

Ю. В. Якубович

РОСТ СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ ПУТЕМ ДОБАВЛЕНИЯ ЧАСТЕЙ: СЛУЧАЙ СХОДЯЩИХСЯ ПО ЧЕЗАРО ВЕСОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Базовым примером распределения, рассматриваемого в данной заметке, является мера Ювенса на целочисленных разбиениях. Напомним, что разбиение λ неотрицательного целого числа n – это его представление в виде суммы $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_K$ положительных целых чисел. Представления, отличающиеся только порядком слагаемых (которые часто называют *частями* разбиения), считаются одним и тем же разбиением, поэтому можно предположить, что части $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$; здесь предполагается, что $\lambda_i = 0$ при $i > K$. Количество положительных частей $K = K(\lambda)$ называется *длиной* разбиения λ , а тот факт, что λ является разбиением n , обозначается $\lambda \vdash n$ или $|\lambda| = n$. Мера Ювенса с параметром $\theta > 0$ – это вероятностная мера P^n на конечном множестве $\mathcal{P}_n$ всех разбиений n , определяемая равенством

$$P^n(\lambda) := \frac{\theta^{K(\lambda)} n!}{\theta^{n^\uparrow}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{j^{c_j(\lambda)} c_j(\lambda)!}, \quad \lambda \in \mathcal{P}_n, \quad (1)$$

где $\theta^{n^\uparrow} := \theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1) = \Gamma(\theta + n)/\Gamma(\theta)$ – возрастающая факториальная степень, а

$$c_j(\lambda) := \#\{k : \lambda_k = j\}$$

суть *счетчики*, то есть количества частей j в разбиении λ . Эта мера имеет естественную интерпретацию в терминах случайных перестановок: это проекция вероятностной меры на перестановках n -элементного множества, пропорциональной $\theta^{K(\pi)}$, где $K(\pi)$ – это количество циклов

Ключевые слова: случайное разбиение целого числа, распределение Ювенса, ГЕМ-распределение, распределение Пуассона–Дирихле, стохастический порядок.

Результаты получены при финансовой поддержке проекта, реализуемого в рамках государственной программы федеральной территории “Сириус” Научно-технологическое развитие федеральной территории “Сириус” (Соглашение No. 3-03 от 18.02.2025).

в перестановке π , а проекция на разбиения получается рассмотрением длин циклов перестановки. При $\theta = 1$ это просто проекция равномерной меры на перестановках на целочисленные разбиения. Эта мера глубоко изучена, сначала Гончаровым [16], а затем многими другими авторами. Упомянем только две статьи [11, 19]; вообще говоря, их гораздо больше. Для других значений θ мера Ювенса была введена в [10] и встречается в различных контекстах, см. книги [1, 14] и недавний обзор [6].

Хорошо известно, что разбиение с мерой Ювенса на $\mathcal{P}_n$ можно получить, осуществляя выборку из случайного дискретного распределения, которое, в свою очередь, подчиняется распределению ГЕМ (названному в честь Гриффитса, Энгена и Макклоски). Простейший способ получить такую выборку – использовать следующую конструкцию, известную как “палитра Кингмана”. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $(W_j)_{j=1,2,\dots}$ с распределением $\text{beta}(1, \theta)$, то есть с плотностью $\theta(1-w)^{\theta-1}$ при $w \in (0, 1)$. Положим $T_0 = 0$, и при $k = 1, 2, \dots$ определим $T_k = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - W_j)$. Легко видеть, что $T_k \uparrow 1$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Точки T_k разбивают интервал $[0, 1)$ на подынтервалы $[T_{k-1}, T_k)$ случайным образом. Обозначим $\mathcal{T}$ полученное таким образом случайное разбиение $[0, 1)$. Совместное распределение длин этих интервалов $(T_k - T_{k-1})_{k=1,2,\dots}$ называется ГЕМ-распределением $\text{GEM}(\theta)$ с параметром θ на бесконечномерном симплексе $\Sigma := \{(p_1, p_2, \dots) : p_i \geq 0 \text{ и } \sum_i p_i = 1\}$. Распределение этих же длин, упорядоченных по невозрастанию, называется распределением Пуассона–Дирихле $\text{PD}(\theta)$. Введем также другую последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $(U_i)_{i=1,2,\dots,n}$, не зависящих от (W_j) . Эти случайные величины попадают в некоторые интервалы случайного разбиения $\mathcal{T}$. Игнорируя порядок интервалов и подсчитывая лишь количество точек U_i в непустых интервалах $\mathcal{T}$, получаем случайное разбиение числа n , которое имеет распределение Ювенса на $\mathcal{P}_n$ с параметром θ , см. [14].

Эта конструкция позволяет связать распределения Ювенса P^n на $\mathcal{P}_n$ и P^{n+1} на $\mathcal{P}_{n+1}$, используя одно и то же случайное разбиение $\mathcal{T}$ и просто добавляя новую независимую точку U_{n+1} к $(U_j)_{j=1,\dots,n}$ для построения случайного разбиения $n+1$. Оказывается, вероятности перехода можно описать напрямую: если разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\kappa) \in \mathcal{P}_n$

соответствует $\mathcal{T}$ и $(U_j)_{j=1,\dots,n}$, то новое разбиение $n+1$ получается либо увеличением некоторой части λ_i , $i = 1, \dots, \mathcal{K}$, на 1 с вероятностью $\lambda_i/(n+\theta)$, либо добавлением новой части 1 с вероятностью $\theta/(n+\theta)$, с последующей перестановкой частей в порядке убывания при необходимости. Это дает марковский процесс роста случайных разбиений, известный как процесс «китайского ресторана»: он начинается с пустого разбиения $\emptyset$ числа 0, и эволюционирует либо увеличением некоторой существующей части на 1, либо добавлением новой части 1 к текущему разбиению. Более подробное изложение см. в [14].

В этой заметке мы исследуем другую процедуру марковского роста случайных разбиений, при которой разбиения растут путем добавления случайных частей к текущему разбиению. Добавленная часть остается в разбиении неизменной навсегда. Поскольку добавленные части обычно больше 1, последовательность полученных таким образом случайных разбиений не обязательно посещает $\mathcal{P}_n$. Однако, если она посещает $\mathcal{P}_n$ при некотором n , посещенное разбиение числа n имеет распределение Ювенса. Конструкция этого процесса основана на независимых пуассоновских процессах и описана в разделе 2.

Фактически мы рассматриваем обобщенные распределения Ювенса, допуская различные веса для частей разных размеров. Таким образом, распределение параметризуется последовательностью неотрицательных весов $(\theta_j)_{j=1,2,\dots}$. Изучаемая нами мера на $\mathcal{P}_n$ — это мера

$$P^n(\lambda) = \frac{1}{h_n} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j^{c_j(\lambda)}}{j^{c_j(\lambda)} c_j(\lambda)!}, \quad \lambda \in \mathcal{P}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2)$$

(Заметим, что при $\lambda \in \mathcal{P}_n$ и $j > n$ всегда $c_j(\lambda) = 0$, так что на самом деле это конечное произведение, как в (1), но мы предпочитаем записывать его в такой форме.) Здесь коэффициент масштабирования (статистическая сумма)

$$h_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j^{c_j(\lambda)}}{j^{c_j(\lambda)} c_j(\lambda)!} \quad (3)$$

делает P^n вероятностной мерой. Поскольку мы допускаем $\theta_j = 0$ для некоторых j , может случиться, что $h_n = 0$ для некоторых n ; мы говорим, что P^n не определено для таких n . Для остальных n случайное разбиение числа n с распределением (2) будет обозначаться $\Lambda^{(n)}$. Известно [12], что процесс «китайского ресторана» не переносится на это

обобщение, поэтому введение другого механизма роста представляется разумным.

