

В. И. Васюнин

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. III

§13. ЕЩЁ РАЗ О ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЁЛКАХ

Мы уже довольно много знаем о горизонтальных ёлках. Общая теория была описана в разделе 4 статьи [4], потом прилагалась к частным случаям в разделах 5 и 6 той же статьи и в разделе 8 следующей статьи [5]. Наши знания обогатились разбором примеров с граничными условиями в виде полиномов третьей степени. Теперь, начиная третью статью из серии этих работ, мы попробуем выделить ещё некоторые общие свойства горизонтальных ёлок, которые позволят нам с одной стороны не повторять одни и те же аргументы при рассмотрении конкретных примеров, а с другой — понять, какие параметры граничных значений определяют фолляцию в общем случае.

В данном разделе мы рассмотрим вопрос о том, в каких точках границы могут заканчиваться горизонтальные ёлки. Понятно, что есть четыре симметричных случая: 1) левая ёлка заканчивается на верхней границе, 2) левая ёлка заканчивается на нижней границе, 3) правая ёлка заканчивается на верхней границе и 4) правая ёлка заканчивается на нижней границе. Мы подробно изучим, конечно, только один случай, первый из перечисленных, однако для удобства приведём формулировки утверждений для всех четырёх случаев, как, например, это сделано в предложениях 6.1–6.4.¹

Теорема 13.1. *Для того, чтобы точка $(u + \varepsilon, \varepsilon)$ могла быть вершиной левой ёлки в полосе Ω_ε , необходимо выполнения следующих условий:*

- (1) $D_+(u, \varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon) \geq 0$;

Ключевые слова: функция Беллмана, мартингальное преобразование, диагонально вогнутая функция.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант номер 24-71-10011 (<https://rscf.ru/project/24-71-10011/>).

¹Здесь, возможно, уместно отметить неприятную опечатку в формулировке предложения 6.4. Там должно быть условие $f_-'''(u_0) < 0$, а не $f_+'''(u_0) < 0$.

$$(3) \quad f_+'''(u + \varepsilon) \geq 0.$$

Доказательство. Как обычно, для исследования левых ёлок мы рассматриваем поле (5.3), одна из интегральных линий которого, будучи сдвинута вправо на ε , даёт ствол ёлки. Поскольку в любой неособой точке поля (5.3) интегральная линия пересекает верхнюю границу полосы с наклоном -1 , а ствол любой левой горизонтальной ёлки, пересекающей верхнюю границу, должен иметь наклон в промежутке от нуля до единицы, мы делаем вывод, что точка (u, ε) обязана быть стационарной точкой поля (5.3), то есть выполнено условие (1).

Матрица Якоби в такой точке была исследована ещё в разделе 5 (см. [4]). Повторим для удобства формулы (5.17) и (5.18), используя обозначение, введённое в формуле (8.20) ([5]):

$$J(u, \varepsilon) = \varepsilon (f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3s \\ -1 & s - 1 \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

где $s = 1 + \varepsilon \kappa_+^L$ и

$$\kappa_+^L = \frac{2f_+'''(u + \varepsilon)}{f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon)}. \quad (13.2)$$

Напомним, что здесь предполагается, что точка (u, ε) лежит на кривой $D_+ = 0$.

Мы уже неоднократно считали собственные числа и собственные векторы матрицы в (13.1), это – корни многочлена $\lambda^2 - s\lambda - 2s$, то есть

$$\lambda = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 8s}}{2} \text{ и соответствующие векторы суть } \begin{pmatrix} s - 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Нас не интересуют не вещественные собственные значения, поскольку в этом случае (u, ε) – спиральная стационарная точка, и к ней ни одна интегральная линия не подходит монотонно возрастая с наклоном в интервале $[0, 1]$, которые нас только и интересуют. Далее, нас не интересует собственное число, в котором корень берётся со знаком плюс, так как в этом случае $s - \lambda = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 + 8s}) \leq 0$, и $s - 1 - \lambda \leq -1$. То есть у этого собственного вектора наклон отрицательный.

Итак, мы будем сравнивать интегральную кривую, проходящую в точку (u, ε) с наклоном

$$\frac{1}{s - 1 - \lambda} = \frac{2}{s - 2 + \sqrt{s^2 + 8s}}, \quad (13.4)$$

и кривую $D_+ = 0$, наклон которой в этой точке равен

$$\frac{1}{2s-1}. \quad (13.5)$$

Последнее утверждение мы неоднократно проверяли, но повторим это ещё раз. Оно следует из дифференцирования тождества $2x_2 D_+ = 0$:

$$[f_+'' - f_-'' - 2x_2 f_+'''] dx_1 - [f_+'' - f_-'' + 2x_2 f_+'''] dx_2 = 0. \quad (13.6)$$

Как уже упоминалось, наклон нашей интегральной линии должен лежать в промежутке $[0, 1]$, что, глядя на формулу (13.4), переписывается в виде

$$s - 2 + \sqrt{s^2 + 8s} \geq 2.$$

А это условие равносильно неравенству $s \geq 1$ или, что то же самое, $\kappa_+^L \geq 0$.

Теперь ещё отметим, что при $s > 1$ выполняется строгое неравенство

$$\frac{2}{s - 2 + \sqrt{s^2 + 8s}} > \frac{1}{2s - 1},$$

то есть наклон интересующей нас интегральной линии в точке (u, ε) строго больше наклона кривой $D_+ = 0$. Это означает, что наша интегральная кривая в окрестности точки (u, ε) идёт внутрь полосы Ω_ε правее кривой $D_+ = 0$.

Теперь обратимся к оставленным на время условиям (2) и (3). Предположим, что условие (2) не выполнено, то есть справедливо строгое неравенство

$$\frac{\partial D_+}{\partial x_1}(u, \varepsilon) < 0. \quad (13.7)$$

Это в частности означает, во-первых, что величины κ_+^L и s корректно определены, а во-вторых, что справа от кривой $D_+ = 0$ у нас расположена область, где $D_+ < 0$. Таким образом, интересующая нас проходящая там интегральная кривая не может порождать ствол левой ёлки. Поэтому условие (2) обязано выполняться.

Если неравенство в (2) строгое, то корректно определена величина κ_+^L формулой (13.2), и тогда доказанное неравенство $\kappa_+^L \geq 0$ равносильно условию (3).

Осталось рассмотреть вырожденный случай

$$f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon) = 0. \quad (13.8)$$

Предположим, что условие (3) не выполнено, то есть $f_+'''(u + \varepsilon) < 0$. В этом случае равенство (13.8) влечёт соотношение

$$f_+''(u + \varepsilon) < f_-''(u - \varepsilon), \quad (13.9)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} 2\varepsilon D_-(u, \varepsilon) &= f_+'(u + \varepsilon) - f_-'(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_-''(u - \varepsilon) \\ &< f_+'(u + \varepsilon) - f_-'(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+''(u + \varepsilon) = 2\varepsilon D_+(u, \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимое условие $D_-(u, \varepsilon) \geq 0$ не выполняется, а следовательно, точка $(u + \varepsilon, \varepsilon)$ не может быть вершиной ёлки. Тем самым мы проверили необходимость условия (3). $\square$

Теперь, как и обещали, сформулируем без доказательства три симметричных утверждения.

Теорема 13.2. *Для того, чтобы точка $(u + \varepsilon, -\varepsilon)$ могла быть вершиной левой ёлки в полосе Ω_ε , необходимо выполнения следующих условий:*

- (1) $D_-(u, -\varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u - \varepsilon) - f_-''(u + \varepsilon) + 2\varepsilon f_-'''(u + \varepsilon) \leq 0$;
- (3) $f_-'''(u + \varepsilon) \geq 0$.

Теорема 13.3. *Для того, чтобы точка $(u - \varepsilon, \varepsilon)$ могла быть вершиной правой ёлки в полосе Ω_ε , необходимо выполнения следующих условий:*

- (1) $D_+(u, -\varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u - \varepsilon) - f_-''(u + \varepsilon) + 2\varepsilon f_+'''(u - \varepsilon) \geq 0$;
- (3) $f_+'''(u - \varepsilon) \leq 0$.

Теорема 13.4. *Для того, чтобы точка $(u - \varepsilon, -\varepsilon)$ могла быть вершиной правой ёлки в полосе Ω_ε , необходимо выполнения следующих условий:*

- (1) $D_-(u, \varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_-'''(u - \varepsilon) \leq 0$;
- (3) $f_-'''(u - \varepsilon) \leq 0$.

Перейдём к аналогичным достаточным условиям построения горизонтальной ёлки с вершиной на границе. Оказывается, что если мы в условиях (2) и (3) предыдущих утверждений заменим нестрогие неравенства строгими, то получим достаточные условия возможности построения соответствующих горизонтальных ёлок.

Теорема 13.5. *Для того, чтобы в полосе Ω_ε можно было построить левую ёлку с вершиной в точке $(u + \varepsilon, \varepsilon)$, достаточно выполнения следующих условий:*

- (1) $D_+(u, \varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon) > 0$;
- (3) $f_+'''(u + \varepsilon) > 0$.

Доказательство. Наша задача сводится к тому, чтобы показать существование интегральной кривой ℓ_ε поля (5.3), которая входит в полосу Ω_ε через точку (u, ε) и в некоторой окрестности этой точки проходит в той области, где выполняются неравенства $D_+ > 0$ и $D_- > 0$. Почти весь технический материал у нас уже подготовлен в доказательстве теоремы 13.1. Так, мы знаем, что линия ℓ_ε выходит из точки (u, ε) с наклоном (13.4), который больше наклона (13.5) кривой $D_+ = 0$, если $\kappa_+^L > 0$, что гарантируется условиями (2) и (3). Следовательно, кривая ℓ_ε идёт правее кривой $D_+ = 0$, а справа от кривой $D_+ = 0$ располагается область, где $D_+ > 0$, что тоже вытекает из условия (2). Неравенство $D_- > 0$ гарантируется сочетанием условий (2) и (3). Действительно,

$$\begin{aligned} D_-(u, \varepsilon) &= D_+(u, \varepsilon) + [f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon)] = \\ &= [f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon)] + 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon) > 0. \end{aligned}$$

По непрерывности положительность функции D_- сохраняется и в некоторой окрестности точки (u, ε) . Это рассуждение завершает доказательство. $\square$

Формулировка симметричных утверждений очевидна.

Теорема 13.6. *Для того, чтобы в полосе Ω_ε можно было построить левую ёлку с вершиной в точке $(u + \varepsilon, -\varepsilon)$, достаточно выполнения следующих условий:*

- (1) $D_-(u, -\varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u - \varepsilon) - f_-''(u + \varepsilon) + 2\varepsilon f_-'''(u + \varepsilon) < 0$;
- (3) $f_-'''(u + \varepsilon) > 0$.

Теорема 13.7. *Для того, чтобы в полосе Ω_ε можно было построить правую ёлку с вершиной в точке $(u - \varepsilon, \varepsilon)$, достаточно выполнения следующих условий:*

- (1) $D_+(u, -\varepsilon) = 0$;
- (2) $f_+''(u - \varepsilon) - f_-''(u + \varepsilon) + 2\varepsilon f_+'''(u - \varepsilon) > 0$;
- (3) $f_+'''(u - \varepsilon) < 0$.

Теорема 13.8. *Для того, чтобы в полосе Ω_ε можно было построить правую ёлку с вершиной в точке $(u - \varepsilon, -\varepsilon)$, достаточно выполнения следующих условий:*

- (1) $D_-(u, \varepsilon) = 0$;
- (2) $f''_+(u + \varepsilon) - f''_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f'''_-(u - \varepsilon) < 0$;
- (3) $f'''_-(u - \varepsilon) < 0$.

§14. БОЛЬШИЕ КАРМАНЫ

Наша ближайшая задача – описать эволюцию двух однонаправленных пробоев. Будем для конкретности рассматривать левые пробои и докажем следующую теорему.

Теорема 14.1. *Предположим, что существует такое значение ε_0 параметра ε , что*

- *в некоторой окрестности числа ε_0 существует функция $u = u_+(\varepsilon)$, удовлетворяющая условиям теоремы 13.5, и при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ порождающая SW-пробой на области $\Omega_\varepsilon^{\text{sw}}(v_-, u_+)$;*
- *в некоторой окрестности числа ε_0 существует функция $u = u_-(\varepsilon)$, удовлетворяющая условиям теоремы 13.6, порождающая NW-пробой на области $\Omega_\varepsilon^{\text{nw}}(v_+, u_-)$;*
- *при $\varepsilon < \varepsilon_0$ первая ёлка располагается правее второй (то есть $u_-(\varepsilon) < v_-(\varepsilon)$), между ними располагается область с простой левой фоллиацией $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(u_-, v_-)$, и значение ε_0 определяется уравнением $v_-(\varepsilon_0) = u_-(\varepsilon_0)$.*

Тогда в некоторой правой окрестности числа ε_0 две описанные ёлки “склеиваются” в одну в том смысле, что возникает новая левая ёлка, вершина которой находится в точке $(u_+(\varepsilon) + \varepsilon, \varepsilon)$, и при $\varepsilon \searrow \varepsilon_0$ стволовая функция $T(u)$ этой новой ёлки стремится к стволовой функции первой ёлки, если $u \geq u_-(\varepsilon_0) + \varepsilon_0$, и к стволовой функции второй ёлки, если $u \leq u_-(\varepsilon_0) + \varepsilon_0$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что возможность построения упомянутых в формулировке пробоев влечёт существование точек с координатами u_{01} и u_{02} , на оси $x_2 = 0$, в которых интегральные линии нашего поля пересекают эту ось. См. рисунок 25. (Пробои будут пересекать ось $x_2 = 0$, соответственно, в точках $u_{01} + \varepsilon$ и $u_{02} + \varepsilon$.)

