}_j$ и, следовательно,

$$T_j \left(\widehat{S_j^k \varphi_j} \right)_n = e^{2\pi i \cdot 2^{-j} kn} \widehat{\varphi}_j(n) = \widehat{S_j^k \varphi_j}(n) = \widehat{\mathcal{P}_j} \left(\widehat{S_j^k \varphi_j} \right)_n.$$

Для доказательства второго утверждения леммы воспользуемся только что доказанной формулой для оператора $\widehat{\mathcal{P}_j}$:

$$\begin{aligned} E^2(f, V_j) &= E^2(\widehat{f}, \widehat{V_j}) = \|\widehat{f}\|_2^2 - \|\widehat{\mathcal{P}_j f}\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 - \|\alpha^j(f) \widehat{\varphi}_j\|_2^2 \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(2^j m + k)|^2 - \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \frac{\left| \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)} \right|^2}{([\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j)^2} \cdot [\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j \\ &= \sum_{k \in \{2^j m + \mathcal{R}_j\}} |\widehat{f}(k)|^2 \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi}_j(k)|^2}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j} \right) = \sum_{k \in \{2^j m + \mathcal{R}_j\}} |\widehat{f}(k)|^2 \Lambda_j^2(k). \quad \square \end{aligned}$$

Теперь введём вспомогательную функцию $g_j^*(x) = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} e^{2\pi i k x}$ и пространство $V_j^* = \text{span}\{g_j^*(\cdot + 2^{-j} k), k \in \mathcal{R}_j\}$, порождённое сдвигами этой функции g_j^* . Обозначим через $\mathcal{P}_j^*$ ортогональный проектор на V_j^* . Тогда для $f \in L_2$

$$\widehat{\mathcal{P}_j^* f}(k) = \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j l + k) \cdot \overline{\widehat{g_j^*}(2^j l + k)}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{g_j^*}(2^j l + k)|^2} \widehat{g_j^*}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & k \in \mathcal{R}_j \\ 0, & k \notin \mathcal{R}_j \end{cases}.$$

Лемма 2. (1) Для всех $f \in L_2$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$|E(f, V_j) - E(\mathcal{P}_j^* f, V_j)| \leq E(f, V_j^*).$$

(2) Для всех $f \in H^\mu, \mu \geq 0$,

$$E(f, V_j^*) \leq \varepsilon_j(f) \cdot 2^{-j\mu} \cdot 2^\mu \cdot \|f\|_{H^\mu},$$

где

$$\varepsilon_j(f) = \left(\frac{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2} \right)^{1/2},$$

а значит, $0 \leq \varepsilon_j(f) \leq 1$ и $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j(f) = 0$.

Доказательство. Используя элементарные свойства расстояния и равенство Парсеваля, получаем

$$E^2(f, V_j) = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{P}_j f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 - \|\widehat{\mathcal{P}_j f}\|_2^2.$$

Применим неравенство треугольника и воспользуемся свойствами ортопроекторов, в частности тем, что ортопроектор является сжимающим отображением. Приходим к оценке

$$\begin{aligned} |E(f, V_j) - E(\mathcal{P}_j^* f, V_j)| &= |E(\widehat{f}, \widehat{V_j}) - E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V_j})| \\ &= |E(\widehat{f}, \widehat{V_j}) - E(\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f}, \widehat{V_j})| = \|\widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}_j f}\| - \|\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}_j}(\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f})\| \\ &\leq \|\widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}_j f} - \delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f} + \widehat{\mathcal{P}_j}(\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f})\| = \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}_j}((1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f})\| \\ &= \|(I - \widehat{\mathcal{P}_j})((1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f})\| \leq \|I - \widehat{\mathcal{P}_j}\| \cdot \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f}\| \leq \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f}\|. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} E(f, V_j^*) &= E(\widehat{f}, \widehat{V_j^*}) = \left(\|\widehat{f}\|^2 - \|\widehat{\mathcal{P}_j^* f}\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 - \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f}\|. \end{aligned}$$

Перейдём к доказательству второго утверждения леммы. Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j$ имеем $(1 + |k|^2)^{-\mu} \leq (1 + 2^{2j-2})^{-\mu} \leq 2^{(2-2j)\mu}$. Тогда для всякой

$f \in H^\mu$ получаем

$$\begin{aligned} E(f, V_j^*) &= \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j})\widehat{f}\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2^{(2-2j)\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2} \right)^{1/2} \cdot 2^{-j\mu} \cdot 2^\mu \cdot \|f\|_{H^\mu} \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\{V_j\}_{j \geq 0}$ – ПКМА в L_2 с масштабирующими функциями $\{\varphi_j\}_{j \geq 0}$. Порядок аппроксимации ПКМА равен $\mu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда μ_0 есть супремум таких положительных чисел μ , для которых найдутся такие положительные постоянные C_μ и $J_\mu \in \mathbb{N}$, что для всех целых $j \geq J_\mu$

$$(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \Lambda_j^2(k) \leq C_\mu \quad \text{для любого } k \in \mathcal{R}_j. \quad (3.2)$$

Доказательство. Докажем, что выполнение неравенства (3.2) для некоторого $\mu > 0$ равносильно тому, что для этого μ выполнены условия (3.1) из определения порядка аппроксимации ПКМА.