Обобщенное распределение Ювенса (2) было введено Ивченко и Медведевым [17] и, по-видимому, независимо Бецом и Уэлчи [2], а затем изучено в [3, 9]. Ссылки на обширную литературу об этом распределении можно найти в недавней работе [8], где обсуждается связь этих мер с некоторыми арифметическими мерами на натуральных числах, представляющих интерес в теории чисел. Частные случаи обобщенных мер Ювенса, когда $\theta_j = \mathbf{1}_A(j)$ для некоторого $A \subset \mathbb{N}$, соответствуют равномерным мерам на перестановках с длинами циклов, лежащими в A (так называемые A -перестановки), точнее, их проекциям на разбиения целых чисел. Эти меры были рассмотрены значительно ранее, см. [21], где есть ссылки на предыдущие работы. Здесь и далее мы используем обозначение $\mathbf{1}_A$ для функции (или случайной величины), равной 1, когда ее аргумент принадлежит множеству A , и 0 в противном случае.

Наша предыдущая работа [20] посвящена случаю, когда веса растут полиномиально, или, точнее, когда частичные суммы $\theta_1 + \dots + \theta_n$ при $n \rightarrow \infty$ растут регулярно с индексом больше 1. Этот случай при более строгих условиях также рассматривался ранее, см. [3, 5]. Настоящая работа посвящена случаю, когда

$$s_n := \theta_1 + \dots + \theta_n \sim \theta n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \theta > 0 \text{ фиксировано,} \quad (4)$$

что напоминает классический случай Ювенса. Более ограничительное предположение $\theta_n \rightarrow \theta > 0$ рассматривалось в [3] с дополнительными условиями на скорость сходимости, которые были затем отброшены в [9]. Мы стремимся повторить результаты [9] при менее ограничительном предположении (4) о сходимости последовательности весов по Чезаро, а не в обычном смысле. Можно предположить, что точная сходимость не требуется, исходя из более ранних результатов Луго [13] и Якимива [21]. Однако нам не удалось показать, что в общем случае произвольной последовательности (θ_j) , удовлетворяющей условию (4), некоторые интересные функционалы от $\Lambda^{(n)}$ имеют предел по распределению (после надлежащего масштабирования). Напротив, есть свидетельства того, что для существования таких пределов требуются некоторые дополнительные условия на (θ_j) . Даже в более простом случае A -перестановок, когда $\theta_j \in \{0, 1\}$, лучшие известные результаты [21] накладывают некоторые дополнительные арифметические

предположения на A . Мы смогли доказать только, что если предел существует, то он такой же, как и в классическом случае Ювенса с параметром θ .

Классическую модель Ювенса с параметром θ гораздо проще изучать, в частности, благодаря наличию процесса «китайского ресторана». Хорошо известно, что последовательность частей (перечисленных в порядке убывания) случайного разбиения числа n с распределением Ювенса(θ) после деления на n сходятся по распределению, при $n \rightarrow \infty$, к случайному элементу бесконечномерного симплекса $\Sigma^1 := \{(p_1, p_2, \dots) : p_1 \geq p_2 \geq \dots \text{ и } \sum_i p_i = 1\}$ с упомянутым выше распределением Пуассона–Дирихле $PD(\theta)$. Это эквивалентно утверждению, что части после деления на n и перестановки их в пропорциональном размеру стохастическом (size-biased) порядке сходятся к распределению $GEM(\theta)$. Этот результат о сходимости по распределению был распространен в [9] на случай, когда $\theta_n \rightarrow \theta$, однако использованные там методы, по-видимому, не работают при более слабом предположении (4). Разработанный здесь новый подход позволяет распространить этот результат и на случай, когда для последовательности весов (θ_j) выполняется только (4), при условии существования предела, см. теорему 3.

В следующем параграфе мы описываем процесс роста разбиений в непрерывном времени, используя независимые неоднородные пуассоновские процессы. В §3 изучается цепь скачков этого процесса, которая оказывается цепью Маркова со стационарными переходными вероятностями. Результаты §§2 и 3 носят общий характер и не основаны на предположении о регулярности (4). В §4 мы накладываем предположение (4) и исследуем некоторые его аналитические следствия. Эти результаты затем используются в §5 для доказательства нашего основного результата – теоремы 3.

§2. ПОСТРОЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ ПО ПУАССОНОВСКИМ ПРОЦЕССАМ

Для последовательности $(\theta_j)_{j=1,2,\dots}$, где $\theta_j \geq 0$, рассмотрим независимые неоднородные пуассоновские процессы $\rho_j(x)$ с мерами интенсивности $\theta_j x^{j-1} dx$ в точке $x \geq 0$, $j = 1, 2, \dots$. Всю необходимую информацию о пуассоновских процессах можно найти, например, в [18]. При фиксированном $x > 0$ случайные величины $\rho_j(x)$ независимы и имеют распределение Пуассона со средним

$$\theta_j x^j / j = \int_0^x \theta_j z^{j-1} dz,$$

а их сумма

$$\rho(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j(x), \quad x \in [0, 1),$$

сходится почти наверное (п.н.), если сходится ряд из их ожиданий

$$\Theta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j}{j} x^j \stackrel{\theta}{=} -\theta \log(1-x). \quad (5)$$

Здесь и далее мы используем обозначение $\stackrel{\theta}{=}$ для значений в классическом случае Ювенса $\theta_j \equiv \theta > 0$. При условии (4) ряд (5) сходится при $|x| < 1$ и расходится при $x = 1$. В этом и следующем параграфах мы предполагаем лишь, что *радиус сходимости* $\Theta(\cdot)$ равен 1 и $\Theta(x) \rightarrow \infty$ при $x \uparrow 1$.

Замечание 1. Пусть r — радиус сходимости $\Theta(\cdot)$. Предположение, что $r = 1$, можно заменить предположением, что r положителен и конечен, поскольку линейная замена времени $x \rightarrow xr$ эквивалентна изменению $\theta_j \rightarrow \theta_j r^j$, которое не меняет меры P^n , заданные равенством (2).

Процесс $\rho(x)$, $x \in [0, 1)$, также является неоднородным процессом Пуассона с мерой интенсивности $\theta(x) dx = \Theta'(x) dx$ в точке $x \in [0, 1)$, где

$$\theta(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j x^{j-1} \stackrel{\theta}{=} \frac{\theta}{1-x}. \quad (6)$$

Слегка перегружая обозначения, мы будем обозначать ρ_j и ρ соответствующие точечные процессы Пуассона, то есть случайные множества точек, в которых пуассоновский процесс совершает скачок. Мы можем записать точки точечного процесса ρ в порядке возрастания: $\rho = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, где $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$. Если $\Theta(x) \rightarrow \infty$ при $x \uparrow 1$, это п.н. счетное множество, и $\xi_k \uparrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Каждая точка ξ_k п.н. лежит лишь в одном из точечных процессов ρ_j ($j = 1, 2, \dots$). Определим случайную величину J_k как индекс процесса, содержащего эту