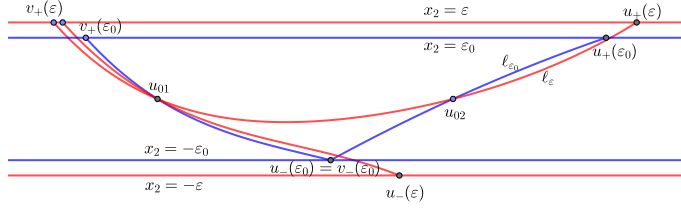


Рис. 25. Интегральные кривые при ε_0 и при $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Итак, при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ наша локальная фоллиация имеет вид:²

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon^R(*, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+ + \varepsilon, \varepsilon), (u_- + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_-, v_-) \cup \\ \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_- + \varepsilon, \varepsilon), (u_+ + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+, *) . \end{aligned} \quad (14.1)$$

При $\varepsilon = \varepsilon_0$ область $\Omega_\varepsilon^L(u_-, v_-)$ схлопывается в отрезок, и далее такая фоллиация существовать не может. И утверждение доказываемой теоремы заключается в том, что при $\varepsilon > \varepsilon_0$ локальная фоллиация примет вид:

$$\Omega_\varepsilon^R(*, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+ + \varepsilon, \varepsilon), (u_+ + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+, *) . \quad (14.2)$$

Заметим, что по условиям теоремы при $\varepsilon > \varepsilon_0$ мы могли бы продолжать строить пробой из точки $(u_- + \varepsilon, -\varepsilon)$, но мы не сможем его никак соединить с фоллиацией, приходящей справа. А та ёлка, вершина которой находится в точке $(u_+ + \varepsilon, \varepsilon)$, при $\varepsilon > \varepsilon_0$ уже не будет порождать пробоя. Она будет, так сказать, “наследницей” обоих пробоев.

Рассмотрим более детально интегральную кривую ℓ_ε , которая входит в полосу Ω_ε с положительным наклоном в седловой точке $(u_+(\varepsilon), \varepsilon)$. Если $\varepsilon < \varepsilon_0$, то по теореме 13.5 кривая ℓ_ε порождает ёлку, которая по условиям теоремы является пробоем. Теперь слегка увеличим ε . Тогда согласно предложению 8.8 кривые будут с ростом ε располагаться под кривой ℓ_{ε_0} в верхней половине полосы, опускаясь к оси $x_2 = 0$ с ростом ε . При всех ε кривые ℓ_ε пересекают середину полосы в точке u_{02} . После пересечения середины полосы кривые ℓ_ε , соответственно, располагаются в противоположном порядке: чем больше ε , тем выше

²Напомним, что в разделе 11 мы ввели для областей, заметаемых горизонтальными ёлками, обозначение $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}(A, C)$, если ствол ёлки начинается в точке A и заканчивается в точке C . В данном случае $\Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v_-, u_+) = \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_- + \varepsilon, \varepsilon), (u_+ + \varepsilon, \varepsilon))$ и $\Omega_\varepsilon^{\text{NW}}(v_+, u_-) = \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+ + \varepsilon, \varepsilon), (u_- + \varepsilon, \varepsilon))$.

идёт кривая (см. замечание 8.12 и иллюстрацию на рисунке 25). Таким образом, при $\varepsilon > \varepsilon_0$ кривая ℓ_ε проходит над точкой $(u_-(\varepsilon_0), -\varepsilon_0)$. Более того, если мы рассмотрим кривую ℓ_ε^- , выходящую из седловой точки $(u_-(\varepsilon), -\varepsilon)$ (это та кривая, которая порождала бы пробой, но мы теперь его не строим), то увидим, что она отделяет кривую ℓ_ε от нижней границы полосы на интервале $x_1 \in (u_{01}, u_-(\varepsilon_0))$. В узле $(u_{01}, 0)$ эти кривые пересекаются, и в верхней половине полосы кривая ℓ_ε^- расположена уже над кривой ℓ_ε (см. рис. 25).

А тот факт, что кривая ℓ_ε близка к кривым ℓ_{ε_0} и $\ell_{\varepsilon_0}^-$, когда ε близко к ε_0 , вытекает из достаточной гладкости граничных значений. $\square$

§15. ПРИМЕРЫ. ПОЛИНОМЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ: СЛИЯНИЕ ДВУХ ПРОБОВ

Доказанную только что теорему мы применим к ситуации, описанной на рис. 14 (см. [4]). Напомним, что там мы разбирали случай многочленов третьей степени $f_\pm$, когда $a_3^\pm > 0$, и дискриминант квадратичного полинома $f'_+ - f'_-$ положителен, то есть

$$d^2 \stackrel{\text{def}}{=} (a_2^+ - a_2^-)^2 - 3(a_3^+ - a_3^-)(a_1^+ - a_1^-) > 0. \quad (15.1)$$

Поэтому уравнение $f'_+(u) = f'_-(u)$ имеет два разных вещественных корня u_{01} и u_{02} . Тогда мы выяснили, что при малых ε фолляция имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, v_{+1}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{NW}}(v_{+1}, u_{-1}) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_{-1}, v_{-2}) \cup \\ \cup \Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v_{-2}, u_{+2}) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, +\infty), \end{aligned} \quad (15.2)$$

и область $\Omega_\varepsilon^L(u_{-1}, v_{-2})$ сжимается с ростом ε .

Напомним, что u_{+2} — это больший корень уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$, то есть

$$u_{+2} = -\varepsilon + \frac{-(a_2^+ - a_2^-) + \sqrt{d^2 + 36(a_3^+ - a_3^-)a_3^+ \varepsilon^2}}{3(a_3^+ - a_3^-)}, \quad (15.3)$$

а u_{-1} — это меньший корень уравнения $D_-(u, -\varepsilon) = 0$, то есть

$$u_{-1} = \varepsilon + \frac{-(a_2^+ - a_2^-) - \sqrt{d^2 - 36(a_3^+ - a_3^-)a_3^- \varepsilon^2}}{3(a_3^+ - a_3^-)}. \quad (15.4)$$

Значения u_{+2} и u_{-1} удовлетворяют условиям соответственно теоремы 13.5 и теоремы 13.6. Согласно этим теоремам мы можем построить

левые ёлки с вершинами в точках $(u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)$ и $(u_{-1} + \varepsilon, -\varepsilon)$. При малых ε эти ёлки продолжаются до противоположной границы и их основания мы обозначаем через $(v_{-2} + \varepsilon, -\varepsilon)$ и $(v_{+1} + \varepsilon, \varepsilon)$. Чтобы найти значения v_{-2} и v_{+1} , нужно решить дифференциальное уравнение (4.32) с граничными условиями, соответственно, при $u = u_{+2} + \varepsilon$ и $u = u_{-1} + \varepsilon$. Явно это уравнение мы решить не можем, поэтому придётся пользоваться косвенными соображениями.

Величина v_{+1} нас не интересует, нам достаточно простого факта, что левее точки $(v_{+1} + \varepsilon, \varepsilon)$ мы при всех ε можем построить правую простую фолиацию. О величине v_{-2} мы должны знать гораздо большее. Нам для построения ёлки важно, чтобы соответствующая интегральная кривая ℓ_ε проходила в области, где $D_+ \geq 0$ и $D_- \geq 0$. Таким образом, значение $v_{-2}(\varepsilon)$ должно находиться между корнями квадратичных полиномов $D_+(u, -\varepsilon)$ и $D_-(u, -\varepsilon)$. Если с первым условием у нас проблем не будет, то второе просто не может выполняться при всех ε . Кривая $D_- = 0$ — это эллипс, и отрезок (u_{-1}, u_{-2}) между корнями этого многочлена сжимается в точку при

$$\varepsilon_{\max} = \frac{d}{6\sqrt{a_3^-(a_3^+ - a_3^-)}}. \quad (15.5)$$

Таким образом, значение $v_{-2}(\varepsilon)$, которое является непрерывной функцией от ε , обязано при каком-то значении ε ($\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$) совпасть либо с левым, либо с правым концом интервала (u_{-1}, u_{-2}) . Наша задача — показать, что при любых рассматриваемых значениях коэффициентов граничных многочленов это будет левый конец, то есть мы докажем, что существует ε_0 ($\varepsilon_0 < \varepsilon_{\max}$), решающее уравнение $v_{-2}(\varepsilon) = u_{-1}(\varepsilon)$, и при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнено строгое неравенство $u_{-1} < v_{-2} < u_{-2}$. После этого мы сможем воспользоваться теоремой 14.1 и заключить, что у нас из двух пробоев образуется большой карман, и при $\varepsilon > \varepsilon_0$ фолиация принимает вид

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, v_{+1}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_{+1} + \varepsilon, \varepsilon), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, +\infty). \quad (15.6)$$

До сих пор нам было достаточно оценки $v_{-2} < u_{02} - \varepsilon$, которая вытекала из того факта, что положительный наклон ствола (кривой ℓ_ε) не превосходил единицы. Покажем, что теперь этого будет достаточно только при условии

$$a_3^+ \geq 2a_3^-. \quad (15.7)$$

Действительно, если мы будем пытаться проверить, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ выполнено условие $u_{02} - \varepsilon \leq u_{-2}(\varepsilon)$ (которое гарантирует неравенство $v_{-2}(\varepsilon) < u_{-1}(\varepsilon)$), то нам нужно будет выполнение неравенства

$$d - 6(a_3^+ - a_3^-)\varepsilon \leq \sqrt{d^2 - 36(a_3^+ - a_3^-)a_3^-\varepsilon^2}.$$

при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$. В частности, при $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ получаем

$$d \leq 6(a_3^+ - a_3^-)\varepsilon_{\max} = d\sqrt{\frac{a_3^+ - a_3^-}{a_3^-}},$$

что равносильно условию (15.7). При оставшихся значениях коэффициентов (то есть, когда $a_3^- \leq a_3^+ < 2a_3^-$) нам придётся искать другие аргументы.

Мы более детально рассмотрим поведение интегральных линий нашего поля, чтобы убедиться в том, что точка $(v_{-2}(\varepsilon), -\varepsilon)$ никогда не может лежать правее точки $(u_{-2}(\varepsilon), -\varepsilon)$.

В нижней полуплоскости у нас могут быть три стационарные точки – это точки пересечения кривой $D_- = 0$ с границей $x_2 = -\varepsilon$ и не зависящая от ε точка x_* пересечения кривых $D_+ = 0$ и $D_- = 0$. При исследуемых значениях коэффициентов граничных полиномов ($0 < a_3^- \leq a_3^+$) кривая $D_+ = 0$ – это две ветви гиперболы (вместе с границей $x_2 = -\varepsilon$ они образуют изоклину X_1 , в точках которой интегральные кривые имеют наклон 1), а кривая $D_- = 0$ – это эллипс (вместе с границей $x_2 = \varepsilon$ они образуют изоклину X_{-1} , в точках которой интегральные кривые имеют наклон -1). Их взаимное расположение показано на рисунке 26. В нижней полуплоскости решение системы

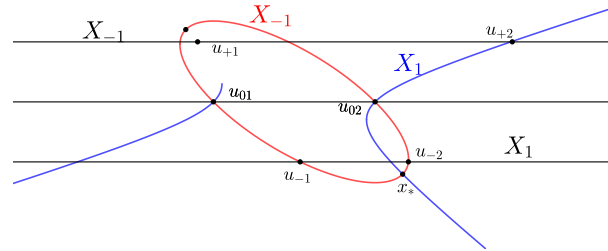


Рис. 26. Кривые $D_+ = 0$ и $D_- = 0$.

$D_+ = D_- = 0$ имеет вид

$$x_* = (x_{*1}, x_{*2}) = \left(u_0 + \frac{a_3^+ + a_3^-}{a_3^+ - a_3^-} \varepsilon_*, -\varepsilon_* \right), \quad (15.8)$$

где

$$\varepsilon_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{6\sqrt{a_3^+ a_3^-}}. \quad (15.9)$$

Напомним, что

$$u_0 = -\frac{a_2^+ - a_2^-}{3(a_3^+ - a_3^-)}. \quad (15.10)$$

При $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ у нас проблем нет, поскольку, как мы знаем, кривая ℓ_ε может пересечь кривую $D_+ = 0$ только в стационарных точках (а тут это вдобавок очевидно: в нижней половине полосы кривые ℓ_ε и $D_+ = 0$ расходятся). Поэтому правая ветвь гиперболы $D_+ = 0$ отделяет в нижней половине полосы кривую ℓ_ε от правой части границы эллипса $D_- = 0$, то есть ℓ_ε не может уходить из полосы через точку $(u_{-2}, -\varepsilon)$. Следовательно, нам надо понять поведение интегральных линий исследуемого поля (5.3) при $\varepsilon \in (\varepsilon_*, \varepsilon_{\max})$.

Матрица Якоби для нашего поля была в общем виде выписана в работе [4] (формула (5.5)). Более того, там же был приведён вид матрицы Якоби в точках u_- , где кривая $D_- = 0$ пересекается с границей $x_2 = -\varepsilon$:

$$J(u_-, -\varepsilon) = \varepsilon(f_+''(u_- - \varepsilon) - f_-''(u_- + \varepsilon) + 2\varepsilon f_-'''(u_- + \varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3\varepsilon\kappa_- \\ 1 & \varepsilon\kappa_- \end{pmatrix}, \quad (15.11)$$

где

$$\kappa_- = \frac{2f_-'''(u_- + \varepsilon)}{f_-''(u_- + \varepsilon) - f_+''(u_- - \varepsilon) - 2\varepsilon f_-'''(u_- + \varepsilon)}. \quad (15.12)$$

В нашем случае многочленов третьей степени получаем следующее выражение:

$$\kappa_- = -\frac{2a_3^-}{(a_3^+ - a_3^-)(u_- - \varepsilon - u_0)} = \pm \frac{6a_3^-}{\sqrt{d^2 - 36(a_3^+ - a_3^-)a_3^- \varepsilon^2}}. \quad (15.13)$$

Знак плюс в последней формуле соответствует κ_{-1} , то есть корню u_{-1} . Соответственно, знак минус соответствует κ_{-2} , то есть корню u_{-2} .

Если ввести обозначение $s = 1 + \varepsilon\kappa_-$, то матрица в формуле (15.11) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 3s - 1 \\ 1 & s - 1 \end{pmatrix}, \quad (15.14)$$

Характеристический полином этой матрицы равен $\lambda^2 - s\lambda - 2s$, собственные значения равны $\frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 + 8s})$, а собственные векторы этой матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} \lambda - s + 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15.15)$$

Поскольку $\kappa_{-1} > 0$, матрица (15.14) имеет при всех $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ два вещественных собственных значения разных знаков, а следовательно, левая точка пересечения кривой $D_- = 0$ с границей $x_2 = -\varepsilon$, то есть точка $(u_{-1}, -\varepsilon)$, всегда является седловой точкой. Она удовлетворяет теореме 13.6, и при всех $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ мы будем строить пробой, а именно, левую горизонтальную ёлку, вершина которой расположена в точке $(u_{-1} + \varepsilon, -\varepsilon)$.

Характер стационарной точки $(u_{-2}, -\varepsilon)$ меняется с ростом ε . Если

$$\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3d}{2\sqrt{(81a_3^+ - 80a_3^-)a_3^-}}, \quad (15.16)$$

то $-8 < s < 0$, и у характеристического многочлена матрицы Якоби комплексно сопряжённые корни, то есть точка $(u_{-2}, -\varepsilon)$ является фокусом. Нам важно, что никакая интегральная линия не может выходить из полосы через эту точку.