Для доказательства необходимости рассмотрим функции $f_k = e^{2\pi i k \cdot}$, $k \in \mathcal{R}_j$. Так как $\|f_k\|_{H^\mu}^2 = (1 + |k|^2)^\mu$, то из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} \Lambda_j^2(k) &= \sum_{n \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}_k(n)|^2 \Lambda_j^2(n) = E^2(f_k, V_j) \leq 2^{-2j\mu} C_\mu \|f_k\|_{H^\mu}^2 \\ &= 2^{-2j\mu} (1 + |k|^2)^\mu C_\mu, \end{aligned}$$

где постоянная C_μ берется из определения порядка аппроксимации и зависит только от μ .

Для доказательства достаточности воспользуемся результатами леммы 1 и леммы 2. Для $f \in H^\mu$ и $j \geq J_\mu$

$$\begin{aligned} E(f, V_j) &= E(f, V_j) - E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V_j}) + E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V_j}) \leq E(f, V_j^*) + E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V_j}) \\ &= E(f, V_j^*) + \left(\sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 |\Lambda_j(k)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq E(f, V_j^*) + \left(\sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 \cdot C_\mu (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon_j(f) \cdot 2^{-j\mu+\mu} \|f\|_{H^\mu} + \sqrt{C_\mu} \cdot 2^{-j\mu} \|f\|_{H^\mu} \leq 2^{-j\mu} C' \|f\|_{H^\mu}, \end{aligned}$$

где $C' = 2^\mu + \sqrt{C_\mu}$. Таким образом, множество чисел $\mu > 0$, удовлетворяющих условию (3.1) из определения порядка аппроксимации ПКМА, и из условий теоремы совпадают, а значит совпадают и их супремумы. $\square$

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что множество положительных чисел μ из определения порядка аппроксимации есть интервал $(0, \mu_0)$. Действительно, если неравенство (3.2) справедливо для некоторого $\mu_* > 0$, то оно будет справедливо и для всякого неотрицательного $\mu < \mu_*$ (с теми же постоянными C_{μ_*} и $J_{\mu_*} \in \mathbb{N}$). Заметим, что $\Lambda_j^2(k)$ не зависит от f и μ и, поскольку $(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-1} = 2^{2j} (1 + |k|^2)^{-1} > 1$ при $k \in \mathcal{R}_j$, получаем

$$(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \Lambda_j^2(k) \leq (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu_*} \Lambda_j^2(k) \leq C_{\mu_*}$$

для всех $j \geq J_{\mu_*}$.

Замечание 2. Все результаты данного раздела верны и для более общего случая подпространств пространства L_2 , инвариантных относительно сдвига, поскольку в доказательствах не используются особенности конструкции ПКМА. Однако, для наглядности дальнейшего изложения теории, касающейся всплесков, нам было удобно формулировать данные результаты сразу в терминах масштабирующих функций.

§4. ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ ФРЕЙМОМ ПАРСЕВАЛЯ ВСПЛЕСКОВ

Существует несколько различных способов построения фреймов Парсеваля всплесков. Среди них наиболее известны принцип унитарного расширения и скошенный принцип расширения (unitary and oblique extension principles), сформулированные для периодического случая в работе [5]. В данной работе мы будем использовать более общий способ построения всплесков, предложенный в статье [1].

Рассмотрим последовательность функций $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих масштабирующему уравнению

$$\widehat{\varphi_j}(n) = \sqrt{2} \widehat{a_{j+1}}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

для некоторых последовательностей $\widehat{a_{j+1}} \in \mathcal{S}(2^{j+1})$. Как будет показано далее, φ_j являются масштабирующими функциями и порождают ПКМА в L_2 при выполнении условий, необходимых для построения фрейма Парсеваля.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ зафиксируем положительное целое число ρ_j и определим всплеск-функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$, с помощью уравнения всплесков

$$\widehat{\psi_j^m}(n) = \sqrt{2} \widehat{b_{j+1}^m}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

для некоторых последовательностей $\widehat{b_{j+1}^m} \in \mathcal{S}(2^{j+1})$, $m = 1, \dots, \rho_j$. Для упрощения дальнейших обозначений мы полагаем $\varphi_0 = \psi_0^1$ и $\widehat{a_1}(n) = \widehat{b_1^1}(n)$.

Последовательности $\widehat{a_j}(n)$ и $\widehat{b_{j+1}^m}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, принято называть масками масштабирующих функций и масками всплесков соответственно.

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ определим рекурсивно последовательность $\theta_j(n) \in \mathcal{S}(2^j)$:

$$\sum_{m=1}^{\rho_j} \left| \widehat{b_{j+1}^m}(n) \right|^2 + \theta_j(n) \left| \widehat{a_{j+1}}(n) \right|^2 = \theta_{j+1}(n), \quad (4.3)$$

$$\theta_1(n) = \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b_1^m}(n) \right|^2, \quad \theta_0(n) = 0.$$

Следуя терминологии, предложенной в [1] и согласованной с таковой для непериодических функций в [11], числа $\theta_j(n)$ будем называть фундаментальными коэффициентами.

По критерию фреймовости, сформулированному в теореме 2 статьи [1], семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 2^j |\widehat{\varphi_j}(n)|^2 \theta_j(n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

и

$$\theta_j(n) \overline{\widehat{a_{j+1}}(n)} \widehat{a_{j+1}}(n + 2^j) + \sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{b_{j+1}^m}(n)} \widehat{b_{j+1}^m}(n + 2^j) = 0, \quad (4.5)$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

или $\widehat{\varphi_{j+1}}(n) = 0$, или $\widehat{\varphi_{j+1}}(2^j k + n) = 0$.