точку, то есть $J_k = j$, если $\rho_j \ni \xi_k$. Условное распределение J_k при заданном ξ_k является отношением плотностей и не зависит от k :

$$\mathbb{P}(J_k = j | \xi_k = x) = \frac{\theta_j x^{j-1}}{\theta(x)} = x^{j-1}(1-x), \quad x \in (0, 1). \quad (7)$$

Таким образом, J_k можно рассматривать как метку точки $\xi_k \in \rho$ (см. [18, глава 5]); мы называем эти метки *скачками* по причине, которая станет ясна позже. Заметим, что в случае Ювенса с параметром θ это геометрическое распределение, которое не зависит также от θ , но все еще зависит от $\xi_k = x$. В общем случае условное распределение J_k при $\xi_k = x$ представляет собой так называемое распределение степенного ряда $PS_x^{\psi(\cdot)}$ с $\psi(x) = x\theta(x)$. Напомним, что степенному ряду $\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j x^j$ с $\psi_j \geq 0$ и положительным радиусом сходимости R можно сопоставить семейство распределений вероятностей на $\mathbb{N}_0$, известное как *распределение степенного ряда*, следующим образом: $PS_x^{\psi(\cdot)}(\{j\}) = \psi_j x^j / \psi(x)$ для $j \in \mathbb{N}_0$, где $x \in (0, R)$ – параметр. Альтернативно можно охарактеризовать случайную величину X с распределением $PS_x^{\psi(\cdot)}$ ее производящей функцией вероятностей $\mathbb{E} z^X = \psi(zx) / \psi(x)$. Эти распределения играют важную роль в настоящем исследовании.

Для каждого $x \in [0, 1)$ пусть $\Lambda(x)$ – (случайное) разбиение, для которого счетчики частей $c_j(\Lambda(x)) = \rho_j(x)$ при всех $j = 1, 2, \dots$. Таким образом, счетчики частей $c_j(\Lambda(x))$ – независимые пуассоновские случайные величины со средними $\theta_j x^j / j$. По построению, $\Lambda(x)$ имеет $\rho(x)$ частей, которые равны $J_1, \dots, J_{\rho(x)}$. Можно интерпретировать семейство $\Lambda(x)_{x \in [0, 1)}$ как случайный процесс со значениями на разбиениях целых чисел. Он стартует с пустого разбиения $\Lambda(0) = \emptyset$ и развивается по мере роста x , добавляя к текущему разбиению новую случайную часть J_k в каждый момент времени ξ_k , $k = 1, 2, \dots$. Добавленная в момент времени ξ_k часть J_k остается в $\Lambda(x)$ на протяжении всего времени существования процесса, то есть при $x \in [\xi_k, 1)$.

Процесс $\Lambda(x)$ представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем и с нестационарными интенсивностями переходов. Марковское свойство следует из марковского свойства пуассоновских процессов $\rho_j(x)$ и того факта, что $\Lambda(x)$ и последовательность $(\rho_j(x))$ определяют друг друга. Однако мы не будем опираться на марковскую структуру процесса $\Lambda(x)$, а обратимся к явному построению пуассоновского процесса и анализу его цепи скачков. Цепь скачков оказывается цепью

Маркова со стационарными вероятностями переходов, как показывают результаты §3. Но перед этим исследуем некоторые свойства $\Lambda(x)$ и установим его связь со случайными разбиениями числа n , на которых рассматривается обобщенная мера Ювенса P^n .

Для любого $x \in [0, 1]$ вес случайного разбиения $\Lambda(x)$, то есть сумма его частей, равен

$$N(x) := |\Lambda(x)| = \sum_{k=1}^{\rho(x)} J_k = \sum_{j=1}^{\infty} j \rho_j(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (8)$$

Производящую функцию вероятностей для $N(x)$ несложно найти:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} z^{N(x)} &= \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} z^{j \rho_j(x)} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{\theta_j x^j (z^j - 1)/j} \\ &= e^{\Theta(zx) - \Theta(x)} = \frac{(1-x)^\theta}{(1-zx)^\theta}, \quad |z| \leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, $N(x)$ имеет распределение степенного ряда $PS_x^{h(\cdot)}$, построенное по ряду

$$h(x) := e^{\Theta(x)} = \frac{1}{(1-x)^\theta}. \quad (10)$$

Замечание 2. Рассмотрим наибольший общий делитель d множества $\{j : \theta_j > 0\}$. Если $d = 1$, то можно проверить, что $\mathbb{P}(N(x) = n) > 0$ для любого $x \in (0, 1)$ и всех достаточно больших n . Напротив, если $d > 1$, то $\mathbb{P}(N(x) = n) = 0$ при всех n , не делящихся на d , поскольку в этом случае и $\Theta(x)$, и $h(x)$ фактически являются функциями от x^d . В последнем случае $\rho_j(x) \equiv 0$ при всех j , не делящихся на d . Таким образом, можно игнорировать эти нулевые процессы и рассматривать только процессы $\rho_d(x), \rho_{2d}(x), \dots$. Одновременное детерминированное изменение времени $x^d \mapsto x$ во всех этих процессах эквивалентно рассмотрению исходного построения, начатого с прореженной последовательности $(\theta_d, \theta_{2d}, \dots)$ вместо (θ_j) . Средние по Чезаро этой прореженной последовательности сходятся к θ/d , если для исходной последовательности выполняется условие (4). Поэтому можно не умаляя общности предположить, что $d = 1$. Однако приведенные ниже результаты справедливы и без этого предположения, и мы его не делаем.

Теорема 1. Для любого $x \in (0, 1)$ и каждого n , такого что мера P^n определена (то есть $h_n > 0$), выполняется

$$\mathcal{P}(\Lambda(x) = \lambda \mid N(x) = n) = P^n(\lambda)$$

Таким образом, распределение $\Lambda(x)$ является смешанным распределением $P^{N(x)}$, где $\mathbb{P}(N(x) = n) = h_n x^n / h(x)$, h_n определено равенством (3), а $h(x)$ – равенством (10). Более того, при условии что $\Lambda(x)$ посещает $\mathcal{P}_n$ в некотором случайном разбиении $\Lambda^{(n)}$, для этого разбиения $\mathbb{P}(\Lambda^{(n)} = \lambda) = P^n(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathcal{P}_n$.

Доказательство. Пусть h_n^0 – коэффициент при x^n в разложении ряда $h(x) = e^{\Theta(x)}$. Тогда $\mathbb{P}(N(x) = n) = h_n^0 x^n / h(x)$ согласно (9). Для n , таких что $h_n^0 > 0$, и для любого $\lambda \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda(x) = \lambda \mid N(x) = n) &= \mathbb{P}(\rho_j(x) = c_j(\lambda) \mid N(x) = n) \\ &= \frac{h(x)}{h_n^0 x^n} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(\theta_j x^j / j)^{c_j(\lambda)}}{c_j(\lambda)!} e^{-\theta_j x^j / j} = \frac{h_n}{h_n^0} P^n(\lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

где $P^n(\lambda)$ определено равенством (2). В последнем равенстве $x^{\sum j c_j(\lambda)}$ сокращается с x^n , а $h(x)$ сокращается с $e^{-\sum \theta_j x^j / j}$ ввиду (10) и (5). Суммируя по всем $\lambda \in \mathcal{P}_n$, получаем, что $h_n = h_n^0$, поскольку h_n выбрано таким образом, что P^n является вероятностной мерой. Для $\lambda \notin \mathcal{P}_n$ (11) также выполняется, поскольку обе части равны нулю. Следовательно, условное распределение $\Lambda(x)$ при условии $N(x) = n$ есть P^n при всех n , для которых P^n определено, и для любого $x \in (0, 1)$. На этот же факт можно посмотреть с противоположной стороны: распределение $\Lambda(x)$ является смешанным распределением $P^{N(x)}$ со смешивающей случайной величиной $N(x)$, распределенной согласно $PS_x^{h(\cdot)}$. Последнее утверждение следует из того, что условное распределение одинаково для всех $x \in (0, 1)$. $\square$