Если

$$\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}, \quad (15.17)$$

то $s < -8$, и матрица Якоби имеет два различных отрицательных собственных значения, то есть точка $(u_{-2}, -\varepsilon)$ является невырожденным узлом.

Теперь посмотрим на матрицу Якоби в точке x_*

$$J(x_*) = -6\varepsilon_* \begin{pmatrix} -(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- - (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+ & (\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- - (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+ \\ -(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- + (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+ & (\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- + (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+ \end{pmatrix}. \quad (15.18)$$

Собственные значения этой матрицы равны

$$\lambda = \pm 12\varepsilon_* \sqrt{(\varepsilon^2 - \varepsilon_*^2)a_3^+ a_3^-}. \quad (15.19)$$

При $\varepsilon > \varepsilon_*$ мы имеем два вещественных собственных значения разных знаков, то есть x_* – седловая точка. Собственные векторы этой матрицы можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+} \\ \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} - \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} - \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+} \\ \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+} \end{pmatrix}. \quad (15.20)$$

Поскольку $(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- > (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+$ при $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$, углы наклона этих векторов положительны и являются дополнительными, и кривая $D_- = 0$, которая имеет наклон 1 в точке x_* , проходит в узком угле между этими векторами, когда ε слегка превысило значение ε_* . Поэтому точка $(u_{-2}, -\varepsilon)$, являясь точкой пересечения эллипса $D_- = 0$ с границей полосы, расположена между интегральными кривыми, выходящими из точки x_* вдоль векторов (15.20). Нам важно, что сепаратриса (назовём её L), выходящая из точки x_* вдоль левого вектора из (15.20) (вектора с меньшим углом наклона), не может пересекать границу полосы правее точки $(u_{-2}, -\varepsilon)$, причём не только при ε слегка превосходящих величину ε_* , но при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$. Для этого мы рассмотрим изоклину X_0 , которая определяется как геометрическое место точек, в которых интегральные кривые нашего поля идут горизонтально, то есть

$$\dot{x}_2 = x_2(f'_- - f'_+) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- + x_2(\varepsilon + x_2)f''_+ = 0 \quad (15.21)$$

(см. формулу (5.3)). Горизонтальная ось $x_2 = 0$ нас сейчас не интересует, а интересует та ветвь гиперболы, которая проходит через точку x_* , даже более узко – та её часть, что соединяет точки x_* и $(u_{-2}, -\varepsilon)$. Взаимное расположение кривых X_0 , X_{-1} (точки, где наклон интегральных кривых равен -1, то есть здесь $D_- = 0$) и X_∞ (точки, где интегральные кривые идут вертикально, то есть, $\dot{x}_1 = 0$) показано на рисунке 27. Такое расположение данных кривых можно было бы объяснить качественно тем, что интегральные кривые должны круто заворачивать в окрестности седловой точки x_* , но давайте проверим это аналитически, как и то, что все эти кривые расположены между двумя сепаратрисами нашего поля, выходящими из точки x_* вдоль векторов (15.20).

Перепишывая уравнение (15.21) в терминах коэффициентов полиномов f_+ и f_- , мы получим

$$\begin{aligned} 3(a_3^+ - a_3^-)(x_2^2 - x_1^2) + 6\varepsilon[a_3^+(x_1 + x_2) - a_3^-(x_1 - x_2)] \\ + 2(a_2^+ - a_2^-)(\varepsilon - x_1) - (a_1^+ - a_1^-) = 0. \end{aligned} \quad (15.22)$$

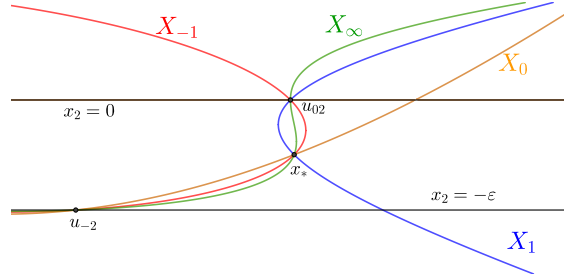


Рис. 27. Изоклины X_0 , X_{-1} и X_{∞} между точками x_* и $(u_{-2}, -\varepsilon)$.

Дифференцируя, получаем выражение для наклона кривой X_0 :

$$\frac{x_1 - \varepsilon - u_0}{x_2 + \frac{a_3^+ + a_3^-}{a_3^+ - a_3^-} \varepsilon}, \quad (15.23)$$

где u_0 , напомним, задаётся формулой (15.10). Подставляя сюда координаты точки x_* (см. (15.20)), получаем выражение

$$\frac{a_3^-(\varepsilon + \varepsilon_*) - a_3^+(\varepsilon - \varepsilon_*)}{a_3^-(\varepsilon + \varepsilon_*) + a_3^+(\varepsilon - \varepsilon_*)}. \quad (15.24)$$

Как мы уже отмечали, этот наклон положителен, то есть

$$a_3^-(\varepsilon + \varepsilon_*) > a_3^+(\varepsilon - \varepsilon_*) \quad (15.25)$$

при всех $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$. Действительно, переписав условие (15.25) в виде

$$\varepsilon < -\frac{a_3^+ + a_3^-}{a_3^+ - a_3^-} x_{*2}, \quad (15.26)$$

нетрудно увидеть, что эта граница больше, чем $\varepsilon_{\max}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &\stackrel{(15.5)}{=} \frac{d}{6\sqrt{a_3^-(a_3^+ - a_3^-)}} \stackrel{(15.9)}{=} \varepsilon_* \sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}} \\ &< \varepsilon_* \frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-} < \varepsilon_* \frac{a_3^+ + a_3^-}{a_3^+ - a_3^-}. \end{aligned}$$

Заметим, что положительный наклон первого вектора из (15.20) меньше наклона кривой X_0 в точке x_* :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} - \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+}}{\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+}} &= \frac{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- - (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+}{\left(\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^-} + \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+}\right)^2} \\ &< \frac{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- - (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+}{(\varepsilon + \varepsilon_*)a_3^- + (\varepsilon - \varepsilon_*)a_3^+}. \end{aligned}$$

Таким образом, интегральная кривая L выходит под меньшим положительным углом, чем изоклина X_0 , а значит ниже точки x_* она расположена над X_0 (левее X_0). И такое их взаимное расположение остаётся на всем промежутке $x_1 \in (u_{-2}, x_{*1})$, поскольку на этом промежутке, где нет особых точек, она не может пересечь кривую X_0 . Нам важно, что эта интегральная кривая не может пересечь границу области правее точки $(u_{-2}, -\varepsilon)$.

Теперь вспомним, что нам нужно было такое же утверждение, но о другой интегральной кривой нашего поля, которую мы обозначали символом ℓ_ε . Вернёмся к ней. Нам нужно проверить, что если эта кривая доходит до нижней границы полосы (будем в дальнейшем это предполагать), то её точка пересечения с этой границей не может лежать правее точки $(u_{-2}, -\varepsilon)$.

Как уже отмечалось, кривая ℓ_ε имеет две общие точки с кривой X_1 (то есть $D_+ = 0$) — это точка на верхней границе, из которой мы начинаем эту линию, и точка пересечения с серединой полосы. В верхней половине полосы она идёт правее гиперболы X_1 , а в нижней — левее (точнее, между ветвями гиперболы, то есть левее правой ветки). Таким образом, кривая ℓ_ε пересекает прямую $x_2 = -\varepsilon_*$ левее точки x_* , и, следовательно, весь свой путь до нижней границы она проходит левее интегральной кривой L , что и требовалось.

На самом деле мы хотели чуть большего, мы хотели выполнения строгого неравенства $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\max}$. Хотя я думаю, что кривая ℓ_ε ни при каких значениях параметров не пересекает нижнюю границу в точке $(u_{-2}, -\varepsilon)$, но даже если это случается, ничто не мешает построению заявленной фоллиации. Чтобы применить теорему 14.1, нам нужно строгое неравенство (2) из теоремы 13.6, которое не выполняется только в случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max}$, то есть если $v(\varepsilon_0) = u_{-1}(\varepsilon_0) = u_{-2}(\varepsilon_0) = u_0 + \varepsilon_0$.

При $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$, происходит так называемая седлоузловая бифуркация: две стационарные точки — седло $(u_{-1}(\varepsilon), -\varepsilon)$ и узел $(u_{-2}(\varepsilon), -\varepsilon)$ —

сливаются в одну, $(u_0 + \varepsilon_{\max}, -\varepsilon_{\max})$, которую называют седлоузловой, после чего исчезают.

В седлоузловой точке $(u_0 + \varepsilon_{\max}, -\varepsilon_{\max})$ матрица Якоби равна

$$\begin{aligned} J(u_0 + \varepsilon_{\max}, -\varepsilon_{\max}) &= -2\varepsilon_{\max}^2 f'''_-(u_0) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -12\varepsilon_{\max}^2 a_3^- \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

У неё нулевому собственному значению соответствует горизонтальный собственный вектор, а собственный вектор с наклоном $\frac{1}{3}$ отвечает второму собственному значению. Нас интересует сепаратриса, идущая вдоль горизонтального собственного вектора. В обоих направлениях она проходит внутри полосы, но справа она идёт над изоклиной X_0 , а слева — под ней, но над изоклиной X_{-1} , то есть в области $D_- > 0$. Поэтому, хотя мы и не можем воспользоваться теоремой 13.6 из-за того, что не выполнено строгое условие (2), тем не менее мы можем построить соответствующую ёлку, особенностью которой будет касание вершиной нижней границы. После этого мы можем воспользоваться рассуждениями теоремы 14.1, чтобы при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ построить большой карман.

До сих пор мы следили за кривой ℓ_ε до момента $\varepsilon = \varepsilon_0$, когда происходит слияние двух пробоев. Теперь, чтобы гарантировать возможность построения ёлки, надо проверить, что после этого момента при всех ε кривая ℓ_ε будет проходить в области, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$. Впрочем, и при меньших ε надо проверить, что второй пробой проходит в этой области. Давайте начнём именно с этого пробоя (будем обозначать соответствующую интегральную кривую символом ℓ_ε^-). То же самое рассуждение, которое показывало, что кривая ℓ_ε , стартующая из точки на верхней границе, где $D_+ = 0$, потом в верхней полуполосе вплоть до стационарной точки $(u_{02}, 0)$ идёт под изоклиной X_1 ($D_+ = 0$), то есть в области, где $D_+ > 0$, точно так же показывает, что кривая ℓ_ε^- , стартующая из точки на нижней границе, где $D_- = 0$, потом в нижней полуполосе вплоть до стационарной точки $(u_{01}, 0)$ идёт над изоклиной X_{-1} ($D_- = 0$), то есть в области, где $D_- > 0$. Соответственно, из стационарной точки $(u_{01}, 0)$ кривая ℓ_ε^- выходит под изоклиной X_{-1} (или, другими словами, слева от неё) и расходится с ней, удаляясь влево, то есть оставаясь в области, где $D_- > 0$. То,

что кривая ℓ_ε^- в нижней полуплоскости проходит между ветвями гиперболы X_1 (то есть в области, где $D_+ > 0$), очевидно. То же самое справедливо и при $\varepsilon > \varepsilon_0$, то есть после слияния пробоев ℓ_ε и ℓ_ε^- , когда у нас остаётся лишь одна кривая ℓ_ε , которая, не доходя до нижней границы, пересекает изоклину X_0 и поворачивает вверх. Таким образом, её участок между стационарными точками $(u_{02}, 0)$ и $(u_{01}, 0)$ проходит в нижней полосе в области, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$.

Теперь проследим за поведением интересующей нас интегральной кривой в верхней половине полосы левее точки $(u_{01}, 0)$. Тут не имеет значения, будет ли $\varepsilon > \varepsilon_0$ или $\varepsilon < \varepsilon_0$, то есть будет ли это дуга кривой ℓ_ε^- или уже дуга ℓ_ε . Нам тут важно, что из точки $(u_{01}, 0)$ она выходит с отрицательным наклоном, строго большим -1 , в то время как эллипс X_{-1} имеет в этой точке наклон в точности -1 , и дальше в верхней полосе его наклон убывает до $-\infty$, после чего кривая X_{-1} поворачивает направо. Следовательно, в этой области наша интегральная кривая расходится с изоклиной X_{-1} и таким образом всё время остаётся в области $D_- > 0$.

Осталось проверить, что наша интегральная кривая проходит в области $D_+ > 0$. Она пересекается с левой ветвью гиперболы X_1 ($D_+ = 0$) в стационарной точке $(u_{01}, 0)$ при входе в верхнюю половину полосы. Гипербола X_1 выходит из точки $(u_{01}, 0)$ с наклоном 1 и уходит вправо, то есть расходится с нашей интегральной кривой, которая продолжает идти в области $D_+ > 0$. Таким образом, единственное, в чём нам надо убедиться, это в том, что наша интегральная кривая не имеет других точек пересечения с изоклиной X_1 внутри полосы слева от точки $(u_{01}, 0)$. Повторяя рассуждение о невозможности пересечения кривой ℓ_ε с изоклиной X_{-1} , мы рассмотрим два случая: $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ и $\varepsilon > \varepsilon_*$. В первом случае нашу интегральную кривую отделяет от гиперболы X_1 изоклина X_{-1} . Во втором случае у нас внутри полосы появляется ещё одна стационарная точка,

$$\left(u_0 - \frac{a_3^+ + a_3^-}{a_3^+ - a_3^-} \varepsilon_*, \varepsilon_*\right), \quad (15.28)$$

симметричная точке x_* относительно центра симметрии $(u_0, 0)$. Теперь при $x_2 \leq \varepsilon_*$ нас по-прежнему от гиперболы X_1 отделяет изоклина X_{-1} , а при $x_2 \geq \varepsilon_*$ эту роль берёт на себя изоклина X_0 , которая, как и изоклина X_1 , соединяет стационарные точки (15.28) и (u_{+1}, ε) . Напомним, что u_{+1} — это меньший корень уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$, то

есть

$$u_{+1} = -\varepsilon + u_0 - \frac{(a_2^+ - a_2^-) + \sqrt{d^2 + 36(a_3^+ - a_3^-)a_3^+ \varepsilon^2}}{3(a_3^+ - a_3^-)}. \quad (15.29)$$

На рисунке 28 показано, как ведут себя изоклины в предположении $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$. Тут же изображено поведение интересующей нас интегральной кривой ℓ_ε , если $\varepsilon > \varepsilon_0$.