Неявные условия (4.4) и (4.5), налагаемые на маски всплесков, описаны в явном виде в теореме 4 статьи [1]. Для удобства чтения приведём это описание. Вначале определим вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_{j+1}(n), \tilde{b}_{j+1}^m(n) \in \mathcal{S}(2^{j+1})$, $j \in \mathbb{N}$, равенствами

$$\tilde{a}_j(n) = \left(\prod_{r=1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) e^{it_{\rho_{j-1}+1}^k}, \quad (4.6)$$

$$\tilde{b}_j^m(n) = \left(\prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) \sin t_m^k e^{it_{\rho_{j-1}+1+m}^k},$$

$k = 0$ для $n = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$, $k = 1$ для $n = 2^{j-1}, \dots, 2^j - 1$, $j \in \mathbb{N}$, где параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_{j-1} + 1$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \cos(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \sin(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

и произведение $\prod_{r=\rho_{j-1}+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k$ считаем равным 1, при $\theta_{j+1}(n + 2^j) \neq 0$.

Если $\theta_{j+1}(n + 2^j) = 0$, то параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, задаются произвольно.

Тогда по теореме 4 статьи [1] семейство

$$\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\},$$

удовлетворяющее условиям (4.1)–(4.2), образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\{j : \widehat{\varphi_j}(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b_j^m}(n) \right|^2 \neq 0 \right\} \neq \emptyset; \quad (4.8)$$

и

$$\prod_{r=j_1+1}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2^{j_1} \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b_{j_1}^m}(n) \right|^2 |\widehat{\varphi_{j_1}}(n)|^2, \quad (4.9)$$

где

$$j_1 := \min \left\{ j : \widehat{\varphi_j}(n) \neq 0 \text{ и } \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b_j^m}(n) \right|^2 \neq 0 \right\}. \quad (4.10)$$

При этом маски всплесков $\widehat{b_j^m}(n)$ задаются следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) произвольны,} & j \in \{1, \dots, j_0\}, \\
 & \text{(b) } 0, & j \in \{j_0+1, \dots, j_1-1\}, \\
 & \text{(c) } \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \widehat{b_{j_1}^m}(n) \widehat{b_{j_1}^m}(n+2^{j_1-1}) = 0, & j = j_1, \\
 & \text{(d) } \widehat{b_j^m}(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} |\widehat{b_{j_1}^m}(n)|^2} \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widehat{a_r}(n)|}{|\widehat{a_r}(n)|}, & j \in \{j_1+1, j_1+2, \dots\},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$j_0 := \min\{j : \widehat{\varphi_j}(n) \neq 0\} - 1. \tag{4.12}$$

Зафиксируем обозначения j_0 и j_1 за описанными выше индексами до конца текущего параграфа. В теореме 4 статьи [1] доказано, что вспомогательные коэффициенты $\widetilde{a}_{j+1}(n)$, $\widetilde{b}_{j+1}^m(n)$ связаны с масками масштабирующих функций и фундаментальными коэффициентами равенствами

$$\widetilde{a}_j(n) = \sqrt{\frac{\theta_{j-1}(n)}{\theta_j(n)}} \widehat{a}_j(n), \quad \widetilde{b}_j^m(n) = \sqrt{\frac{1}{\theta_j(n)}} \widehat{b}_j^m(n), \quad \text{если } \theta_j(n) \neq 0. \tag{4.13}$$

Далее для описания аппроксимационных свойств фреймов всплесков мы будем использовать следующие обозначения. Под частичной суммой разложения по системе всплесков, образующей фрейм Парсеваля уровня $j \in \mathbb{N}$, будем понимать

$$Q_j(f) = \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle S_r^l \psi_r^m. \tag{4.14}$$

Будем говорить, что фрейм Парсеваля имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu \geq 0$, если ν есть супремум таких неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие положительные постоянные C_γ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geq J_\gamma$ и всех функций $f \in H^\gamma$ верно неравенство

$$\|f - Q_j(f)\|_2 \leq 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}. \tag{4.15}$$

В работе [7] для жёстких фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, были установлены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсеваля имеет

заданный порядок аппроксимации. (Аналогичные условия для непериодических фреймов всплесков можно найти в [16].) Далее мы покажем, что эти результаты можно распространить и на периодические фреймы Парсеваля, построенные по описанной выше схеме. Условия в наших утверждениях будут сформулированы в терминах фундаментальных коэффициентов. Более того, в отличие от [7], в данной работе используется норма пространств Соболева H^ν вместо полунормы, что позволяет нам избавиться от дополнительного условия $\widehat{\varphi_j}(0)\widehat{\varphi_j}(2^j p) = \delta_{p0}$, $p \in \mathbb{Z}$, присутствующего в соответствующих теоремах статьи [7].