То, что обобщенные меры Ювенса P^n можно смешать так, что счетчики частот становятся независимыми, хорошо известно. Это свойство распространяется на гораздо более широкий класс вероятностных мер на целочисленных разбиениях, см. [15], где рассмотрен общий случай. Технический анализ этих мер обычно явно или неявно базируется на этом факте. Тогда x обычно интерпретируется как параметр, который следует настраивать в соответствии со значением n для аппроксимации меры P^n . Наш подход здесь иной: мы рассматриваем $x \in [0, 1)$ как

«время» случайного процесса $\Lambda(x)$ со значением на множестве разбиений целых чисел. С изменением времени x меняется лишь смешивающий параметр $N(x)$, который по построению является неубывающим случайным процессом со значениями в $\mathbb{N}_0$.

Смешивающий процесс $N(x)$, $x \in [0, 1)$, также представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем, интенсивности перехода которого нестационарны: $\mathbb{P}(N(x+dx) = n+j \mid N(x) = n) = \theta_j x^{j-1} dx$ ($n \geq 0$, $j \geq 1$). Это снова легко следует из свойств независимости точечного процесса Пуассона ρ . Отметим также, что распределение $N(x)$ безгранично делимо, и, поскольку оно сосредоточено на целых числах, $N(x)$ можно рассматривать как значение сложного пуассоновского процесса в фиксированный момент времени. Однако время для этого сложного пуассоновского процесса не равно x . Вместо этого, при фиксированном $x \in [0, 1)$, следует рассмотреть прореженный пуассоновский процесс $\rho_t(x)$, $t \in [0, 1]$, который получается отбрасыванием точек ρ независимо с вероятностью $1-t$. Точнее, всем точкам $\xi_k \in \rho$ надо сопоставить независимые случайные величины U_k с равномерным распределением на $[0, 1]$, и включать в ρ_t только те точки ξ_k , для которых $U_k \leq t$. Тогда $\rho_t(x)$, $t \in [0, 1]$, также является пуассоновским процессом. Строя $N_t(x)$ по $\rho_t(x)$ и оригинальным меткам J_k , получим сложный пуассоновский процесс со временем $t \in [0, 1]$ и $N(x) = N_1(x)$ п.н. Мы не используем это наблюдение в данной статье, но планируем исследовать это двухпараметрическое целочисленное случайное поле в другом месте.

Простая структура пуассоновского процесса $\rho(x)$ дает возможность найти совместное распределение его первых точек и их меток, а также вероятность того, что $N(x)$ посещает $\mathcal{P}_n$.

Предложение 1. При всех $k \in \mathbb{N}$, любых $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$ и произвольных $0 < x_1 < \dots < x_k < 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_1 \in [x_1, x_1 + dx_1], \dots, \xi_k \in [x_k, x_k + dx_k], J_1 = j_1, \dots, J_k = j_k) \\ = e^{-\Theta(x_k)} \prod_{r=1}^k \theta_{j_r} x_r^{j_r-1} dx_r. \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Обозначим $x_{k+1} = 1$ и выберем $\delta \in (0, \min\{x_{r+1} - x_r, r = 1, \dots, k\})$. Вероятность того, что в $[x_r, x_r + \delta)$ лежит точка процесса ρ , эквивалентна $\theta(x_r)\delta$ при $\delta \downarrow 0$, а вероятность того, что эта точка

получена из процесса ρ_j , эквивалентна $\theta_j x_r^{j-1}/\theta(x_r)$ при $\delta \downarrow 0$, согласно (7). Вероятность того, что в интервале $[x_r + \delta, x_{r+1})$ ($r = 1, \dots, k-1$) нет точек ρ , равна $e^{-\Theta(x_{r+1}) + \Theta(x_r + \delta)}$. В интервале $[0, x_1)$ точек ρ нет с вероятностью $e^{-\Theta(x_1)}$. Поскольку все эти события определяются поведением ρ внутри неперекрывающихся интервалов, они независимы, и утверждение получается рассмотрением предела при $\delta \downarrow 0$. $\square$

Предложение 2 (см. также [20, предложение 1]). *Вероятность того, что $\Lambda(x)$ посещает $\mathcal{P}_n$ при каком-то $x \in [0, 1)$, равна*

$$g_n := \mathbb{P}(\exists x \in [0, 1) : N(x) = n) = \mathbb{P}(\chi_n \in (0, 1)) = h_n u_n, \quad (13)$$

где h_n — это n -й коэффициент ряда Тейлора для $h(x) = e^{\Theta(x)}$, явно определенный равенством (3), и

$$u_n = \int_0^1 x^n \theta(x) e^{-\Theta(x)} dx. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $\chi(x) = \min\{\xi_j : \xi_j \geq x\}$ — момент первого скачка $\rho(\cdot)$ после времени x . Тогда

$$\mathbb{P}(N(x) = n, \chi(x) \in (x, x + \delta]) \sim \frac{h_n x^n}{h(x)} \theta(x) \delta, \quad \delta \downarrow 0, \quad (15)$$

поскольку события $\{N(x) = n\}$ и $\{\chi(x) \in (x, x + \delta]\}$ определяются ρ и его метками J_k на непересекающихся интервалах $[0, x]$ и $(x, x + \delta]$ и, следовательно, независимы. На событии $\{N(x) = n\}$ случайная величина $\chi(x)$ является случайным временем, когда цепь покидает уровень $\mathcal{P}_n$. Таким образом, (15), деленное на δ , дает, в пределе $\delta \downarrow 0$, плотность времени выхода из $\mathcal{P}_n$. Поскольку $\Lambda(x)$ посещает (и выходит из) $\mathcal{P}_n$ не более одного раза, мы получаем вероятность (13), интегрируя эту плотность по $x \in (0, 1)$. $\square$

Приведенный выше результат является частью предложения 1 в [20], где также найдено совместное распределение времени входа и выхода для $\mathcal{P}_n$.

§3. ЦЕПИ СКАЧКОВ

Мы будем исследовать две цепи

$$\Lambda_k := \Lambda(\xi_k), \quad N_k := N(\xi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

По построению $N_k = |\Lambda_k|$ и процесс $(N_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ определяется по процессу $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Можно также восстановить Λ_k из траектории $(N_i)_{i=0, \dots, k}$. В действительности эта траектория также несет дополнительную информацию о порядке добавления частей к Λ_k , которая теряется в самом значении Λ_k . Поэтому, возможно, было бы уместнее говорить о случайных композициях целых чисел, которые несут эту информацию о порядке. Однако хотя мы не можем восстановить точный порядок добавления частей к Λ_k только по значению Λ_k , распределение этого порядка зашито в конструкцию и может быть легко описано, см. теорему 2 ниже.

Предложение 1 позволяет найти совместное распределение первых скачков $J_1, \dots, J_k$.