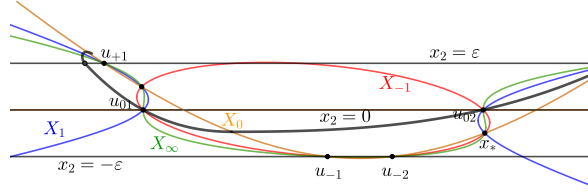


Рис. 28. Изоклины $X_0, X_{\pm 1}, X_{\infty}$ при $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$.

Поведение изоклин при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ почти такое же. Единственное отличие состоит в том, что теперь эллипс X_{-1} целиком лежит внутри полосы и поэтому стационарные точки на нижней границе исчезают. На рисунке 29 показано, как ведут себя изоклины и кривая ℓ_ε в этом случае.

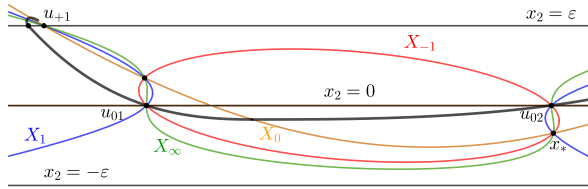


Рис. 29. Изоклины $X_0, X_{\pm 1}, X_{\infty}$ при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$.

§16. ВЫРОЖДЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ. СРЕДНИЕ КАРМАНЫ

В этом разделе мы исследуем ситуацию, когда корень разности производных $f'_+ - f'_-$ имеет кратность два. В этом случае мы получаем либо известную уже фолиацию с квадратом билинейности,³ из углов которого растут разнонаправленные горизонтальные ёлки, либо новую фолиацию, которую мы назовём *средним карманом*. Средние карманы можно считать промежуточной фолиацией между малыми и большими карманами. Как и в тех случаях, это – горизонтальная ёлка, оба конца которой лежат на одной границе полосы, только теперь ствол этой ёлки будет касаться средней линии полосы. То есть, если ствол ёлки, образующий малый карман, не имеет общих точек с осью $x_2 = 0$, а в случае больших карманов таких точек две, то для средних карманов – одна.

Теперь сформулируем основное утверждение этого раздела.

Теорема 16.1. *Пусть u_0 – корень разности $f'_+ - f'_-$ кратности два, то есть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) = f''_-(u_0)$, и $f'''_+(u_0) \neq f'''_-(u_0)$. Кроме того пусть $f'''_+(u_0) \neq 0$ и $f'''_-(u_0) \neq 0$.*

Тогда при малых ε в окрестности точки $(u_0, 0)$ возникает либо квадрат билинейности с двумя разнонаправленными горизонтальными ёлками, если значения $f'''_{\pm}(u_0)$ имеют разные знаки, либо средний карман, если знаки чисел $f'''_{\pm}(u_0)$ одинаковы.

Сформулируем серию утверждений, детализирующих приведённую теорему для разных значений знаков третьих производных $f'''_{\pm}(u_0)$. Во всех этих предложениях будет предполагаться выполненными условия теоремы, то есть u_0 – это будет кратный корень разности $f'_+ - f'_-$.

Предложение 16.2. *Если $f'''_+(u_0) > 0$ и $f'''_-(u_0) < 0$, то при малых ε вблизи точки $x_1 = u_0$ можно построить следующую фолиацию:*

$$\begin{aligned} \Omega_{\varepsilon}^R(u_1, u_-^l) \cup \Omega_{\varepsilon}^{HB}((u_0 - \varepsilon, 0), (u_-^l - \varepsilon, -\varepsilon)) \cup \Omega_{\varepsilon}^{Rect}(u_0 + \varepsilon, 0) \\ \cup \Omega_{\varepsilon}^{HB}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_{\varepsilon}^R(u_+^r, u_2) \end{aligned} \quad (16.1)$$

- *квадрат с вершинами в точках $(u_0, \pm\varepsilon)$ и $(u_0 \pm \varepsilon, 0)$, на котором функция билинейна ($\Omega_{\varepsilon}^{Rect}(u_0 + \varepsilon, 0)$);*

³Напомним, что мы называем функцию билинейной (хотя было бы корректнее называть её диагонально линейной), если она линейна вдоль направлений $x_1 \pm x_2 = \text{const}$.

- из правого конца квадрата растёт левая горизонтальная ёлка с вершиной на верхней границе в точке $(u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)$, где u_+^r – это ближайший к u_0 справа корень уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$; эта ёлка замечает область $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_+^r + \varepsilon, \varepsilon))$;
- из левого конца квадрата растёт правая горизонтальная ёлка с вершиной на нижней границе в точке $(u_-^l - \varepsilon, -\varepsilon)$, где u_-^l – это ближайший к u_0 слева корень уравнения $D_-(u, \varepsilon) = 0$; эта ёлка замечает область $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 - \varepsilon, 0), (u_-^l - \varepsilon, -\varepsilon))$;
- слева от точки $(u_-^l, 0)$ – правая простая фолиация, $\Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_1, u_-^l)$;
- справа от точки $(u_+^r, 0)$ – правая простая фолиация, $\Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_+^r, u_2)$.

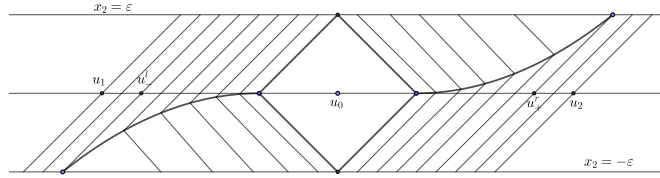


Рис. 30. Фолиация в предложении 16.2.

Симметрия относительно любой из осей приводит к следующему утверждению.

Предложение 16.3. Если $f_+'''(u_0) < 0$ и $f_-'''(u_0) > 0$, то при малых ε вблизи точки $x_1 = u_0$ можно построить следующую фолиацию:

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon^{\text{L}}(u_1, u_+^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 - \varepsilon, 0), (u_+^l - \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(u_0 + \varepsilon, 0) \\ \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_-^r + \varepsilon, -\varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{L}}(u_-^r, u_2) \end{aligned} \quad (16.2)$$

- квадрат с вершинами в точках $(u_0, \pm\varepsilon)$ и $(u_0 \pm \varepsilon, 0)$, на котором функция билинейна ($\Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(u_0 + \varepsilon, 0)$);
- из правого конца квадрата растёт левая горизонтальная ёлка с вершиной на нижней границе в точке $(u_-^r + \varepsilon, -\varepsilon)$, где u_-^r – это ближайший к u_0 справа корень уравнения $D_-(u, -\varepsilon) = 0$; эта ёлка замечает область $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_-^r + \varepsilon, -\varepsilon))$;
- из левого конца квадрата растёт правая горизонтальная ёлка с вершиной на верхней границе в точке $(u_+^l + \varepsilon, \varepsilon)$, где u_+^l –

- это ближайший к u_0 слева корень уравнения $D_+(u, -\varepsilon) = 0$;
 эта ёлка заметает область $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 - \varepsilon, 0), (u_+^l - \varepsilon, \varepsilon))$;
- слева от точки $(u_+^l, 0)$ – левая простая фолиация, $\Omega_\varepsilon^L(u_1, u_+^l)$;
 - справа от точки $(u_-^r, 0)$ – левая простая фолиация, $\Omega_\varepsilon^L(u_-^r, u_2)$.

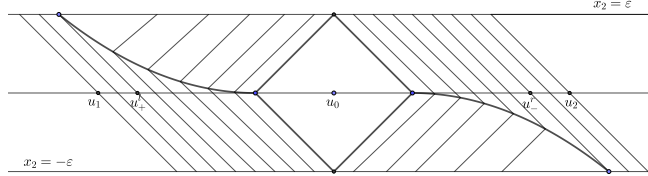


Рис. 31. Фолиация в предложении 16.3.

Теперь сформулируем предложения, описывающие фолиацию в тех случаях, когда в точке u_0 третьи производные граничных функций имеют одинаковые знаки.

Предложение 16.4. Если $f_+'''(u_0) > f_-'''(u_0) > 0$, то при малых ε из некоторой точки верхней границы $(v_+^l + \varepsilon, \varepsilon)$ растёт левая ёлка, проходящая в верхней половине полосы, касаясь оси x_1 в точке $(u_0 + \varepsilon, 0)$ и заканчивающаяся на верхней границе в точке $(u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)$, где u_+^r – это ближайший к u_0 справа корень уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$. Таким образом, может быть построена следующая фолиация:

$$\Omega_\varepsilon^R(u_1, v_+^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+^l + \varepsilon, \varepsilon), (u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+^r, u_2). \quad (16.3)$$

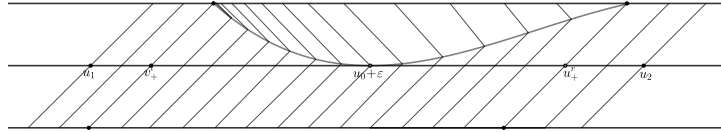


Рис. 32. Фолиация в предложении 16.4.

Симметричное относительно оси $x_1 = 0$ предложение имеет следующий вид.

Предложение 16.5. Если $f_+'''(u_0) < f_-'''(u_0) < 0$, то при малых ε из некоторой точки верхней границы $(v_+^r - \varepsilon, \varepsilon)$ растёт правая ёлка, проходящая в верхней половине полосы, касающаяся оси $x_2 = 0$ в точке $(u_0 - \varepsilon, 0)$ и заканчивающаяся на верхней границе в точке $(u_+^l - \varepsilon, \varepsilon)$, где u_+^l — это ближайший к u_0 слева корень уравнения $D_+(u, -\varepsilon) = 0$. Таким образом, может быть построена следующая фоллиация:

$$\Omega_\varepsilon^L(u_1, u_+^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+^r - \varepsilon, \varepsilon), (u_+^l - \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^L(v_+^r, u_2). \quad (16.4)$$

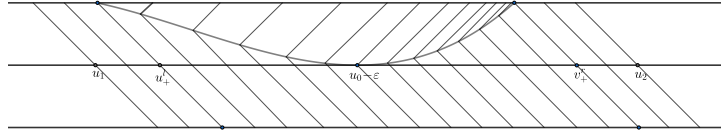


Рис. 33. Фоллиация в предложении 16.5.

Пара утверждений, получающихся отражением относительно оси $x_2 = 0$, содержится в следующих двух предложениях.

Предложение 16.6. Если $f_-'''(u_0) > f_+'''(u_0) > 0$, то при малых ε из некоторой точки нижней границы $(v_-^l + \varepsilon, -\varepsilon)$ растёт левая ёлка, проходящая в нижней половине полосы, касающаяся оси $x_2 = 0$ в точке $(u_0 + \varepsilon, 0)$ и заканчивающаяся на нижней границе в точке $(u_-^r + \varepsilon, -\varepsilon)$, где u_-^r — это ближайший к u_0 справа корень уравнения $D_-(u, -\varepsilon) = 0$. Таким образом, может быть построена следующая фоллиация:

$$\Omega_\varepsilon^L(u_1, v_-^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_-^l + \varepsilon, -\varepsilon), (u_-^r + \varepsilon, -\varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_-^r, u_2). \quad (16.5)$$

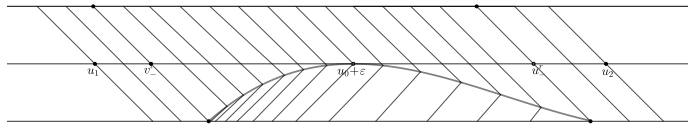
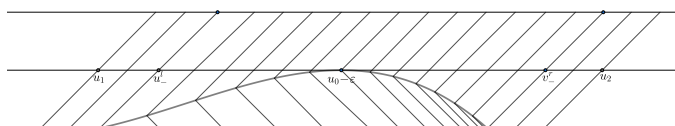


Рис. 34. Фоллиация в предложении 16.6.

$$\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{R}}(u_1, v_-^l) \cup \Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{HB}}((v_-^l + \varepsilon, -\varepsilon), (u_-^r + \varepsilon, -\varepsilon)) \cup \Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{R}}(u_-^r, u_2). \quad (16.6)$$


Прежде чем доказывать сформулированные утверждения, докажем следующую лемму.

Доказательство. Рассмотрим поведение функции D_+ в окрестности точки $(u_0, 0)$. Для этого запишем $x_1 = u_0 + (\alpha + 1)x_2$, и разложим получившуюся функцию по степеням x_2 , считая α фиксированным параметром:

$$\begin{aligned} 2x_2 D_+(x_1, x_2) &= f'_+(u_0 + (\alpha + 2)x_2) \\ &\quad - f'_-(u_0 + \alpha x_2) - 2x_2 f''_+(u_0 + (\alpha + 2)x_2) \\ &= \left[\frac{1}{2} \alpha^2 (f'''_+(u_0) - f'''_-(u_0)) - 2f'''_+(u_0) \right] x_2^2 + O(x_2^3). \end{aligned} \quad (16.7)$$

Мы видим, что изоклина X_1 ($D_+ = 0$) имеет две ветви в окрестности точки $(u_0, 0)$. Они пересекаются в этой точке и имеют наклоны

$$\frac{1}{1 \pm \alpha_0}, \quad \text{где} \quad \alpha_0 = 2 \sqrt{\frac{f_+'''(u_0)}{f_+'''(u_0) - f_-'''(u_0)}}, \quad (16.8)$$

Таким образом, на границе $x_2 = \varepsilon$ функция D_+ имеет два корня в окрестности точки u_0 . Выберем больший из них

$$u_+ = u_0 + (\alpha_0 + 1)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (16.9)$$

и проверим выполнение условий теоремы 13.5 для точки $u = u_+$. Условие (1) выполнено по определению величины u_+ . Условие (3) выполняется при малых ε , поскольку $f_+'''(u_0) > 0$. Наконец, условие (2) – это условие $\frac{\partial}{\partial x_1} D_+(u_+, \varepsilon) > 0$, которое выполняется, поскольку функция $D_+(x_1, \varepsilon)$ отрицательна левее простого корня u_+ и положительна правее него.

Нам осталось проверить, что полученная ёлка может продолжаться вплоть до точки $(u_0 + \varepsilon, 0)$. Другими словами, нам надо проследить, что интегральная кривая ℓ_ε , задающая ствол ёлки, проходит в области, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$, и упирается в точку $(u_0, 0)$. Мы рассмотрим, как и раньше, подобласть ω в верхней полуполосе, ограниченную прямой $x_1 = u_+$ и той частью изоклины $D_+ = 0$, которая соединяет точки $(u_0, 0)$ и (u_+, ε) .