Теорема 2. Пусть система $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля, удовлетворяющий условиям (4.1)–(4.5). Тогда для любого $\nu \geq 0$ и для всех $f \in H^\nu$ и всех $j \in \mathbb{N}$

$$\|f - Q_j(f)\|^2 \leq \max \{2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2}, 2\tilde{C}_{j,3} + 4\tilde{C}_{j,4} + 2^{2\nu+1}\} \cdot 2^{-2j\nu} \|f\|_{H^\nu}^2, \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{j,1} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2)^2 \\ \tilde{C}_{j,2} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)|^2 \\ \tilde{C}_{j,3} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2 \cdot \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)|^2 \\ \tilde{C}_{j,4} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)|^2 \\ &\quad \times \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |q + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi_j}(2^j q + k)|^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Перепишем внутренние суммы в определении (4.14), используя равенство Парсеваля и свойства коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) \\ &= \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(q) \overline{\widehat{\psi_r^m}(q)} e^{2\pi i \cdot 2^{-r} l q} \cdot \widehat{\psi_r^m}(k) e^{-2\pi i \cdot 2^{-r} l k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathcal{R}_r} \widehat{f}(2^r p + n) \overline{\widehat{\psi_r^m}(2^r p + n)} e^{2\pi i \cdot 2^{-r} l n} \cdot \widehat{\psi_r^m}(k) e^{-2\pi i \cdot 2^{-r} l k}.$$

Последнее равенство получено заменой суммы по всем целым q на две суммы, исходя из представления $q = 2^j p + n$, где $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathcal{R}_j$. Также в показателях была учтена периодичность экспонент. Далее, меняя местами порядок суммирования и складывая экспоненты, применим уравнение всплесков (4.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathcal{R}_r} \widehat{f}(2^r p + n) \left(\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{\psi_r^m}(2^r p + n)} \widehat{\psi_r^m}(k) \right) \sum_{l \in \mathcal{R}_r} e^{2\pi i \cdot 2^{-r} l (n - k)} \\ &= 2^r \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^r p + k) \left(\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{\psi_r^m}(2^r p + k)} \widehat{\psi_r^m}(k) \right) \\ &= 2^r \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^r p + k) \left(2 \sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^r p + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) \overline{\widehat{\varphi_{r+1}}(2^r p + k)} \widehat{\varphi_{r+1}}(k) \right). \end{aligned}$$

Смена порядка суммирования оправдана абсолютной сходимостью ряда. Теперь, применяя (4.3) и (4.5), получим, что для чётных $p = 2q$

$$\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^{r+1}q + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) = \sum_{m=1}^{\rho_r} \left| \widehat{b_{r+1}^m}(k) \right|^2 = \theta_{r+1}(k) - \theta_r(k) |\widehat{a_{r+1}}(k)|^2,$$

а для нечётных $p = 2q + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^{r+1}q + 2^r + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) &= \sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^r + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) \\ &= -\theta_r(k) \overline{\widehat{a_{r+1}}(2^r + k)} \widehat{a_{r+1}}(k). \end{aligned}$$

Следовательно, из масштабирующего уравнения (4.1) имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) \\
&= 2^{r+1} \theta_{r+1}(k) \widehat{\varphi_{r+1}}(k) \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{r+1}q + k) \overline{\widehat{\varphi_{r+1}}(2^{r+1}q + k)} \\
&\quad - 2^r \theta_r(k) \widehat{\varphi_r}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^r p + k) \overline{\widehat{\varphi_r}(2^r p + k)}.
\end{aligned}$$

Просуммировав эти равенства по $0 \leq r \leq j-1$, получаем телескопическую сумму справа от знака равенства, то есть

$$\begin{aligned}
\widehat{Q_j(f)}(k) &= \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) \\
&= 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi_j}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)} \\
&\quad - 2\theta_1(k) \widehat{\varphi_1}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2p + k) \overline{\widehat{\varphi_1}(2p + k)} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\rho_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_0^m}(n)} \widehat{\psi_0^m}(k),
\end{aligned}$$

где

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_0^m}(n)} \widehat{\psi_0^m}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \cdot 2 \left(\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_1^m}(n)} \widehat{b_1^m}(k) \right) \overline{\widehat{\varphi_1}(n)} \widehat{\varphi_1}(k).$$

Принимая во внимание, что $\widehat{b_1^m} \in \mathcal{S}(2)$, по определению θ_1 , θ_0 и условию (4.5) для $j=0$ получаем, что сумма в скобках равна нулю, если n и k имеют различную чётность, и равна $\theta_1(k)$, если их чётности совпадают. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_0^m}(n)} \widehat{\psi_0^m}(k) = 2\theta_1(k) \widehat{\varphi_1}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2p + k) \overline{\widehat{\varphi_1}(2p + k)}.$$

Следовательно,

$$\widehat{Q_j(f)}(k) = 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi_j}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)}. \quad (4.17)$$

Теперь, следуя идее доказательства в [7], для $\nu > 0$ и $f \in H^\nu$, оценим разность

$$\begin{aligned} \|f - Q_j(f)\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{Q_j(f)}(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{Q_j(f)}(2^j p + k) - \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(f)}(k) - \widehat{f}(k) &= (2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2 - 1) \widehat{f}(k) + 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi_j}(k) \\ &\quad \times \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)}, \end{aligned}$$

для первой суммы в (4.18) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{Q_j(f)}(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2)^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &\quad + 2 \cdot 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2 \cdot \left| \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)} \right|^2. \end{aligned}$$

Умножая и деля каждый k -й коэффициент Фурье функции f в первой сумме на $2^{2j\nu}(1 + |k|^2)^\nu$ и каждый $(2^j p + k)$ -й коэффициент Фурье функции f на $(1 + |2^j p + k|^2)^\nu$ во второй сумме, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathcal{R}_j$, получаем для первой суммы

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2)^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j} k|^2)^{-\nu} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2)^2 2^{-2j\nu} (1 + k^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &\leq \widetilde{C}_{j,1} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 + k^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2, \end{aligned}$$