Предложение 3 (см. [20, лемма 2]). *При любых $k \in \mathbb{N}$ и $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$ обозначим*

$$n_r := j_1 + \dots + j_r, \quad 1 \leq r \leq k,$$

частичные суммы скачков j_r . Тогда

$$\mathbb{P}(J_1 = j_1, \dots, J_k = j_k) = u_{n_k} \prod_{r=1}^k \frac{\theta_{j_r}}{n_r} \quad (17)$$

где u_n определено равенством (14).

Доказательство. Нам требуется проинтегрировать (12) по области $0 < x_1 < \dots < x_k < 1$. Это легко сделать, вычисляя сперва внутренний интеграл по $x_1 \in [0, x_2]$, затем по $x_2 \in [0, x_3]$ и т.д. Таким образом мы получим

$$\mathbb{P}(J_1 = j_1, \dots, J_k = j_k) = \left(\prod_{r=1}^{k-1} \frac{\theta_{j_r}}{n_r} \right) \theta_{j_k} \int_0^1 x_k^{n_k-1} e^{-\Theta(x_k)} dx_k,$$

что преобразуется к виду (17) интегрированием по частям. $\square$

Следствие 1. *Определенные равенством (16) процессы скачков (N_k) и (Λ_k) суть марковские цепи на множествах неотрицательных целых и разбиений целых чисел, соответственно, начинающиеся из $N_0 = 0$ и $\Lambda_0 = \emptyset$. Они имеют стационарные переходные вероятности*

$$p_{n,m} := \mathbb{P}(N_{k+1} = m \mid N_k = n) = \frac{u_m \theta_{m-n}}{m u_n}, \quad m > n \geq k \geq 0, \quad (18)$$

и, для любого разбиения λ числа n на k частей, такого что $\mathbb{P}(\Lambda_k = \lambda) > 0$,

$$\mathbb{P}(\Lambda_{k+1} = \lambda \cup (m - n) \mid \Lambda_k = \lambda) = p_{n,m}. \quad (19)$$

(Здесь $\lambda \cup j$ – это разбиение λ , к которому добавлена часть j .)

Доказательство. По построению $\Lambda_0 = \emptyset$ и $N_0 = 0$. При $k = 0$ и $n = 0$, (18) и (19) являются просто частным случаем (17) при $k = 1$. Предположим теперь, что $k \geq 1$. Пусть λ – разбиение числа n с частями $j_1, \dots, j_k$ (перечисленными в некотором порядке, не обязательно по убыванию), то есть $n = n_k = j_1 + \dots + j_k$. Вероятность того, что $\Lambda_k = \lambda$ и части были добавлены в этом порядке, определяется правой частью (17) (которую мы предполагаем положительной, что означает, что $\theta_{j_r} > 0$ для всех r), и аналогично для $\Lambda_{k+1} = \lambda \cup j_{k+1}$. Следовательно,

$$\mathbb{P}(\Lambda_{k+1} = \lambda \cup j_{k+1} \mid \Lambda_k = \lambda, J_1 = j_1, \dots, J_k = j_k) = \frac{u_{n+j_{k+1}} \theta_{j_{k+1}}}{(n + j_{k+1}) u_n}.$$

Эта условная вероятность не зависит от порядка добавления частей, поэтому (Λ_k) является цепью Маркова, и (19) получается переобозначением $m = n + j_{k+1}$. Более того, поскольку переходная вероятность (19) зависит от λ только через $|\lambda| = n$ и не зависит явно от $k = \mathcal{K}(\lambda)$, она также является стационарной переходной вероятностью для цепи (N_k) . $\square$

При условии, что $N_{K_n} = n$ для некоторого (случайного) K_n (что возможно только если $h_n > 0$), можно рассмотреть марковскую цепь (N_k) в обратном времени, начиная с шага K_n :

$$\hat{N}_k^{(n)} := N_{K_n - k}, \quad k = 0, 1, \dots, K_n. \quad (20)$$

Эту цепь также несложно описать непосредственно.

Следствие 2. Пусть n таково, что $h_n > 0$. Процесс $\hat{N}_k^{(n)}$ – это марковская цепь со значениями в $\mathbb{N}_0$, которая стартует в $\hat{N}_0^{(n)} = n$ и имеет стационарные переходные вероятности

$$\mathbb{P}(\hat{N}_{k+1}^{(n)} = r \mid \hat{N}_k^{(n)} = m) = \frac{h_r \theta_{m-r}}{m h_m}, \quad 0 \leq r < m \leq n, \quad h_m > 0, \quad (21)$$

которые не зависят от n . Она останавливается при достижении поглощающего состояния 0. Если $h_m = 0$, то цепь не может попасть в состояние m .

Это немедленно следует из (18) применением формулы Байеса, поскольку $\mathbb{P}(\exists k : \hat{N}_k^{(n)} = m) = g_m = h_m u_m$ согласно (13). $\square$

То, что (21) действительно задает вероятностное распределение на $\{0, 1, \dots, m-1\}$ при любом m , проверяется мгновенно, если приравнять коэффициенты Тейлора в обеих частях равенства $h'(x) = (e^{\Theta(x)})' = \theta(x) e^{\Theta(x)}$:

$$m h_m = \sum_{r=0}^{m-1} \theta_{m-r} h_r, \quad m = 1, 2, \dots; \quad h_0 = 1. \quad (22)$$

Это рекуррентное соотношение может служить альтернативным определением для последовательности (h_n) .

Теорема 2. Пусть λ – разбиение числа $n \geq 1$ с частями $j_1, \dots, j_k$, записанными в каком-то порядке. Предположим, что $\mathbb{P}(\Lambda_k = \lambda) > 0$. Тогда для любой перестановки σ множества $\{1, \dots, k\}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(J_1 = j_{\sigma(1)}, \dots, J_k = j_{\sigma(k)} \mid \Lambda_k = \lambda) \\ &= \frac{j_{\sigma(k)}}{n} \frac{j_{\sigma(k-1)}}{j_{\sigma(k-1)} + \dots + j_{\sigma(1)}} \dots \frac{j_{\sigma(2)}}{j_{\sigma(2)} + j_{\sigma(1)}} \frac{j_{\sigma(1)}}{j_{\sigma(1)}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Другими словами, процесс роста разбиения (Λ_k) добавляет части Λ_k в порядке, обратном к пропорциональному размеру стохастическому, то есть последняя часть – это случайный выбор из всех частей с вероятностью каждой части, пропорциональной ее размеру, предпоследняя часть – это случайный выбор с так же определенными вероятностями из всех частей, кроме последней, и т.д.

Нетрудно проверить, что вероятности в (23) дают 1 после суммирования по всем перестановкам σ множества $\{1, \dots, k\}$, см., например, предложение 2.1 в [7] для короткого доказательства.