Мы фактически повторим рассуждения, использованные в доказательстве предложения 6.1 (см. [4]). Во-первых, заметим, что при малых ε наклон выбранной ветви изоклины близок к значению $1/(1 + \alpha_0)$, а интегральные кривые в точках изоклины имеют наклон, равный единице. Поэтому рассматриваемая кривая ℓ_ε , стартуя вниз из точки (u_+, ε) справа от изоклины, не может её пересечь ни в какой точке верхней полуполосы. Не может кривая ℓ_ε выйти из области ω и через прямую $x_2 = 0$ иначе, чем через стационарную точку $(u_0, 0)$. Во-вторых, в области ω у нас $D_+ > 0$ и $D_- > 0$. Первое неравенство выполняется, поскольку по построению ω лежит справа от выбранного отрезка изоклины $D_+ = 0$, на котором при движении слева направо функция D_+ меняет знак с минуса на плюс. А второе неравенство мы сейчас проверим, рассмотрев значения функции D_- на лучах

$$x_1 = u_0 + (\alpha + 1)x_2.$$

$$\begin{aligned} 2x_2 D_-(x_1, x_2) &= f'_+(u_0 + (\alpha + 2)x_2) \\ &\quad - f'_-(u_0 + \alpha x_2) - 2x_2 f''_-(u_0 + \alpha x_2) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha \right) (f'''_+(u_0) - f'''_-(u_0)) + 2f'''_+(u_0) \right] x_2^2 + O(x_2^3). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Поскольку $\alpha > 0$ для точек из ω , это выражение строго положительно в ω . Тем самым мы проверили, что кривая ℓ_ε из точки (u_+, ε) движется налево вниз внутри области, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$, попадая в результате в точку $(u_0, 0)$. Следовательно, можно построить левую ёлку, растущую из точки $(u_0 + \varepsilon, 0)$ в точку $(u_+ + \varepsilon, \varepsilon)$, что и требовалось. $\square$

Чтобы иметь возможность ссылаться на симметричные варианты доказанной леммы, сформулируем их отдельно.

Лемма 16.9. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) = f''_-(u_0)$, $f'''_-(u_0) > 0$ и $f'''_+(u_0) < f'''_-(u_0)$. Тогда при достаточно малых ε существует такой корень u_- уравнения $D_-(u, -\varepsilon) = 0$, что можно построить левую ёлку, растущую из точки $(u_0 + \varepsilon, 0)$ в точку $(u_- + \varepsilon, -\varepsilon)$.

Лемма 16.10. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) = f''_-(u_0)$, $f'''_+(u_0) < 0$ и $f'''_-(u_0) < f'''_+(u_0)$. Тогда при достаточно малых ε существует такой корень u_- уравнения $D_+(u, -\varepsilon) = 0$, что можно построить правую ёлку, растущую из точки $(u_0 - \varepsilon, 0)$ в точку $(u_- - \varepsilon, \varepsilon)$.

Лемма 16.11. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) = f''_-(u_0)$, $f'''_-(u_0) < 0$ и $f'''_+(u_0) > f'''_-(u_0)$. Тогда при достаточно малых ε существует такой корень u_+ уравнения $D_-(u, \varepsilon) = 0$, что можно построить правую ёлку, растущую из точки $(u_0 - \varepsilon, 0)$ в точку $(u_+ - \varepsilon, -\varepsilon)$.

Теперь мы готовы доказывать предложения 16.2–16.7. Поскольку предложения 16.2 и 16.3 симметричны, приведём доказательство только первого из них.

Доказательство предложения 16.2. Поскольку $f'''_+(u_0) > 0$ и $f'''_-(u_0) < 0$, у нас одновременно выполнены условия лемм 16.8 и 16.11, так что мы можем сразу построить две ёлки: левую из точки $(u_0 + \varepsilon, 0)$ и правую из точки $(u_0 - \varepsilon, 0)$. Завершает доказательство использование предложения 11.1 (см. [5]), условия которого выполнены с $C = (u_0, 0)$. То есть построенные две ёлки мы можем соединить прямоугольником, который в данном случае является квадратом. $\square$

Теперь докажем одно из симметричных предложений 16.4–16.7.

Доказательство предложения 16.4. Так же как и в предыдущем доказательстве, используя лемму 16.8, мы построим левую ёлку из точки $(u_0 + \varepsilon, 0)$ в точку $(u_+ + \varepsilon, \varepsilon)$. Теперь нам надо продолжить её влево до второго пересечения с верхней границей. Другими словами, нам надо продолжить кривую ℓ_ε влево от точки $(u_0, 0)$ так, чтобы она шла в верхней полуполосе вплоть до верхней границы, оставаясь в области, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$. Для этого нам надо подробнее изучить поведение изоклин интегральных линий в окрестности точки $(u_0, 0)$.

Подставляя разложение

$$x_2 = k(x_1 - u_0) + O(x_2^2) \quad (16.11)$$

в уравнения нашего поля (например, в формулу (5.3)), мы получаем следующее уравнение на коэффициент наклона k :

$$k = \frac{2k}{1 - k^2} \cdot \frac{(1 + k)f_+'''(u_0) - (1 - k)f_-'''(u_0)}{f_+'''(u_0) - f_-'''(u_0)}. \quad (16.12)$$

Все интегральные кривые, кроме двух, отвечают значению $k = 0$, то есть касаются оси x_1 . Две выделенные интегральные кривые, которые являются сепаратрисами, имеют наклоны

$$k_{\pm} = -\frac{\sqrt{f_+'''(u_0)} \pm \sqrt{f_-'''(u_0)}}{\sqrt{f_+'''(u_0)} \mp \sqrt{f_-'''(u_0)}}. \quad (16.13)$$

Сектор между сепаратрисами заматается интегральными кривыми, которые не проходят через точку $(u_0, 0)$. Поведение экстремальных кривых в окрестности этой точки показано на рисунке 36.

Таким образом, наша интегральная кривая ℓ_ε касается справа оси x_1 в точке $(u_0, 0)$ и мы её можем продолжить любой интегральной кривой, касающейся оси x_1 в точке $(u_0, 0)$ слева, чтобы получить C^1 -гладкую кривую, порождающую ствол ёлки, лишь бы она в полосе проходила в области, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$. О неравенстве $D_- > 0$ нам вообще заботиться не нужно, поскольку оно выполняется при условиях, сформулированных в предложении 16.4, в некоторой окрестности точки $(u_0, 0)$ в верхней полуплоскости. Чтобы в этом убедиться, достаточно переписать равенство (16.10) в виде:

$$2x_2 D_-(x_1, x_2) = \left[\frac{1}{2}(\alpha + 2)^2 (f_+'''(u_0) - f_-'''(u_0)) + 2f_-'''(u_0) \right] x_2^2 + O(x_2^3). \quad (16.14)$$

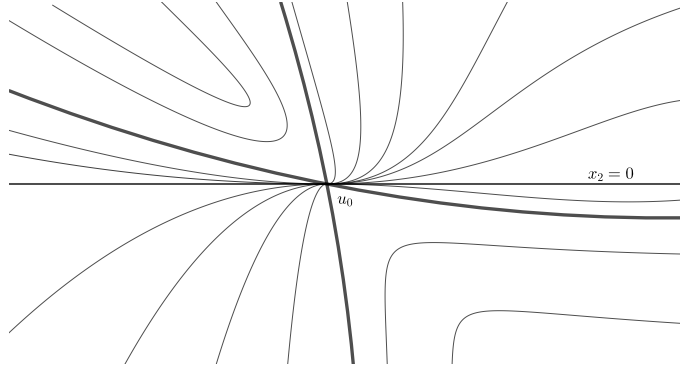


Рис. 36. Интегральные кривые поля в окрестности стационарной точки $(u_0, 0)$.

Наконец, для достаточно малых ε мы всегда найдём интегральную кривую, касающуюся оси x_1 в точке $(u_0, 0)$ слева, на которой выполнено условие $D_+ > 0$, просто выбрав начальную точку v_+^l этой кривой на границе $x_2 = \varepsilon$ слева от левого корня уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$. $\square$

Отметим, что мы доказали предложение, показав возможность построения среднего кармана в описанной ситуации, но не вполне определили интегральную кривую, задающую ствол ёлки. Окончательный выбор этой кривой требует дополнительного исследования, которое мы здесь проводить не будем. Выскажем только гипотезу: естественный кандидат на продолжение кривой ℓ_ε от точки $(u_0, 0)$ влево является кривая, склеивающаяся в точке $(u_0, 0)$ C^2 -гладко.

С другой стороны, поскольку простая фолиация даёт минимально возможное значение искомой диагонально вогнутой функции, желательно взять точку v_+^l как можно правее. Максимальное значение достигается на сепаратрисе, но мы не можем её взять для построения ствола ёлки, поскольку она имеет отрицательный наклон в точке $(u_0, 0)$, то есть не склеивается с кривой ℓ_ε C^1 -гладко, что необходимо для построения фолиации.

§17. ПРИМЕРЫ. ПОЛИНОМЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ: ВЫРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАИ

В этом разделе мы завершаем изучение фолаций, которые возникают в том случае, когда граничными значениями являются многочлены третьей степени. Напомним, что для того, чтобы не разбирать те случаи, что получаются симметрией из уже разобранных, мы предполагаем, что

$$a_3^+ \geq |a_3^-|. \quad (17.1)$$

Невырожденным мы называем тот случай, когда дискриминант полинома $f'_+ - f'_-$ отличен от нуля и $a_3^- \neq 0$. Добавим, что у нас всегда $a_3^+ > 0$, поскольку иначе условие (17.1) влечёт $a_3^+ = a_3^- = 0$, то есть граничные полиномы имеют степень меньшую трёх, что не является предметом рассмотрения.

Невырожденные случаи были полностью разобраны в разделах 7, 9, 10, 12 и 15. Более того, частично уже были разобраны и вырожденные случаи. В некотором смысле вырожденным можно считать случай, когда функция $f'_+ - f'_-$ является линейной, то есть $a_3^+ = a_3^-$. Этот случай исследован в разделе 7 (см. [4]). Кроме того, в разделе 12 (см. [5]) был разобран случай, когда дискриминант квадратичного многочлена $f'_+ - f'_-$ равен нулю, и $a_3^- < 0$. Если дискриминант квадратичного многочлена $f'_+ - f'_-$ отрицателен, то случай $a_3^- = 0$ не выделялся ничем, и в разделе 9 приведено описание фолации, общее для всех неотрицательных a_3^- . Таким образом, нам осталось рассмотреть три вырожденных случая:

- дискриминант квадратичного многочлена $f'_+ - f'_-$ положителен и $a_3^- = 0$;
- дискриминант квадратичного многочлена $f'_+ - f'_-$ равен нулю и $a_3^- > 0$;
- дискриминант квадратичного многочлена $f'_+ - f'_-$ равен нулю и $a_3^- = 0$.

Начнём с первого случая, когда у многочлена $f'_+ - f'_-$ есть два различных вещественных корня. Тогда при ненулевом коэффициенте a_3^- в окрестности этих корней при малых ε появляются два пробоя (см. рис. 14 и 15 в [4]). Справа всегда располагался SW-пробой, а направление пробоя, находящегося слева, зависит от знака коэффициента a_3^- : в случае $a_3^- > 0$ мы пользовались предложением 6.3 и строили NW-пробой, а при $a_3^- < 0$ мы пользовались предложением 6.4 и строили

НЕ-пробой. Теперь же при $a_3^- = 0$ мы не можем построить никакой пробой, чтобы связать области правых и левых простых фолиаций. Но благодаря тому, что граничная функция на нижней границе является квадратичным полиномом, мы можем эти области связать треугольником билинейности $\Omega_\varepsilon^T(u_{01})$,

$$\Omega_\varepsilon^T(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega_\varepsilon : u + x_2 - \varepsilon \leq x_1 \leq u - x_2 + \varepsilon\}. \quad (17.2)$$

Итак, проверим, что при малых ε у нас будет фолиация

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{01} - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^T(u_{01}) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_{01} + \varepsilon, v_{-2}) \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_{-2} + \varepsilon, -\varepsilon), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, \infty), \end{aligned} \quad (17.3)$$

которая изображена на рисунке 37.

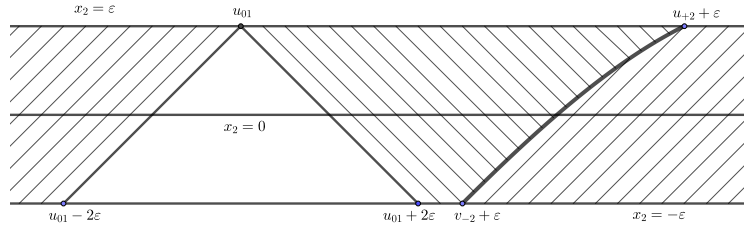


Рис. 37. Фолиация (17.3).

Отметим, что в наших специальных обозначениях для пробоев, введенных в разделе 6 (см. [4]), справедливо соотношение

$$\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_{-2} + \varepsilon, -\varepsilon), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) = \Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v_{-2}, u_{+2}),$$

но мы воспользовались общим обозначением для горизонтальных ёлок, поскольку, как мы увидим, в процессе эволюции (то есть с ростом ε) основание этой ёлки оторвётся от нижней границы и она перестанет быть пробоем.

Чтобы доказать, что данным граничным значениям отвечает описанная фолиация, нам нужно проверить, что выполнены неравенства $D_+ \geq 0$ и $D_- \geq 0$ на верхней границе полосы при $x_1 \leq u_{01} - \varepsilon$ и $x_1 \geq u_{+2}$, а также на нижней границе при $u_{01} + \varepsilon \leq x_1 \leq v_{-2}$. Визуально убедиться в выполнении этих неравенств можно, глядя на рис. 38, где изображены те компоненты изоклин X_1 и X_{-1} , которые являются

графиками кривых $D_+ = 0$ и $D_- = 0$. (Напомним, что для поля, задающего правую ёлку, верхняя граница полосы всегда принадлежит изоклине X_{-1} , а нижняя – изоклине X_1 .)

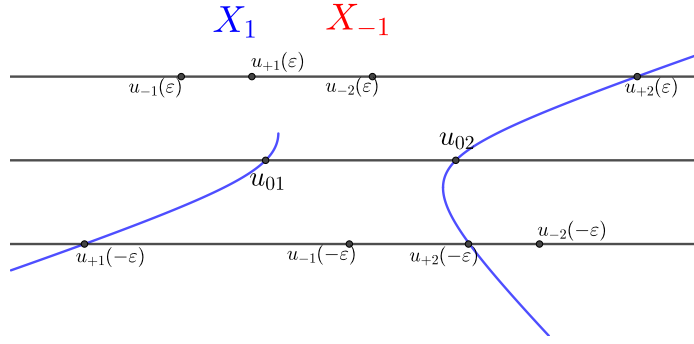


Рис. 38. Графики кривых $D_+ = 0$ и $D_- = 0$.