а для второй суммы с помощью неравенство Коши–Буняковского–Шварца приходим к оценке

$$\begin{aligned}
& 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \left| \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)} \right|^2 \\
& \leq 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j p + k|^2)^\nu |\widehat{f}(2^j p + k)|^2 \right) \\
& \quad \times \left(2^{-2j\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \\
& \leq \tilde{C}_{j,3} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j p + k|^2)^\nu |\widehat{f}(2^j p + k)|^2.
\end{aligned}$$

Теперь, используя (4.17) для двойной суммы в правой части равенства (4.18), аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{Q_j(f)}(2^j p + k) - \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 \\
& = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi}_j(2^j p + k) \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} - \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 \\
& \leq 2 \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 + 2 \cdot \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\
& \quad \times \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} \right|^2 \leq 2 \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 \quad (4.19) \\
& \quad + 4 \cdot 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\
& \quad + 4 \cdot 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \\
& \quad \times \left| \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} \right|^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что $(1 + |2^j q + k|^2)^{-\nu} \leq 2^{2\nu}$ для всех $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathcal{R}_j$. Тогда вновь, умножая и деля каждый коэффициент Фурье f на $2^{2j\nu}(1 + |k|^2)^\nu$ для k -го коэффициента, $k \in \mathcal{R}_j$, и на $(1 + |2^j p + k|^2)^\nu$ для $(2^j p + k)$ -го коэффициента, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathcal{R}_j$, получаем следующие оценки. Для первой суммы справа от знака равенства в (4.19)

$$\sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 \leq 2^{2\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j p + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2$$

Для второй суммы справа от знака равенства в (4.19)

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\ &= 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{-2j\nu} (1 + |k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 (2^{-2j} + |2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \\ &\quad \times \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \leq \tilde{C}_{j,2} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \end{aligned}$$

Наконец, используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца для последней оставшейся суммы в правой части (4.19), имеем

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \left| \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} \right|^2 \\ &\leq 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \\ &\quad \times \left(2^{-2j\nu} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j q + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j q + k) \right|^2 \right)^2 \\ &\leq \tilde{C}_{j,4} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j q + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j q + k) \right|^2 \end{aligned}$$

Складывая все полученные неравенства, приходим к искомой оценке

$$\begin{aligned} \|f - Q_j(f)\|_2^2 &\leq 2^{-2j\nu} \left(2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2} \right) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \\ &\quad + 2^{-2j\nu} \left(2^{1+2\nu} + 2\tilde{C}_{j,3} + 4\tilde{C}_{j,4} \right) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j q + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j q + k) \right|^2 \\ &\leq \max \left\{ 2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2}, 2\tilde{C}_{j,3} + 4\tilde{C}_{j,4} + 2^{2\nu+1} \right\} \cdot 2^{-2j\nu} \|f\|_{H^\nu}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. Фрейм Парсеваля $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m=1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (4.1)–(4.5), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда ν_0 есть супремум таких положительных чисел ν , для которых найдутся такие положительные постоянные C_ν и $J_\nu \in \mathbb{N}$, зависящие только от ν , что

$$\max \left\{ \tilde{C}_{j,1}, \tilde{C}_{j,2} \right\} \leq C_\nu, \quad \forall j \geq J_\nu. \quad (4.20)$$

Доказательство. Покажем, что для выполнения условия (4.15) для некоторого $\nu > 0$ необходимо и достаточно выполнение условия (4.20) теоремы для этого ν . Тогда множества чисел ν из условия теоремы и γ из определения порядка аппроксимации фреймом совпадут, а значит, совпадут и их супремумы. Далее в доказательстве индексы ν постоянных C_ν и J_ν для упрощения будем опускать, подразумевая, что они зависят только от ν .

Начнём с доказательства необходимости. Пусть

$$\|f - Q_j(f)\|_2 \leq 2^{-j\nu} C \|f\|_{H^\nu}$$

для $j \geq J$ и некоторых фиксированных констант J, C и $\nu \geq 0$. Зафиксируем $j \geq J$ и $k \in \mathcal{R}_j$ и рассмотрим функцию $f \in H^\nu$ такую, что $\widehat{f}(n) = \delta_{kn}$. Тогда для всех $n \in \mathcal{R}_j, p \in \mathbb{Z}$ из равенства (4.17) следует, что

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(f)}(n + 2^j p) &= 2^j \theta_j(n) \widehat{\varphi_j}(n + 2^j p) \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + n) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j q + n)} \\ &= 2^j \theta_j(n) \widehat{\varphi_j}(n + 2^j p) \overline{\widehat{\varphi_j}(n)} \delta_{kn}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f - Q_j(f)\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(2^j p + n) - 2^j \theta_j(n) \widehat{\varphi}_j(n + 2^j p) \overline{\widehat{\varphi}_j(n)} \delta_{kn} \right|^2 \\ &= \left(1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \right)^2 + 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(k + 2^j p)|^2. \end{aligned}$$

Так как $\|f\|_{H^\nu}^2 = (1 + |k|^2)^\nu$, то

$$\begin{aligned} &\left(1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \right)^2 + 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(k + 2^j p)|^2 \\ &\leq C \cdot 2^{-2j\nu} (1 + |k|^2)^\nu. \end{aligned}$$

Тогда и каждое слагаемое не превосходит $C \cdot 2^{-2j\nu} (1 + |k|^2)^\nu$. Для завершения доказательства неравенства (4.20) осталось вспомнить определения величин $\widetilde{C}_{j,1}$ и $\widetilde{C}_{j,2}$.