Доказательство. Согласно теореме 1, для разбиения $\lambda \in \mathcal{P}_n$ с частями $j_1, \dots, j_k$

$$\mathbb{P}(\Lambda_k = \lambda \mid \exists r : \Lambda_r \in \mathcal{P}_n) = P^n(\lambda).$$

Если $\Lambda_r \in \mathcal{P}_n$ для некоторого $r \geq 1$ и цепь (Λ_r) посещает $\mathcal{P}_n$ в разбиении λ , то $\lambda = \Lambda_k \in \mathcal{P}_n$, поскольку Λ_k – единственное разбиение с k частями во всей цепи (Λ_r) . Следовательно, согласно предложению 2

и (2),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Lambda_k = \lambda) &= \mathbb{P}(\exists r : \Lambda_r \in \mathcal{P}_n) P^n(\lambda) \\ &= h_n u_n \frac{1}{h_n} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j^{c_j(\lambda)}}{j^{c_j(\lambda)} c_j(\lambda)!} = u_n \left(\prod_{r=1}^k \frac{\theta_{j_r}}{j_r} \right) \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_j(\lambda)!}. \quad (24)\end{aligned}$$

Имеется $\prod_{j=1}^{\infty} c_j(\lambda)!$ перестановок σ , которые переставляют только равные части в λ , т.е. таких что $(j_1, \dots, j_k) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(k)})$. Все эти перестановки дают одинаковую условную вероятность в левой части (23). Поэтому вероятность увидеть конкретную перестановку σ равна деленному на $\prod_{j=1}^{\infty} c_j(\lambda)!$ отношению правой части (17) (где $j_1 = j_{\sigma(1)}, \dots, j_k = j_{\sigma(k)}$ и частичные суммы n_r берутся в этом порядке) к $\mathbb{P}(\Lambda_k = \lambda)$, заданному (24). Это и дает правую часть (23) после сокращений. $\square$

§4. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим теперь, что последовательность (θ_j) сходится по Че-заро к $\theta > 0$, т.е. что имеет место (4). При этом предположении мы изучаем асимптотическое поведение $\theta(x)$, $\Theta(x)$, $h(x)$ при $x \uparrow 1$, и h_n , u_n при $n \rightarrow \infty$. Из абелевой части теоремы Караматы (см., например, следствие 1.7.3 в [4]) следует, что

$$\theta(x) \sim \frac{\theta}{1-x}, \quad x \uparrow 1. \quad (25)$$

Для упрощения ссылок на известные результаты о правильно меняющихся функциях, которые обычно формулируются для аргумента, растущего к ∞ , введем для $y \geq 1$

$$\tilde{\theta}(y) = \theta(1 - 1/y), \quad \tilde{\Theta}(y) = \Theta(1 - 1/y), \quad \tilde{h}(y) = h(1 - 1/y).$$

Это соответствует замене переменной $y = 1/(1-x)$, так что (25) переписывается как $\tilde{\theta}(y) \sim \theta y$ при $y \rightarrow \infty$.

Поскольку $\Theta(x) = \int_0^x \theta(z) dz$, можно записать

$$\tilde{\Theta}(y) = \int_0^{1-1/y} \theta(z) dz = \int_1^y \tilde{\theta}(v) v^{-2} dv,$$

поэтому при любом $t > 0$

$$\tilde{\Theta}(ty) - \tilde{\Theta}(y) = \int_y^{ty} \tilde{\theta}(v) \frac{dv}{v^2} = \int_1^t \tilde{\theta}(ys) \frac{ds}{ys^2} \rightarrow \theta \int_1^t \frac{ds}{s} = \theta \log t, \quad y \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\tilde{h}(ty)}{\tilde{h}(y)} = e^{\tilde{\Theta}(ty) - \tilde{\Theta}(y)} \rightarrow t^\theta, \quad y \rightarrow \infty.$$

Это значит, что $\tilde{h}(y)$ регулярно меняется на бесконечности с индексом θ и может быть представлена в виде

$$\tilde{h}(y) = \ell(y) y^\theta, \quad (26)$$

где функция $\ell(\cdot)$ медленно меняется на бесконечности. Значит,

$$\tilde{\Theta}(y) = \log \tilde{h}(y) = \theta \log y + \theta \log \ell(y) \sim \theta \log y, \quad y \rightarrow \infty,$$

поскольку $(\log \ell(y))/\log y \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, см. предложение 1.3.6(i) в [4].

Подытожим эти результаты в следующем утверждении.

Лемма 1. *Предположим, что последовательность (θ_j) удовлетворяет предположению (4) и $\theta_j \geq 0$. Пусть $\theta(x)$ определяется равенством (6), $\Theta(x)$ – равенством (5), а $h(x)$ задается формулой (10). Тогда*

$$\theta(x) \sim \frac{\theta}{1-x}, \quad \Theta(x) \sim -\theta \log(1-x), \quad h(x) \sim \frac{\ell(\frac{1}{1-x})}{(1-x)^\theta}, \quad x \uparrow 1, \quad (27)$$

для некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции $\ell(\cdot)$. □

Теперь обратимся к асимптотическому поведению h_n и u_n при $n \rightarrow \infty$. Из асимптотического поведения $h(x)$ при $x \uparrow 1$, найденного в (27), по теореме Караматы (см. следствие 1.7.3 в [4]) можно вывести, что

$$h_0 + h_1 + \dots + h_n \sim \frac{\ell(n) n^\theta}{\Gamma(\theta + 1)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (28)$$

В [2, предложение 6.3] показано, что если $\theta_j \rightarrow \theta$, то h_n также ведут себя регулярно. Мы стремимся ослабить условие сходимости последовательности и предполагаем только сходимость по Чезаро, то есть (4),

но при этом ослабленном условии h_n может колебаться, как показывает следующее вычисление.

Пример 1. Пусть $\theta_{2j} = 2$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $\theta_1 = \alpha \geq 0$ и $\theta_{2j-1} = 0$ для $j \geq 2$. Эта последовательность удовлетворяет условию (4) с $\theta = 1$, но, очевидно, $\theta_j \not\rightarrow 1$. Простое вычисление показывает, что в этом случае $\Theta(x) = \alpha x - \log(1 - x^2)$, и $h(x) = e^{\alpha x} / (1 - x^2)$. Поэтому $\ell(y) = e^{\alpha(1-1/y)} / (2 - 1/y)$ в (26), и $\ell(y) \rightarrow e^{\alpha}/2$ при $y \rightarrow \infty$, то есть медленно меняется на бесконечности. В этом случае h_n можно найти явно: из формулы свертки для рядов $e^{\alpha x}$ и $1/(1 - x^2)$ легко получить $h_n = \sum_{j=0}^{n/2} \alpha^{n-2j} / (n - 2j)!$. Эти выражения являются частичными суммами для разложения в ряд Тейлора $\cosh \alpha$, если n четно, и $\sinh \alpha$, если n нечетно, вплоть до степени α^n . Следовательно, $h_{2n} \rightarrow \cosh \alpha$ и $h_{2n+1} \rightarrow \sinh \alpha$ при $n \rightarrow \infty$.

Ситуация отличается для u_n , которые ведут себя регулярно.

Лемма 2. Пусть θ_j удовлетворяют условию (4) и u_n задается равенством (14). Тогда

$$u_n \sim \frac{\Gamma(\theta + 1)}{n^\theta \ell(n)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Доказательство. Интегрируя по частям и заменяя переменную $x = e^{-z}$ в интеграле (14), получаем

$$u_n = n \int_0^1 x^{n-1} e^{-\Theta(x)} dx = n \int_0^\infty e^{-nz} \frac{dz}{h(e^{-z})},$$

откуда видим, что u_n — это преобразование Лапласа функции $1/h(e^{-z})$, вычисленное в значении n . Из (27) получаем $h(e^{-z}) \sim \ell(1/z) z^{-\theta}$ при $z \downarrow 0$. Таким образом, (29) получается прямым применением тауберовой теоремы Караматы для преобразований Лапласа, см., например, теорему 1.7.1' в [4]. $\square$

Нам также понадобится асимптотика взвешенных хвостовых сумм u_n . Обозначим $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ целую часть x .