Поскольку D_+ и D_- являются квадратичными многочленами по переменной x_1 , чтобы определить их знак, достаточно посчитать корни этих многочленов. Воспользуемся формулами (9.3)–(9.4) ([5]), где были сосчитаны выражения D_+ и D_- для полиномов третьей степени. Так как $a_3^- = 0$, то

$$\begin{aligned} 2x_2 D_-(x) &= 3a_3^+(x_1 + x_2 - u_0)^2 - \frac{d^2}{3a_3^+} \\ &= 3a_3^+(x_1 + x_2 - u_{01})(x_1 + x_2 - u_{02}), \end{aligned} \quad (17.4)$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{a_2^+ - a_2^-}{3a_3^+}, \quad d = \sqrt{(a_2^+ - a_2^-)^2 - 3a_3^+(a_1^+ - a_1^-)} \\ u_{01} &= u_0 - \frac{d}{3a_3^+}, \quad u_{02} = u_0 + \frac{d}{3a_3^+}. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Поэтому изоклина $D_- = 0$ распадается на две прямых: $x_1 + x_2 = u_{01}$ и $x_1 + x_2 = u_{02}$. Нам нужны корни на верхней границе:

$$u_{-1}(\varepsilon) = u_0 - \frac{d}{3a_3^+} - \varepsilon; \quad u_{-2}(\varepsilon) = u_0 + \frac{d}{3a_3^+} - \varepsilon; \quad (17.6)$$

и на нижней границе:

$$u_{-1}(-\varepsilon) = u_0 - \frac{d}{3a_3^+} + \varepsilon; \quad u_{-2}(-\varepsilon) = u_0 + \frac{d}{3a_3^+} + \varepsilon; \quad (17.7)$$

Изоклина $D_+ = 0$ является гиперболой:

$$2x_2 D_+(x) = 3a_3^+(x_1 - x_2 - u_0)^2 - \frac{d^2 + 36(a_3^+ x_2)^2}{3a_3^+}. \quad (17.8)$$

Соответственно, корни функции D_+ на верхней границе выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{+1}(\varepsilon) &= u_0 - \frac{\sqrt{d^2 + (6a_3^+ \varepsilon)^2}}{3a_3^+} + \varepsilon; \\ u_{+2}(\varepsilon) &= u_0 + \frac{\sqrt{d^2 + (6a_3^+ \varepsilon)^2}}{3a_3^+} + \varepsilon; \end{aligned} \quad (17.9)$$

и на нижней границе:

$$\begin{aligned} u_{+1}(-\varepsilon) &= u_0 - \frac{\sqrt{d^2 + (6a_3^+ \varepsilon)^2}}{3a_3^+} - \varepsilon; \\ u_{+2}(-\varepsilon) &= u_0 + \frac{\sqrt{d^2 + (6a_3^+ \varepsilon)^2}}{3a_3^+} - \varepsilon. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Очевидное неравенство

$$d + 6a_3^+ \varepsilon \geq \sqrt{d^2 + (6a_3^+ \varepsilon)^2}$$

влечёт следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_{-1}(\varepsilon) &\leq u_{+1}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad u_{-2}(\varepsilon) \leq u_{+2}(\varepsilon); \\ u_{+1}(-\varepsilon) &\leq u_{-1}(-\varepsilon) \quad \text{и} \quad u_{+2}(-\varepsilon) \leq u_{-2}(-\varepsilon). \end{aligned} \quad (17.11)$$

Поскольку старший коэффициент многочленов $D_+(u, \varepsilon)$ и $D_-(u, \varepsilon)$ положителен, неравенства $D_+(u, \varepsilon) > 0$ и $D_-(u, \varepsilon) > 0$ выполнены снаружи от корней многочленов, то есть при

$$u < u_{-1}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad u > u_{+2}(\varepsilon), \quad (17.12)$$

а неравенства $D_+(u, -\varepsilon) > 0$ и $D_-(u, -\varepsilon) > 0$ выполнены на интервале между корнями, поскольку старший коэффициент отрицателен:

$$u_{-1}(-\varepsilon) < u < u_{+2}(-\varepsilon). \quad (17.13)$$

Это означает, что мы можем построить области с простой фолиацией

$$\Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{-1}(\varepsilon)), \quad \Omega_\varepsilon^L(u_{-1}(-\varepsilon), u_{+2}(-\varepsilon)) \quad \text{и} \quad \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}(\varepsilon), \infty).$$

Чтобы соединить первые две области, мы помещаем между ними треугольник билинейности

$$\Omega_\varepsilon^T(u_{01}),$$

где функция Беллмана определяется значением на верхней границе в точке $u_{01} = u_{-1}(\varepsilon) + \varepsilon = u_{-1}(-\varepsilon) - \varepsilon$ и квадратичным многочленом на нижней границе по формуле

$$\mathbf{B}(x) = (x_2 + \varepsilon) \frac{f_+(u_{01}) - f_-(u_{01})}{2\varepsilon} + f_-(x_1) + a_2^-(\varepsilon^2 - x_2^2). \quad (17.14)$$

А между двумя другими областями мы вставляем пробой

$$\Omega_\varepsilon^{\text{sw}}(v_{-2}, u_{+2}),$$

для чего нужно будет несколько сузить область $\Omega_\varepsilon^L(u_{-1}(-\varepsilon), u_{+2}(-\varepsilon))$ до $\Omega_\varepsilon^L(u_{-1}(-\varepsilon), v_{-2})$, что можно сделать, поскольку всегда

$$v_{-2} < u_{02} - \varepsilon < u_{+2}(-\varepsilon).$$

Результирующая фолиация (17.3) показана на рисунке 37.

Следует отметить, что все эти рассуждения справедливы при малых ε , а точнее при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, где ε_1 — это корень уравнения $u_{-1}(-\varepsilon) = v_{-2}(\varepsilon)$, то есть ε_1 — это значение параметра ε , при котором область $\Omega_\varepsilon^L(u_{-1}(-\varepsilon), v_{-2})$ сжимается до одного отрезка.

Нетрудно понять, что будет происходить при больших ε . Теперь горизонтальная ёлка уже не будет расти из точки на нижней границе. Чтобы найти точку, откуда она может расти, надо рассмотреть интегральную кривую ℓ_ε нашего поля, выходящую из точки (u_{+2}, ε) , сдвинуть её на ε вправо (получим возможный ствол левой ёлки) и найти точку C , в которой пересекается эта кривая с правой стороной треугольника $\Omega_\varepsilon^T(u_{01})$. Такая точка C всегда найдётся при $\varepsilon > \varepsilon_1$, и координата $C_2 = C_2(\varepsilon)$, оставаясь отрицательной, монотонно возрастает от значения $C_2(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$.

Эти утверждения легче проверить, если сдвигать не интегральную кривую ℓ_ε вправо, а треугольник $\Omega_\varepsilon^T(u_{01})$ сдвигать влево. Преимущество рассмотрения этого сдвига заключается в том, что прямая, на которой лежит правая сторона сдвинутого треугольника, уже не зависит от ε — это прямая, проходящая через точку $(u_{01}, 0)$. Это — не просто прямая, не зависящая от ε , это — прямая, на которой $D_- = 0$, то есть она ограничивает область, где $D_- > 0$. И если из интегральной

кривой ℓ_ε мы хотим сделать ствол ёлки, мы не можем её продолжать за эту границу. Отметим ещё, что в этой точке наклон кривой ℓ_ε равен единице.

Так как в нижней половине полосы кривые ℓ_ε монотонно возрастают с ростом ε , то возрастает и вертикальная координата точки пересечения кривой ℓ_ε с правой стороной сдвинутого треугольника. Кроме того становится очевидным, что эта точка пересечения при всех ε остаётся в нижней половине полосы. Действительно, та часть сдвинутого треугольника, которая лежит в верхней половине полосы, находится слева от точки $(u_{01}, 0)$, а верхняя половина кривой ℓ_ε находится справа от точки $(u_{02}, 0)$, в которой кривая ℓ_ε пересекает середину полосы. Следовательно, точек пересечения в верхней половине полосы быть не может. Чтобы получить искомую точку C , нам нужно полученную точку пересечения сдвинуть на ε вправо, то есть координаты точки C удовлетворяют условию $C_1 + C_2 = u_{01} + \varepsilon$.

Таким образом, последняя нижняя ветвь ёлки (экстремальный отрезок, идущий от точки C к нижней границе) C_1 -гладко как бы продолжает ствол ёлки, поскольку мы знаем, что в нижней точке (точке C) ствол имеет наклон 1. Она отсекает от треугольника $\Omega_\varepsilon^T(u_{01})$ треугольник около правой вершины, остающаяся область билинейности представляет собой прямоугольную трапецию (см. рис. 39). В итоге

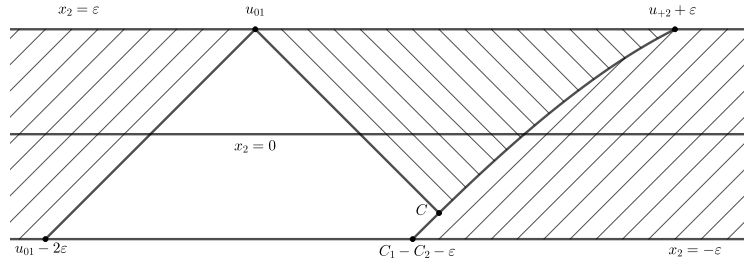


Рис. 39. Фолиация (17.15).

при $\varepsilon > \varepsilon_1$ мы получаем фолиацию

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{01} - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^{Tx}(u_{01}, C) \\ \cup \Omega_\varepsilon^{HB}(C, (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, \infty), \end{aligned} \quad (17.15)$$

где

$$\Omega_\varepsilon^{\text{Тз}}(u_{01}, C) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega_\varepsilon : u_{01} - \varepsilon \leq x_1 - x_2 \leq C_1 - C_2, x_1 + x_2 \leq C_1 + C_2\}, \quad (17.16)$$

и функция $\mathbf{B}$ в этой области задана формулой (17.14). Полная фолиация изображена на рисунке 39.

Теперь обратимся к случаю, когда $d = 0$ и $a_3^- > 0$. Локальную фолиацию (16.3) при малых ε даёт предложение 16.4. Она изображена на рисунке 32. Здесь мы покажем, что на самом деле эта фолиация распространяется на всю полосу (то есть $u_1 = -\infty$ и $u_2 = +\infty$) и остаётся такой при всех ε :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(-\infty, v_+^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+^l + \varepsilon, \varepsilon), (u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_+^r, +\infty). \quad (17.17)$$

Тот факт, что функция $2x_2D_+$ является квадратным многочленом по первой переменной, гарантирует нам существование только двух корней $u_+^{l,r}$ уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$, а также то, что $D_+(u, \varepsilon) > 0$ при $u < u_+^l$ и $u > u_+^r$. Неравенство $D_-(u, \varepsilon) > 0$ выполнено всюду в верхней полуполосе в силу соотношения

$$2x_2D_-(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 + x_2 - u_0)^2 + 12a_3^-x_2^2. \quad (17.18)$$

Таким образом, единственное, что нам остаётся проверить, это то, что интегральная кривая ℓ_ε целиком располагается в области $D_+ > 0$, то есть слева выходит на верхнюю границу при $v_+^l \leq u_+^l$. Это, например, вытекает из того, что, если мы двигаемся по нашей интегральной кривой от точки $(u_0, 0)$ влево к верхней границе, то мы не можем пересечь изоклину X_0 , которая на интервале между $(u_0, 0)$ и (u_+^l, ε) проходит под изоклиной X_1 , что в нашем случае легко проверить непосредственным вычислением, поскольку X_1 — это прямая

$$x_1 - u_0 = \left(1 - 2\sqrt{\frac{a_3^+}{a_3^+ - a_3^-}}\right)x_2, \quad (17.19)$$

а X_0 — это верхняя ветвь гиперболы

$$\left(x_2 + \frac{a_3^+ + a_3^-}{a_3^+ - a_3^-}\right)^2 - (x_1 - u_0 - \varepsilon)^2 = \frac{4a_3^+a_3^-}{(a_3^+ - a_3^-)^2}. \quad (17.20)$$

И, наконец, последний вырожденный случай: $d = 0$ и $a_3^- = 0$. Как и раньше, подходящая нам интегральная кривая ℓ_ε соединяет точки (u_+^r, ε) и $(u_0, 0)$. Таким образом, мы можем построить ёлку, растущую

из точки $(u_0 + \varepsilon, 0)$ в точку $(u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)$. Кстати, отметим, что при условиях $d = 0$ и $a_3^- = 0$ у нас $u_+^r + \varepsilon = 3\varepsilon$ и $u_+^l + \varepsilon = -\varepsilon$. Поскольку $2x_2D_- = 3a_3^+(x_1 + x_2 - u_0)^2$, всюду в верхней полуполосе выполняется неравенство $D_- \geq 0$, а неравенство $D_+(u, \varepsilon) > 0$ справедливо вне промежутка между корнями, то есть при $u < -\varepsilon$ и при $u > 3\varepsilon$. Таким образом, можно построить две области с простой правой фолиацией $\Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_0 - \varepsilon)$ и $\Omega_\varepsilon^R(u_0 + 3\varepsilon, +\infty)$. Ёлка $\Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_0 + 4\varepsilon, \varepsilon))$ замечает часть пространства между ними, и остаётся трапеция $\Omega_\varepsilon^{\text{Tz}}(u_0, (u_0, 0))$ (определение области приведено в формуле (17.16)), которая является областью билинейности. Итого, при всех ε мы получаем фолиацию

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_0 - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Tz}}(u_0, (u_0, 0)) \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_0 + 4\varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_0 + 3\varepsilon, \infty). \end{aligned} \quad (17.21)$$

Эта фолиация изображена на рисунке 40.

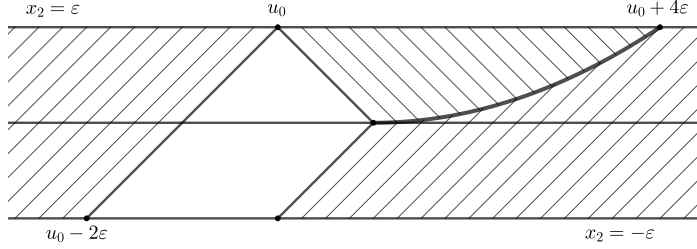


Рис. 40. Фолиация (17.21).