Перейдём к доказательству достаточности. Для этого будет достаточно показать, что

$$2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \leq 1 \quad \text{для всех } k \in \mathcal{R}_j. \quad (4.21)$$

Действительно, если справедливо неравенство (4.21), то, в частности, $2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \leq 1$ и, учитывая что $(2^{-2j} + |p + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} \leq 2^{2\nu}$ для $\nu \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} &2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\ &\leq 2^{2\nu} (2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2) \cdot \left(2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \leq 2^{2\nu} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |q + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)|^2 \\ &\leq 2^{2\nu} \left(2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \leq 2^{2\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому величины $\tilde{C}_{j,3}$ и $\tilde{C}_{j,4}$ из неравенства (4.16) не превосходят $2^{2\nu}$ и, следовательно, по теореме 2

$$\|f - Q_j(f)\|^2 \leq \max \left\{ 2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2}, 7 \cdot 2^{2\nu} \right\} \cdot 2^{-2j\nu} \|f\|_{H^\nu}^2$$

для $f \in H^\nu$, $j \geq J$.

Вернёмся к доказательству неравенства (4.21). Зафиксируем $j \geq J$ и $k \in \mathcal{R}_j$. Из (4.12), (4.10) и (4.3) имеем

$$\widehat{\varphi}_j(k) = 0 \text{ для } j \leq j_0 \text{ и } \theta_j(k) = 0 \text{ для } j_0 < j \leq j_1 - 1.$$

Так как для каждого $r \geq j_1$ коэффициенты $\widehat{a}_r(k)$ отличны от нуля, разделив обе части равенства (4.9) на $2^{j-j_1} \prod_{r=j_1+1}^j |\widehat{a}_r(k)|^2$ и применяя масштабирующее уравнение (4.1), получаем

$$2^j |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 = \left(\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b}_{j_1}^m(k) \right|^2 \right)^{-1} \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widetilde{a}_r(k)|^2}{|\widehat{a}_r(k)|^2} \prod_{r=j_1+1}^{\infty} |\widetilde{a}_r(k)|^2.$$

Условия (4.11) и (4.3) влекут $\theta_{j_1}(k) = \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b}_{j_1}^m(k) \right|^2$, откуда также следует, что $\theta_j(k) \neq 0$ для $j \geq j_1$. В то же время (4.13) приводит к

$$\prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widetilde{a}_r(k)|^2}{|\widehat{a}_r(k)|^2} = \prod_{r=j_1+1}^j \frac{\theta_{r-1}(k)}{\theta_r(k)} = \frac{\theta_{j_1}(k)}{\theta_j(k)}.$$

Следовательно,

$$2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 = \prod_{r=j_1+1}^{\infty} |\widetilde{a}_r(k)|^2, \quad j \geq j_1. \quad (4.22)$$

Теперь, выражая $\widehat{a}_j(k)$ и $\widehat{b}_j^m(k)$ через коэффициенты $\widetilde{a}_j(k)$, $\widetilde{b}_j^m(k)$ и $\theta_j(k)$ из (4.13) и подставляя их в (4.3) и (4.5), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \overline{\widetilde{a}_j(k)} \widetilde{a}_j(k + 2^{j-1}) + \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \overline{\widetilde{b}_j^m(k)} \widetilde{b}_j^m(k + 2^{j-1}) = 0, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widetilde{b}_j^m(k) \right|^2 + |\widetilde{a}_j(k)|^2 = 1, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widetilde{b}_j^m(k + 2^{j-1}) \right|^2 + |\widetilde{a}_j(k + 2^{j-1})|^2 = 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$M_j(k) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_j^1(k) & \tilde{b}_j^1(k + 2^{j-1}) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_j^{\rho_{j-1}}(k) & \tilde{b}_j^{\rho_{j-1}}(k + 2^{j-1}) \end{pmatrix}$$

и перепишем систему в матричном виде

$$M_j(k)^* M_j(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\tilde{a}_j(k)} \\ \tilde{a}_j(k + 2^{j-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_j(k) & \tilde{a}_j(k + 2^{j-1}) \end{pmatrix},$$

где $M_j(k)^*$ обозначает эрмитово сопряжение матрицы $M_j(k)$. Ясно, что определитель матрицы в левой части равенства неотрицателен, а определитель матрицы в правой части равенства равен $1 - |\tilde{a}_j(k)|^2 - |\tilde{a}_j(k + 2^{j-1})|^2$, поэтому,

$$|\tilde{a}_j(k)|^2 + |\tilde{a}_j(k + 2^{j-1})|^2 \leq 1. \quad (4.23)$$

Далее, следуя идеям из [7] и [8], рассмотрим

$$2^j \theta_j(k) \sum_{p=-M}^M |\hat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=-M}^M \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2.$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется неравенство $2^{N-j} \geq 2M + 1$, поэтому

$$\sum_{p=-M}^M \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2 \leq \sum_{p=-M}^{2^{N-j-1}-M} \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2.$$