Лемма 3. Предположим, что выполняется (4). Тогда, равномерно по $t \geq 1$,

$$\sum_{r=[nt]+1}^{\infty} \frac{u_r \theta_{r-n}}{r} \sim \frac{\Gamma(\theta + 1)}{(nt)^\theta \ell(nt)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Доказательство. Интегрирование по частям в (14) и изменение порядка суммирования и интегрирования (возможность чего оправдывается теоремой Лебега о мажорируемой сходимости) дает

$$\sum_{r=\lfloor nt \rfloor + 1}^{\infty} \frac{u_r \theta_{r-n}}{r} = \int_0^1 \sum_{r=\lfloor nt \rfloor + 1}^{\infty} \theta_{r-n} x^{r-1} e^{-\Theta(x)} dx. \quad (31)$$

Прежде всего, отметим, что если $t = 1$, то ряд под интегралом равен $x^n \theta(x)$, и все выражение (31) дает u_n , поэтому (30) выполняется по лемме 2. В дальнейшей части доказательства мы предполагаем, что $t > 1$. Вспоминая обозначение s_n , введенное в (4) для частичных сумм (θ_j) , и используя преобразование Абеля (суммирование по частям), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{r=m+1}^{\infty} \theta_{r-n} x^{r-1} &= \sum_{r=m+1}^{\infty} (s_{r-n} - s_{r-n-1}) x^{r-1} \\ &= -s_{m-n} x^m + (1-x) \sum_{r=m+1}^{\infty} s_{r-n} x^{r-1} \end{aligned} \quad (32)$$

где мы обозначили $m := \lfloor nt \rfloor$ для краткости. Мы хотим сравнить это с аналогичной суммой для постоянной последовательности $\theta_j \equiv \theta$, то есть с

$$\theta \sum_{r=m+1}^{\infty} x^{r-1} = \frac{\theta x^m}{1-x} = -\theta \cdot (m-n) x^m + \theta \cdot (1-x) \sum_{r=m+1}^{\infty} (r-n) x^{r-1}. \quad (33)$$

Для последней суммы нетрудно найти, так же как при доказательстве леммы 2 ранее, что при $m \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 \frac{\theta x^m}{1-x} e^{-\Theta(x)} dx = \int_0^1 e^{-mz} \frac{\theta e^{-z}}{(1-e^{-z}) h(e^{-z})} dz \sim \frac{\Gamma(\theta+1)}{m^\theta \ell(m)}. \quad (34)$$

Это дает основной вклад в (30) благодаря очевидным эквивалентностям $m^\theta = \lfloor nt \rfloor^\theta \sim (nt)^\theta$, $\ell(m) = \ell(\lfloor nt \rfloor) \sim \ell(nt)$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что эквивалентность (34) равномерна по $t \geq 1$. Поэтому остается найти равномерную оценку погрешности, внесенной заменой (32) на (33) в (31).

Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $t_0 > 1$ так, чтобы $1 - t_0^{-\theta} < \varepsilon$. Для $t \geq t_0$ мы можем найти $n_0 = n_0(\varepsilon, t_0)$, такое что неравенство $|s_{r-n} - (r-n)\theta| \leq \varepsilon(r-n)$ выполняется для всех $r \geq m = \lfloor nt \rfloor$ и при

всех $n \geq n_0$, в силу (4). Таким образом, снова используя представления (32) и (33), получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=m+1}^{\infty} (\theta_{r-n} - \theta) x^{r-1} \right| &\leq \varepsilon \cdot (m-n) x^m + \varepsilon \cdot (1-x) \sum_{r=m+1}^{\infty} (r-n) x^{r-1} \\ &= \varepsilon \left(2(m-n) x^m + \frac{x^m}{1-x} \right) \end{aligned}$$

равномерно по $t \geq t_0$. Повторяя предыдущее рассуждение, видим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \sum_{r=\lfloor nt \rfloor + 1}^{\infty} (\theta_{r-n} - \theta) x^{r-1} e^{-\Theta(x)} dx \right| \\ \leq \varepsilon \int_0^1 \left(2(nt-n) + \frac{1}{1-x} \right) x^{\lfloor nt \rfloor} e^{-\Theta(x)} dx \\ \sim \varepsilon \frac{2(1-1/t) \Gamma(\theta+1) + \Gamma(\theta)}{(nt)^\theta \ell(nt)}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это дает искомую оценку, равномерную по $t \geq t_0$, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно. Остается распространить ее равномерно на $t \in [1, t_0]$. Но это следует из монотонности суммы по t , поскольку эквивалентность выполняется для обоих концов интервала $[1, t_0]$, а отношение значений на обоих концах близко к 1 в силу выбора t_0 . $\square$

§5. ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РАЗБИЕНИЙ ЮВЕНСА

Начнем с асимптотического поведения скачка $J_{k+1} = N_{k+1} - N_k$ когда значение N_k велико. Мы будем писать $\lim_{n \rightarrow \infty}^*$ для предела, который берется по любой подпоследовательности $n_r \rightarrow \infty$, такой что $h_{n_r} > 0$ при всех r .

Предложение 4. *Предположим, что веса θ_j удовлетворяют условию (4). Тогда равномерно по $t \geq 1$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* \mathbb{P}(N_{k+1} > nt \mid N_k = n) = t^{-\theta}. \quad (35)$$

Доказательство. Согласно следствию 1, можно записать $\mathbb{P}(N_{k+1} = m \mid N_k = n) = u_m \theta_{m-n} / (m u_n)$, и вероятность в (35) — это сумма таких выражений. Поэтому (35) получается как комбинация лемм 2 и 3. $\square$

Чтобы изучать распределение $\Lambda^{(n)}$, нам понадобится выражение, похожее на (35), но отличающееся: $\mathbb{P}(N_k > ns \mid N_{k+1} = n)$. Поскольку вероятности посещений g_n могут вести себя нерегулярно при предположении (4), мы не можем сделать никаких выводов, применяя правило Байеса. Из предложения 4 мы можем вывести предельное распределение N_k/N_{k+1} при $k \rightarrow \infty$. Однако, переход к условной вероятности при условии точного значения N_{k+1} может изменить это распределение, и нам необходимо дополнительное предположение, что последовательность условных распределений также сходится. К сожалению, нам не удалось найти простого достаточного условия для этого в терминах весовой последовательности (θ_j) , за исключением случая $\theta_j \rightarrow \theta$, вытекающего из работы [9].

Теорема 3. *Предположим, что последовательность весов (θ_j) удовлетворяет условию (4). Для целого числа n , такого что P^n определено (то есть $h_n > 0$), пусть $\Lambda^{(n)}$ – случайное разбиение с распределением P^n . Запишем части $\lambda_1^{(n)} \geq \lambda_2^{(n)} \geq \dots \geq \lambda_{\mathcal{K}(\Lambda^{(n)})}^{(n)} > 0$ разбиения $\Lambda^{(n)}$ в порядке невозрастания и продолжим список бесконечной последовательностью нулей $\lambda_{\mathcal{K}(\Lambda^{(n)})+1}^{(n)} = \lambda_{\mathcal{K}(\Lambda)+2}^{(n)} = \dots = 0$. Дополнительно предположим, что последовательность условных распределений N_{K_n-1}/n при условии, что $N_{K_n} = n$ на некотором случайном шаге K_n , сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к одному и тому же пределу вдоль любой последовательности, при которой условие имеет положительную вероятность. Тогда этот предел – бета-распределение с параметрами $(1, \theta)$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* \mathbb{P}(N_{K_n-1}/n \leq s \mid N_{K_n} = n) = 1 - (1-s)^\theta, \quad 0 \leq s \leq 1; \quad (36)$$

Более того, распределения $(\lambda_1^{(n)}/n, \lambda_2^{(n)}/n, \dots)$ сходятся слабо к распределению Пуассона–Дирихле $\text{PD}(\theta)$ вдоль любой последовательности, такой что $h_n > 0$.