§18. ОБЗОР ФОЛИАЦИЙ

ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ СТЕПЕНИ НЕ БОЛЬШЕ ТРЁХ

В данном разделе мы соберём вместе все результаты, описывающие фолиации, которые возникают в тех случаях, когда граничные функции имеют вид

$$f_\pm(t) = a_3^\pm t^3 + a_2^\pm t^2 + a_1^\pm t + a_0^\pm.$$

Чтобы без необходимости не увеличивать количество рассматриваемых вариантов, мы не будем описывать те варианты, которые получаются с помощью симметрии относительно вертикальной или/и горизонтальной оси. Если окажется, что $|a_3^+| < |a_3^-|$, то мы поменяем знак у

x_2 , то есть поменяем местами f_+ и f_- . Если в результате окажется, что $a_3^+ < 0$, то мы поменяем знак у x_1 . Поэтому мы можем предполагать, что $a_3^+ \geq |a_3^-|$.

18.1. $a_3^+ = a_3^- = 0$.

Начнём разбор с того случая, когда оба многочлена имеют степень меньше трёх. Все варианты были описаны в разделе 3 статьи [4].

18.1.1. $a_2^+ = a_2^-$.

В этом случае у нас при всех ε реализуется один из трёх вариантов.

- а) Если $a_1^+ > a_1^-$, то у нас правая простая фолиация $\Omega_\varepsilon^R(-\infty, +\infty)$, изображённая на рисунке 41.

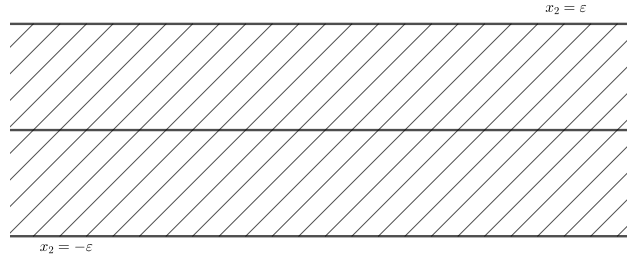


Рис. 41. Правая простая фолиация.

- б) Если $a_1^+ < a_1^-$, то у нас левая простая фолиация $\Omega_\varepsilon^L(-\infty, +\infty)$, изображённая на рисунке 42.
- с) Если $a_1^+ = a_1^-$, то во всей полосе функция Беллмана билинейна.

18.1.2. $a_2^+ \neq a_2^-$.

Функция $f'_+ - f'_-$ линейна с ненулевым наклоном графика, и у неё есть корень в точке

$$u_0 = \frac{a_1^- - a_1^+}{2(a_2^+ - a_2^-)}. \quad (18.1)$$

- а) Если $a_2^+ < a_2^-$, то фолиация имеет вид

$$\Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_0 - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^T(u_0) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_0 + \varepsilon, +\infty). \quad (18.2)$$

Она изображена на рисунке 43.

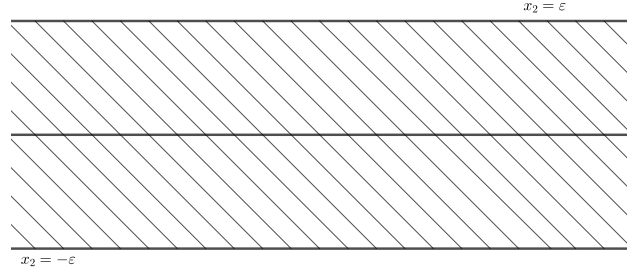


Рис. 42. Левая простая фолляция.

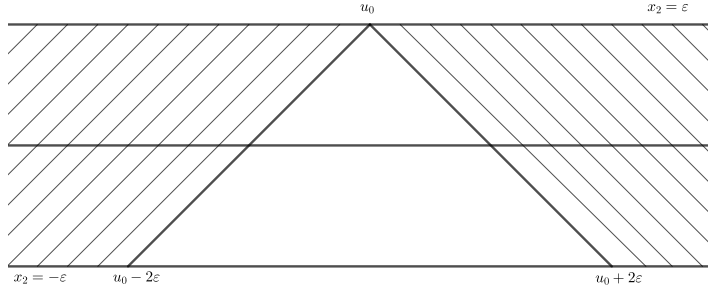


Рис. 43. Фолляция (18.2).

б) Если $a_2^+ > a_2^-$, то фолляция имеет вид

$$\Omega_\varepsilon^L(-\infty, u_0 - \varepsilon) \cup \overline{\Omega_\varepsilon^T}(u_0) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_0 + \varepsilon, +\infty). \quad (18.3)$$

Она изображена на рисунке 44.

18.2. $a_3^+ = a_3^- \neq 0$.

Этот случай был разобран в разделе 7 статьи [4].

18.2.1. $a_2^+ = a_2^-$.

Положим

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{|a_1^+ - a_1^-|}{12a_3}}. \quad (18.4)$$

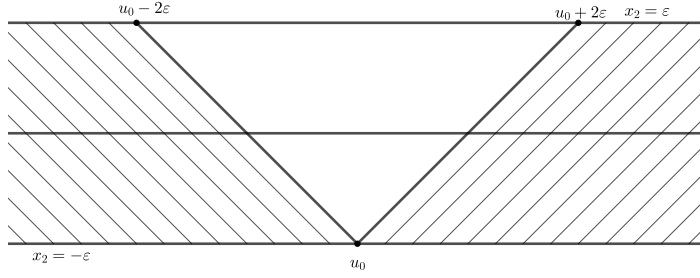


Рис. 44. Фолиация (18.3).

- а) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $a_1^+ > a_1^-$, то мы имеем правую простую фолиацию $\Omega_\varepsilon^R(-\infty, +\infty)$, изображённую на рисунке 41.
- б) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $a_1^+ < a_1^-$, то мы имеем левую простую фолиацию $\Omega_\varepsilon^L(-\infty, +\infty)$, изображённую на рисунке 42.
- в) Если $\varepsilon > \varepsilon_0$, то у нас бесконечная левая горизонтальная ёлка, стволом которой является прямая

$$x_2 = \text{sign}(a_1^+ - a_1^-)\varepsilon_0$$

(см. рис. 45).

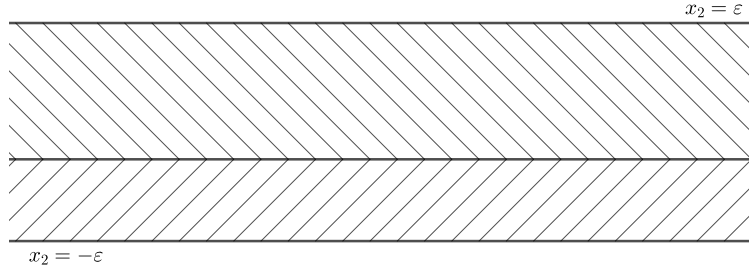


Рис. 45. Бесконечная левая горизонтальная ёлка.

 18.2.2. $a_2^+ \neq a_2^-$.

В этом случае у нас есть один корень u_0 уравнения $f'_+ = f'_-$ (см. (18.1)), и при всех ε мы можем построить пробой, пересекающий середину полосы в точке $x_1 = u_0 + \varepsilon$.

а) Если $a_2^+ > a_2^-$, то фолляция будет иметь вид

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^L(-\infty, v_-) \bigcup \Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v_-, u_+) \bigcup \Omega_\varepsilon^R(u_+, +\infty), \quad (18.5)$$

где u_+ – корень уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$, а v_- – это первая координата точки, в которой интегральная кривая ℓ_ε поля (5.3), выходящая из точки (u_+, ε) , пересекает нижнюю границу полосы Ω_ε . Эта фолляция изображена на рисунке 46.

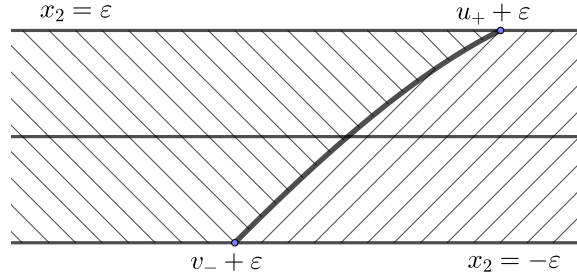


Рис. 46. Фолляция с SW-пробоем (18.5).

б) Если $a_2^+ < a_2^-$, то фолляция будет иметь вид

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{NW}}(v_+, u_-) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_-, +\infty), \quad (18.6)$$

где u_- – корень уравнения $D_-(u, -\varepsilon) = 0$, а v_+ – это первая координата точки, в которой интегральная кривая ℓ_ε поля (5.3), выходящая из точки $(u_-, -\varepsilon)$, пересекает верхнюю границу полосы Ω_ε . Эта фолляция изображена на рисунке 47.

18.3. $a_3^+ \neq a_3^-$, $(a_2^+ - a_2^-)^2 > 3(a_3^+ - a_3^-)(a_1^+ - a_1^-)$.

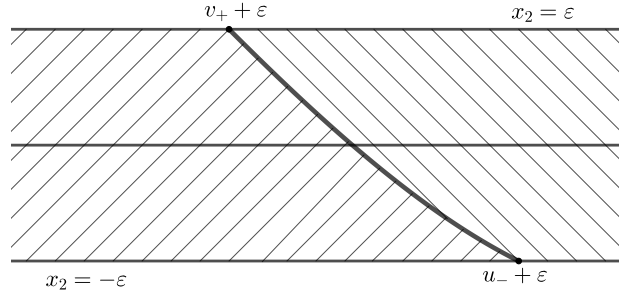


Рис. 47. Фолиация с NW-пробоем (18.6).

18.3.1. $a_3^- > 0$.

При малых ε фолиация была описана в разделе 7 ([4]), а при больших ε – в разделе 15. Критическое значение ε_0 является решением уравнения $u_{-1}(\varepsilon) = v_{-2}(\varepsilon)$.

а) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, то у нас два пробоя (см. рис. 48)

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, v_{+1}) \cup \Omega_\varepsilon^{NW}(v_{+1}, u_{-1}) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_{-1}, v_{-2}) \\ \cup \Omega_\varepsilon^{SW}(v_{-2}, u_{+2}) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, +\infty), \end{aligned} \quad (18.7)$$

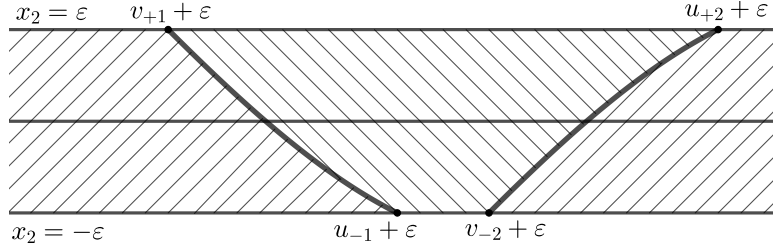


Рис. 48. Фолиация (18.7).

б) Если $\varepsilon > \varepsilon_0$, то пробоя соединяются в большой карман (см. рис. 49)

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, v_{+1}) \cup \Omega_\varepsilon^{HB}((v_{+1} + \varepsilon, \varepsilon), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, +\infty). \quad (18.8)$$

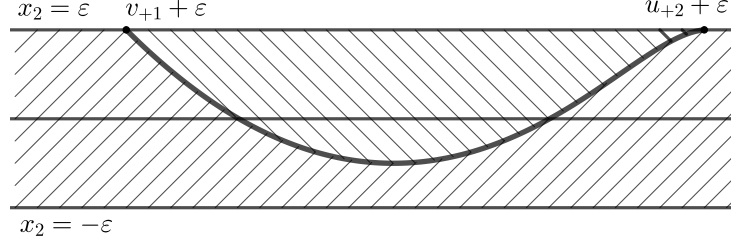


Рис. 49. Фолиация (18.8).

18.3.2. $a_3^- = 0$.

Фолиация была описана в разделе 17. Критическое значение ε_1 — это корень уравнения $u_{-1}(-\varepsilon) = v_{-2}(\varepsilon)$.

- а) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, то у нас имеется треугольник билинейности и один пробой, описанные в равенстве (17.3):

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{01} - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^T(u_{01}) \cup \Omega_\varepsilon^L(u_{01} + \varepsilon, v_{-2}) \\ \cup \Omega_\varepsilon^{HB}((v_{-2} + \varepsilon, -\varepsilon), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, \infty).$$

Фолиация изображена на рисунке 37.

- б) Если $\varepsilon > \varepsilon_1$, то пробой “срезает” угол треугольника, превращая его в трапецию (равенство (17.15)):

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{01} - \varepsilon) \cup \Omega_\varepsilon^{Tz}(u_{01}, C) \cup \Omega_\varepsilon^{HB}(C, (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, \infty).$$

Фолиация изображена на рисунке 39.

18.3.3. $a_3^- < 0$.

При малых ε фолиация была описана в разделе 7 ([4]), а при больших ε — в разделе 12 ([5]). Критическое значение ε_2 является решением уравнения $v_{+1}(\varepsilon) = v_{-2}(\varepsilon)$.

- а) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, то у нас два пробоя (см. формулу (12.2)⁴):

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{-1}) \cup \Omega_\varepsilon^{NE}(u_{-1}, v_{+1}) \cup \Omega_\varepsilon^L(v_{+1}, v_{-2}) \\ \cup \Omega_\varepsilon^{SW}(v_{-2}, u_{+2}) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, +\infty). \quad (18.9)$$

⁴Заметим, что в формуле (12.2) перепутаны индексы NE и SW у пробоев.

Фолиация изображена на рисунке 50.

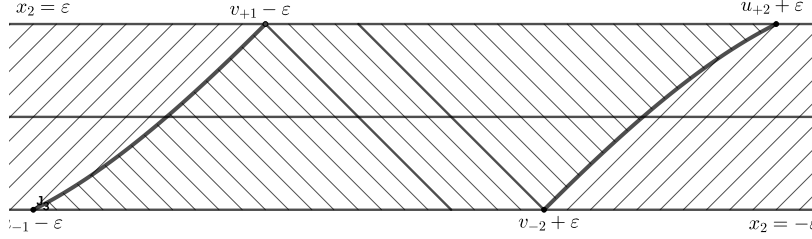


Рис. 50. Фолиация (18.9).

б) Если $\varepsilon > \varepsilon_2$, между пробоями возникает прямоугольник билинейности. Фолиация описана в равенствах (12.3) или (12.4):

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_{-1}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((C_1 - \varepsilon, -C_2), (u_{-1} - \varepsilon, -\varepsilon)) \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((C_1 + \varepsilon, C_2), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_{+2}, +\infty), \end{aligned} \quad (18.10)$$

Фолиация изображена на рисунке 51.