Воспользуемся 2^{j+1} -периодичностью последовательности $\tilde{a}_{j+1}(\cdot)$ и разделим сумму на две суммы – по чётным и по нечётным индексам. Тогда

$$\begin{aligned} L_1(0) &= \sum_{p=-M}^{2^{N-j-1}-M} \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2 = \sum_{s=0}^{2^{N-j-1}-1} \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j s + k - 2^j M)|^2 \\ &= |\tilde{a}_{j+1}(k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-1}-1} \prod_{r=j+2}^N |\tilde{a}_r(2^{j+1} s + k - 2^j M)|^2 \right) \\ &\quad + |\tilde{a}_{j+1}(2^j + k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-1}-1} \prod_{r=j+2}^N |\tilde{a}_r(2^{j+1} s + 2^j + k - 2^j M)|^2 \right) \end{aligned}$$

$$= |\tilde{a}_{j+1}(k - 2^j M)|^2 L_2(0) + |\tilde{a}_{j+1}(2^j + k - 2^j M)|^2 L_2(1),$$

где $L_2(0)$ и $L_2(1)$ – сокращённые обозначения соответствующих выражений в скобках. Пользуясь 2^r -периодичностью последовательности $\tilde{a}_r(\cdot)$ для $r = j + 2, \dots, N - j - 1$, будем повторять разбиения сумм на суммы по чётным и по нечётным индексам. Обозначая получающиеся в скобках суммы через $L_n(l)$, приходим к выражению

$$\begin{aligned} L_n(l) &= |\tilde{a}_{j+n}(2^j l + k - 2^j M)|^2 \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-n}-1} \prod_{r=j+n+1}^N |\tilde{a}_r(2^{j+n} s + 2^j l + k - 2^j M)|^2 \right) \\ &+ |\tilde{a}_{j+n}(2^j l + 2^{n+j-1} + k - 2^j M)|^2 \\ &\times \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-n}-1} \prod_{r=j+n+1}^N |\tilde{a}_r(2^{j+n} s + 2^{n+j-1} + 2^j + k - 2^j M)|^2 \right), \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots, N - j - 1$, $l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. На $N - j - 1$ -м шаге мы получаем равенство

$$\begin{aligned} L_{N-j-1}(l) &= |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + k - 2^j M)|^2 \\ &\times \left(\sum_{s=0}^1 |\tilde{a}_N(2^{N-1} s + 2^j l + k - 2^j M)|^2 \right) \\ &+ |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + 2^{N-2} + k - 2^j M)|^2 \\ &\times \left(\sum_{s=0}^1 |\tilde{a}_N(2^{N-1} s + 2^{N-2} + 2^j l + k - 2^j M)|^2 \right). \end{aligned}$$

Из (4.23) следует, что

$$\sum_{s=0}^1 |\tilde{a}_N(2^{N-1} s + \cdot)|^2 = |\tilde{a}_N(\cdot)|^2 + |\tilde{a}_N(2^{N-1} + \cdot)|^2 \leq 1.$$

Ещё раз используем (4.23),

$$L_{N-j-1}(l) \leq |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + k - 2^j M)|^2 + |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + 2^{N-2} + k - 2^j M)|^2 \leq 1.$$

Тогда по рекурсии получаем, что для каждого $n \leq N - j - 1$ и $l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ сумма $L_n(l)$ не превосходит 1. Поэтому

$$\sum_{p=-M}^M \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2 \leq L_1(0) \leq 1.$$

Таким образом, неравенство (4.21) доказано, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Далее мы переходим к обсуждению взаимосвязи между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим ему ПКМА. В предложении 3.1 и теореме 3.1 статьи [6] доказано, что первая аксиома ПКМА $V_j \subseteq V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ равносильна тому, что для масштабирующих функций, порождающих ПКМА, выполнено масштабирующее уравнение (4.1), а плотность объединения пространств V_j в L_2 равносильна тому, что множество

$$\{n \in \mathbb{Z} : \widehat{\varphi}_j(n) = 0 \text{ для всех } j \in \mathbb{Z}_+\}$$

пусто. Последнее условие эквивалентно выполнению условия

$$\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \neq \emptyset$$

при всех $n \in \mathbb{Z}$, которое следует из (4.8). Таким образом, для фрейма Парсеваля, удовлетворяющего условиям (4.1)–(4.5), подпространства, порождённые $2^{-j}k$ -сдвигами функций φ_j , образуют ПКМА.

Для фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ взаимосвязь между порядками аппроксимации изучалась в [4].

Теорема 4. *Фрейм Парсеваля $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m=1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (4.1)–(4.5), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 = \min\{\mu_0, \gamma_0\}$, где $\mu_0 \geq 0$ – порядок аппроксимации соответствующим ПКМА и $\gamma_0 \geq 0$ есть супремум положительных чисел γ , для которых найдутся такие положительные постоянные C_γ и J_γ , что*

$$\max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\gamma} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 \leq C_\gamma, \quad j \geq J_\gamma. \quad (4.24)$$

Доказательство. Согласно теореме 3 достаточно показать, что неравенство (4.20) выполнено для всех $\nu = \nu(\mu, \gamma) = \min\{\mu, \gamma\}$ и только для них, где μ – положительное число, для которого выполнено условие (3.1) из определения порядка аппроксимации ПКМА, а γ из условия теоремы. Заметим, что если неравенство (4.20) выполняется для

некоторого положительного ν_* , то оно остаётся верным и для всякого положительного числа ν , меньшего ν_* , поскольку $2^{2j}(1 + |k|^2)^{-1} > 1$ для всех $k \in \mathcal{R}_j$. Аналогично для неравенства (4.24), то есть множество положительных чисел γ , для которых выполнено условие теоремы (4.24), образует промежуток на положительной полуоси. Тогда из (4.24) следует, что для выбранного ν имеет место оценка $\tilde{C}_{j,1} \leq C_\gamma$, так как $\nu \leq \gamma$. Теперь рассмотрим $\tilde{C}_{j,2}$ для данного ν . Неравенство (4.24) и определение Λ_j дают следующую оценку:

$$\begin{aligned} & 2^{2j}\theta_j^2(k)|\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\ &= 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot 2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \\ & \times \frac{\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2} \leq 1 \cdot 1 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \cdot \Lambda_j^2(k) \leq C_\mu, \end{aligned}$$

где C_μ есть константа из определения порядка аппроксимации ПКМА. Следовательно, условие (4.20) выполнено для всех $\nu = \min\{\mu, \gamma\}$ с постоянной $C = \max\{C_\gamma, C_\mu\}$. Учитывая, что множество положительных чисел μ , для которых выполнено условие (3.1), образует интервал $(0, \mu_0)$, а множество положительных чисел γ из условия теоремы, как было отмечено выше, также образуют интервал $(0, \gamma_0)$, то либо $(0, \mu_0) \subseteq (0, \gamma_0)$, либо $(0, \gamma_0) \subseteq (0, \mu_0)$. Тогда неравенство (4.20) выполняется только для чисел $\nu = \min\{\mu, \gamma\}$. Следовательно, порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 = \sup \nu = \min\{\mu_0, \gamma_0\}$. $\square$

Замечание 3. Из условий (4.22) и (4.9) следует, что неравенство (4.24) принимает вид

$$\max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j\gamma}(1 + |k|^2)^{-\nu} \left(1 - \frac{2^{j_1} \sum_{m=1}^{\rho_{j_1}-1} |\widehat{b}_{j_1}^m(k)|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(k)|^2}{\prod_{r=j_1+1}^j |\tilde{a}_r(k)|^2} \right)^2 \leq C.$$

Можно заметить, что порядок аппроксимации зависит от скорости сходимости бесконечного произведения в (4.9). Эта скорость в свою очередь зависит от вспомогательных коэффициентов (4.6), которые можно выбрать практически произвольно, см. (4.7). Таким образом,

теоремы 1, 3 и 4 дают конструктивный способ построения фреймов Парсевала с требуемым порядком аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Горшанова, Е. А. Лебедева, *О критериях для фреймов периодических всплесков*. — Матем. заметки, **118**, No. 2 (2025).
2. C. De Boor, R. A. DeVore, A. Ron, *Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$* . — Trans. Amer. Math. Soc., **341**, No. 2 (1994), 787–806.
3. C. K. Chui, J. Z. Wang, *A general framework of compact supported splines and wavelets*. — J. Approx. Th., **71**, No. 3 (1992), 263–304.
4. I. Daubechies, B. Han, A. Ron, Z. Shen, *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames*. — J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **14**, No. 1 (2003), 1–46.
5. S. S. Goh, K. M. Teo, *Extension principles for tight wavelet frames of periodic functions*. — J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **25**, No. 2 (2008), 168–186.
6. S. S. Goh, K. M. Teo, *Wavelet frames and shift-invariant subspaces of periodic functions*. — J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **20**, No. 3 (2006), 326–344.
7. S. S. Goh, B. Han, Z. Shen, *Tight periodic wavelet frames and approximation orders*. — J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **31**, No. 2 (2011), 228–248.
8. B. Han, Z. Shen, *Compactly supported symmetric C^∞ wavelets with spectral approximation order*. — SIAM J. Math. Anal., **40**, No. 3 (2008), 905–938.
9. Y. W. Koh, S. L. Lee, H. H. Tan, *Periodic orthogonal splines and wavelets*. — J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **2**, No. 3 (1995), 201–218.
10. А. П. Петухов, *Периодические всплески*. — Матем. сб., **188**, No. 10 (1997), 69–94.
11. A. Ron, Z. Shen, *Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator*. — J. Functional Anal., **148**, No. 2 (1997), 408–447.
12. M. Skopina, *Multiresolution analysis of periodic functions*. — East J. Approx., **3**, No. 2 (1997), 203–224.
13. В. А. Желудев, *О вейвлетах на базе периодических сплайнов*. — Докл. РАН, **335**, No. 1 (1994), 9–13.
14. Yu. Kolomoitsev, A. Krivoshein, M. Skopina, *Approximation by periodic multivariate quasi-projection operators*. — J. Math. Anal. Appl., **489**, No. 2 (2020), 124192.
15. А. Ю. Улицкая, *Точные оценки среднеквадратичных приближений классов периодических свёрток пространствами сдвигов*. — Алгебра и анализ, **32**, No. 2 (2020), 201–228.
16. K. Jetter, D.-X. Zhou, *Order of linear approximation from shift-invariant spaces*. — Constr. Approx., **11** (1995), 423–438.

Gorshanova A. A., Lebedeva E. A. Approximation orders of periodic Parseval wavelet frames.

Approximation properties are studied for periodic Parseval wavelet frames and for corresponding families of refinable functions. Approximation properties are described in terms of the approximation orders. Necessary

and sufficient conditions are given for Parseval wavelet frames and generating multiresolution analysis to provide specific approximation orders are given. Also, the relationship between the approximation orders provided by a periodic multiresolution analysis and by a wavelet frame is revealed.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр., 28,
Петродворец, 198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: an.gor275@gmail.com
ealebedeva2004@gmail.com

Поступило 4 августа 2025 г.