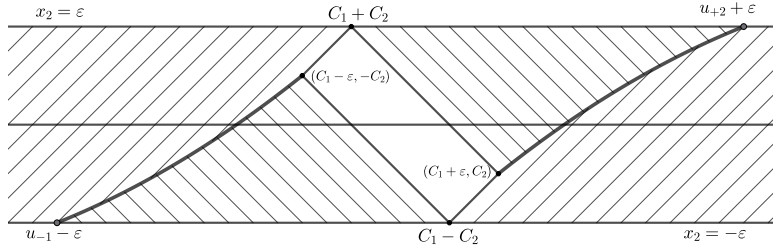


Рис. 51. Фолиация (18.10).

Здесь $C = C(\varepsilon)$ — это точка пересечения кривых ℓ_ε^+ и $\bar{\ell}_\varepsilon^-$, где ℓ_ε^+ — это интегральная кривая поля (5.3), которая стартует из точки (u_{+2}, ε) с положительным наклоном (то есть это та кривая, которая порождает ёлку, расположенную справа), а $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ — это кривая, симметричная относительно оси x_1 интегральной кривой ℓ_ε^- поля (8.22), которая стартует из точки $(u_{-1}, -\varepsilon)$ с положительным наклоном (то есть, которая порождает ёлку, расположенную слева).

18.4. $a_3^+ \neq a_3^-$, $(a_2^+ - a_2^-)^2 < 3(a_3^+ - a_3^-)(a_1^+ - a_1^-)$.

18.4.1. $a_3^- \geq 0$.

Этот случай был разобран в разделе 9 (см. [5]). Формулой (9.2) было определено значение параметра ε_0^+ , при котором происходит перестройка фоллиации.

- а) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_0^+$, то вся полоса заполнена правой простой фоллиацией:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, +\infty). \quad (18.11)$$

См. рис. 41.

- б) При $\varepsilon > \varepsilon_0^+$ возникает малый карман на верхней границе и фоллиация принимает вид:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+, \varepsilon), (u_+^r, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+^r, +\infty). \quad (18.12)$$

Фоллиация изображена на рисунке 52.

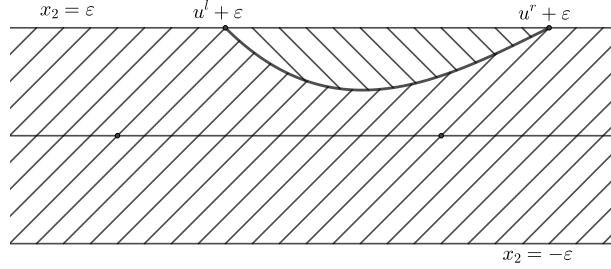


Рис. 52. Фоллиация (18.12).

18.4.2. $a_3^- < 0$.

Этот случай был разобран в разделе 10 (см. [5]). Формулой (10.1) было определено значение параметра ε_0^- , при котором происходит ещё одна перестройка фоллиации. Окончательная перестройка фоллиации происходит при $\varepsilon = \varepsilon_2$.

При малых ε фоллиация развивается так же, как в предыдущем случае.

- а) Если $\varepsilon \leq \varepsilon_0^+$, то вся полоса заполнена правой простой фоллиацией (18.11). См. рис. 41.

- b) Если $\varepsilon_0^+ < \varepsilon \leq \varepsilon_0^-$, возникает малый карман на верхней границе и фолиация имеет вид (18.12). См. рис. 52.

Далее ситуация может развиваться по разному в зависимости от взаимного положения второго конца $v_+(\varepsilon)$ экстремали ℓ_ε^+ и появляющегося на верхней границе корня u_0^- уравнения $D_-(u, \varepsilon) = 0$:

$$u_0^- = -\varepsilon_0^- - \frac{a_2^+ - a_2^-}{3(a_3^+ - a_3^-)}. \quad (18.13)$$

1. Если $v_+(\varepsilon_0^-) \geq u_0^-$, то

- c1) до момента ε_2 , задаваемого условием $v_+(\varepsilon_2) = u_-^l(\varepsilon_2)$, сохраняется фолиация (18.12),
- d1) а при $\varepsilon > \varepsilon_2$ появляется вторая (уже правая) ёлка и разделяющий две ёлки прямоугольник билинейности:

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_-^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((C_1 - \varepsilon, -C_2), (u_-^l - \varepsilon, -\varepsilon)) \\ & \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}(C) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((C_1 + \varepsilon, C_2), (u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+^r, +\infty). \end{aligned} \quad (18.14)$$

Фолиация изображена на рисунке 53.

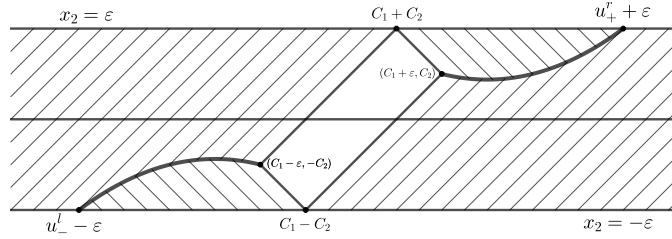


Рис. 53. Фолиация (18.14).

Здесь $C = C(\varepsilon)$ — это точка пересечения кривых ℓ_ε^+ и $\bar{\ell}_\varepsilon^-$, где ℓ_ε^+ — это интегральная кривая поля (5.3), которая стартует из точки (u_+^r, ε) с положительным наклоном (то есть это та кривая, которая порождает пробой, расположенный справа), а $\bar{\ell}_\varepsilon^-$ — это кривая, симметричная относительно оси x_1 интегральной кривой ℓ_ε^- поля (8.22), которая стартует из точки $(u_-^l, -\varepsilon)$ с положительным наклоном (то есть, которая порождает пробой, расположенный слева).

2. Если $v_+(\varepsilon_0^-) < u_0^-$, то

c2) при $\varepsilon = \varepsilon_0^-$ возникает на нижней границе правая ёлка, которая существует одновременно с левой ёлкой на верхней границе до момента ε_2 , задаваемого условием

$$v_+(\varepsilon_2) = v_-(\varepsilon_2),$$

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon = & \Omega_\varepsilon^R(-\infty, u_-^l) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_- - \varepsilon, -\varepsilon), (u_-^l - \varepsilon, -\varepsilon)) \\ & \cup \Omega_\varepsilon^R(v_-, v_+) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((v_+ + \varepsilon, \varepsilon), (u_+^r + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+^r, +\infty); \end{aligned} \quad (18.15)$$

фолиация изображена на рисунке 54;

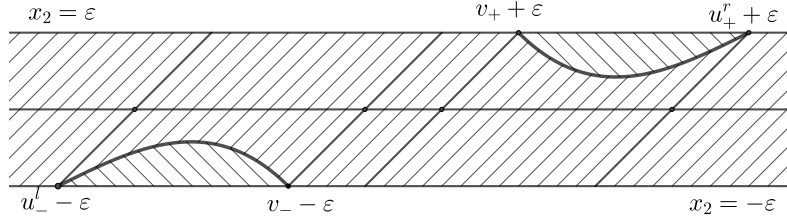


Рис. 54. Фолиация (18.15).

d2) при $\varepsilon = \varepsilon_2$ область $\Omega_\varepsilon^R(v_-, v_+)$ схлопывается, и при $\varepsilon > \varepsilon_2$ появляется разделяющий две ёлки прямоугольник билинейности, а фолиация приобретает вид (18.14) (рис. 53).

18.5. $a_3^+ \neq a_3^-$, $(a_2^+ - a_2^-)^2 = 3(a_3^+ - a_3^-)(a_1^+ - a_1^-)$.

18.5.1. $a_3^- > 0$.

При всех ε имеет место фолиация (17.17), которая называется средним карманом. Она изображена на рисунке 55.

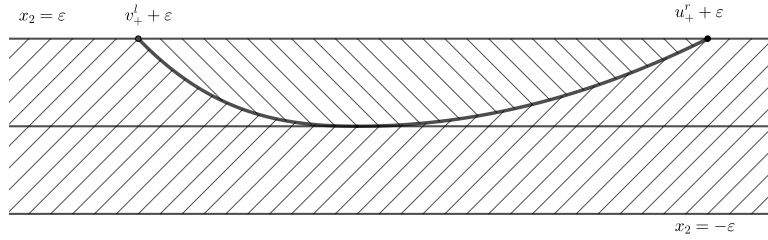


Рис. 55. Фолиация (17.17).

18.5.2. $a_3^- = 0$.

При всех ε имеет место фолляция (17.21), которая изображена на рисунке 40.

18.5.3. $a_3^- < 0$.

Этот случай был разобран ещё в разделе 12 (см. [5]), где было показано, что при всех ε имеет место фолляция

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(-\infty, u_{-1}) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 - \varepsilon, 0), (u_{-1} - \varepsilon, -\varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{Rect}}((u_0, 0)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{HB}}((u_0 + \varepsilon, 0), (u_{+2} + \varepsilon, \varepsilon)) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_{+2}, +\infty). \quad (18.16)$$

Эта фолляция изображена на рисунке 30.

ФОРМУЛЫ И УТВЕРЖДЕНИЯ ИЗ РАБОТ [4] И [5],
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В НАСТОЯЩЕЙ СТАТЬЕ

$$T' = \frac{(\varepsilon - T)D_-^{\text{L}} - (\varepsilon + T)D_+^{\text{L}}}{(\varepsilon - T)D_-^{\text{L}} + (\varepsilon + T)D_+^{\text{L}}}, \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(f'_+ - f'_-) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- - x_2(\varepsilon + x_2)f''_+, \\ \dot{x}_2 = x_2(f'_- - f'_+) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- + x_2(\varepsilon + x_2)f''_+; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} J_{11} &= \varepsilon(f''_+ - f''_-) - x_2(\varepsilon - x_2)f'''_- - x_2(\varepsilon + x_2)f'''_+, \\ J_{12} &= 2x_2(f''_- - f''_+) + x_2(\varepsilon - x_2)f'''_- - x_2(\varepsilon + x_2)f'''_+, \\ J_{21} &= (f'_- - f'_+) - (\varepsilon - x_2)(f''_- - x_2f'''_-) + (\varepsilon + x_2)(f''_+ + x_2f'''_+), \\ J_{22} &= (f'_- - f'_+) - (\varepsilon - x_2)(f''_- - x_2f'''_-) + (\varepsilon + x_2)(f''_+ + x_2f'''_+). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\varepsilon + x_2) \left[\frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2f''_+ \right] + (\varepsilon - x_2) \left[\frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2f''_- \right], \\ \dot{x}_2 = (\varepsilon + x_2) \left[\frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2f''_+ \right] - (\varepsilon - x_2) \left[\frac{1}{2}(f'_- - f'_+) - x_2f''_- \right], \end{cases} \quad (8.22)$$

Предложение 8.8. Пусть функция D_+ обращается в ноль в точке (u, ε) . Предположим, что

$$\kappa_+^L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2f_+'''(u + \varepsilon)}{f_+''(u + \varepsilon) - f_-''(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u + \varepsilon)} > 0. \quad (8.20)$$

Тогда до тех пор, пока кривая ℓ_ε идёт в области, где $x_2 D_+ D_- > 0$, её наклон находится в промежутке между -1 и 1 (то есть она может рассматриваться как график функции от аргумента x_1). Более того, при $\varepsilon' < \varepsilon''$ кривая $\ell_{\varepsilon'}$ располагается строго выше кривой $\ell_{\varepsilon''}$, пока они находятся в рассматриваемой области.

Замечание 8.12.

В только что доказанном предложении предполагалось, что мы рассматриваем кривую ℓ_ε только в верхней или нижней половине полосы. Однако нетрудно распространить утверждение и на другую половину, если интегральная кривая ℓ_ε пересекает середину полосы в точке $(u_0, 0)$, где u_0 – простой корень уравнения $f_+'(u) = f_-'(u)$. В этом случае при переходе в другую половину полосы соотношения ниже и выше меняются местами. Общее правило можно сформулировать так: чем больше ε , тем ближе кривая ℓ_ε к середине полосы $x_2 = 0$.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^+ \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{12a_3^+} \left[a_1^+ - a_1^- - \frac{(a_2^+ - a_2^-)^2}{3(a_3^+ - a_3^-)} \right]}. \quad (9.2)$$

$$2x_2 D_+(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 - x_2)^2 + 2(a_2^+ - a_2^-)(x_1 - x_2) + (a_1^+ - a_1^-) - 12a_3^+ x_2^2; \quad (9.3)$$

$$2x_2 D_-(x) = 3(a_3^+ - a_3^-)(x_1 + x_2)^2 + 2(a_2^+ - a_2^-)(x_1 + x_2) + (a_1^+ - a_1^-) + 12a_3^- x_2^2; \quad (9.4)$$

$$\varepsilon_0^- = \sqrt{\frac{1}{12|a_3^-|} \left[a_1^+ - a_1^- - \frac{(a_2^+ - a_2^-)^2}{3(a_3^+ - a_3^-)} \right]} = \sqrt{\frac{a_3^+}{|a_3^-|}} \varepsilon_0^+. \quad (10.1)$$

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор признателен П. Б. Затицкому, критические замечания которого помогли улучшить данный текст.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskii, *Martingale transforms of bounded random variables and indicator functions of events*. — Calculus of Variations and Partial Differential Equations, DOI: 101007/s00526-025-03106-2, preprint <https://arxiv.org/abs/2310.02362>.
2. P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, and P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 3415–3468.
3. P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, and P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems on BMO II: evolution*, Mem. Amer. Math. Soc. **255** (2018), no. 1220.
4. В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий, *Некоторые экстремальные задачи для мартингальных преобразований*. I. Зап. Научн. Сем. ПОМИ, **527** (2023), 5–53. English translation in: J. Math. Sciences, **284** (2024), no. 6, 735–766.
5. В. И. Васюнин, *Некоторые экстремальные задачи для мартингальных преобразований*. II. Зап. Научн. Сем. ПОМИ, **537** (2024), 5–53.

Vasyunin V. I. Some extremal problems for martingale transforms. III.

This paper is a direct continuation of two papers with the same title published in the preceeding issues of this journal (vol. 527 (2023) and 537 (2024)). For this reason neither the introductory part of the paper nor the list of references is duplicated. However for the reader's convenience, the formulas from the preceding papers that are cited here are collected in a special addendum at the end of the paper with their original numbers.

At this paper new local foliations are investigated: major and medium pockets and some bilinear domains. The emergence of such local foliations is illustrated by the further investigation of the examples where the boundary functions are polynomials of the third degree. At the end of the paper a survey is given, where all possible foliations are described, when the boundary functions are polynomials of the third degree.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vasyunin@pdmi.ras.ru

Поступило 20 сентября 2025 г.