Доказательство. Из предложения 4 и наблюдения, что $N_k \rightarrow \infty$ п.н. при $k \rightarrow \infty$ можно заключить, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_{k-1}/N_k < s) = s^\theta$ при $s \in (0, 1)$. Поскольку $N_k = N_{k-1} + J_{k-1}$, это эквивалентно тому, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(J_{k-1}/N_k > s) = (1-s)^\theta$. Если существует предел условных вероятностей $\lim_{n \rightarrow \infty}^* \mathbb{P}(J_{K_n-1}/N_{K_n} > s \mid N_{K_n} = n)$ вдоль любой подпоследовательности натуральных чисел, такой что $h_n > 0$, он также должен равняться $(1-s)^\theta$, поскольку $N_k \rightarrow \infty$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Это рассуждение доказывает (36).

Чтобы доказать утверждение о сходимости к распределению Пуассона–Дирихле $PD(\theta)$, достаточно проверить, что если расположить нормированные части в пропорциональном размеру стохастическом порядке, то их распределения сходятся при росте разбиения к распределению $GEM(\theta)$. Согласно теоремам 1 и 2, распределение частей разбиения $\Lambda^{(n)}$ в пропорциональном размеру стохастическом порядке совпадает по распределению с обратной последовательностью скачков $(J_{K_n}, J_{K_n-1}, \dots, J_1)$, при условии что на некотором случайном шаге K_n имеем $N_{K_n} = n$. В силу самоподобия распределения $GEM(\theta)$, для этого достаточно показать сходимость последнего шага J_{K_n}/n к распределению бета($1, \theta$), что мы уже сделали. Подробное изложение этого рассуждения можно найти в доказательстве теоремы 6.1 в [9]. $\square$

Замечание 3. Согласно следствию 2, условие сходимости последовательности условных распределений N_{K_n-1}/n при условии $N_{K_n} = n$, когда $n \rightarrow \infty$ вдоль подпоследовательности, для которой эти условные распределения определены, можно выразить аналитически как существование пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^* \frac{1}{nh_n} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor}^n \theta_j h_{n-j}, \quad \forall s \in (0, 1). \quad (37)$$

В общем случае нельзя ожидать, что пределы (37) существуют для произвольных последовательностей (θ_j) и (h_n) , даже удовлетворяющих условиям регулярности (4) и (28), но в нашем случае последовательность (h_n) строится по (θ_j) с помощью (3) или, эквивалентно, (22).

В [9] показано, что если $\theta_j \rightarrow \theta$, то счетчики частей $c_j(\Lambda^{(n)})$ сходятся по распределению (в пределе $n \rightarrow \infty$) к независимым случайным величинам $\rho_j(1)$, каждая из которых имеет распределение Пуассона со средним θ_j/j . Следующий пример показывает, что в при ослабленном условии (25) это уже не так.

Продолжение примера 1. В условиях примера 1 можно явно найти распределение $c_1(\Lambda^{(n)})$. Для любого $x \in (0, 1)$ распределение $N(x) - c_1(\Lambda(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} 2j c_{2j}(\Lambda(x))$ является геометрическим с вероятностью успеха $1 - x^2$, сосредоточенным на четных числах $\{0, 2, 4, \dots\}$, как показывает следующее вычисление с производящими функциями вероятностей:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} z^{\sum_{j=1}^{\infty} 2j c_{2j}(\Lambda(x))} &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{2j} z^{2j} - x^{2j}}{j}\right) \\ &= \exp(-\log(1 - x^2 z^2) + \log(1 - x^2)) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 z^2},\end{aligned}$$

потому что $c_{2j}(\Lambda(x))$ имеет распределение Пуассона со средним x^{2j}/j . Поскольку $c_1(\Lambda(x))$ имеет распределение Пуассона со средним αx и не зависит от $N(x) - c_1(\Lambda(x))$, то

$$\mathbb{P}(N(x) = n) = (1 - x^2)x^n e^{-\alpha x} \sum_{m=0}^{n/2} \frac{\alpha^{n-2m}}{(n-2m)!}.$$

Из этого выражения видно, что условное распределение $c_1(\Lambda(x))$ при условии $N(x) = n$ одинаково для всех $x \in (0, 1)$ и может быть описано как распределение Пуассона с параметром α , на которое наложено условие, что значение одной четности с n и не превосходит n . Оно не зависит от x , совпадает с распределением $c_1(\Lambda^{(n)})$ и имеет пределы только по подпоследовательностям (n_r) , которые начиная с некоторого места не меняют четность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. A. Arratia, A. D. Barbour, S. Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures: a Probabilistic Approach*. EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2003, 374 pp.
2. V. Betz, D. Ueltschi, *Spatial random permutations with small cycle weights*. — Probab. Theory Relat. Fields **149**, No. 1-2 (2011), 191–222.
3. V. Betz, D. Ueltschi, Y. Velenik, *Random permutations with cycle weights*. — Ann. Appl. Probab. **21**, No. 1 (2011), 312–331.
4. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. **27**, Cambridge, Cambridge University Press, 1987, 494+xix pp.
5. A. Cipriani, D. Zeindler, *The limit shape of random permutations with polynomially growing cycle weights*. — ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Statist. **12**, No. 2 (2015), 971–999.
6. H. Crane, *The ubiquitous Ewens sampling formula*. — Statist. Sci. **31**, No. 1 (2016), 1–19.
7. P. Donnelly, S. Tavaré, *The ages of alleles and a coalescent*. — Adv. Appl. Probab. **18**, No. 1 (1986), 1–19.
8. D. Elboim, O. Gorodetsky, *Multiplicative arithmetic functions and the generalized Ewens measure*. — Isr. J. Math. **262** (2024), 143–189.
9. N. M. Ercolani, D. Ueltschi, *Cycle structure of random permutations with cycle weights*. — Random Struct. Algorithms **44** No. 1 (2014), 109–133.

10. W. J. Ewens, *The sampling theory of selectively neutral alleles*. — Theor. Population Biol. **3** (1972), 87–112.
11. W. Feller, *The fundamental limit theorems in probability*. — Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 800–832.
12. S. V. Kerov, *Coherent random allocations, and the Ewens–Pitman formula*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2005), 127–145.
13. M. Lugo, *Profiles of permutations*. — Electron. J. Combin. **16**, No. 1 (2009), Research Paper 99, 20.
14. J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes*, — Lect. Notes Math. **1875**, Berlin, Springer, 2006.
15. Yu. Yakubovich, *Ergodicity of multiplicative statistics*. — J. Combin. Theory, Ser. A **119**, No. 6 (2012), 1250–1279.
16. В. Л. Гончаров, *Из области комбинаторики*. — Изв. АН СССР. Сер. матем. **8**, No. 1 (1944), 3–48.
17. Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, *Случайные подстановки: общая параметрическая модель*. — Дискрет. матем. **18**, No. 4 (2006), 105–112.
18. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*, М., МЦНМО, 2007.
19. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. I*. — Теория вероятн. и ее примен. **22**, No. 1 (1977), 72–88.
20. Ю. В. Якубович, *Рост случайных разбиений путем добавления частей: случай степенных весов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **535** (2024), 277–306.
21. А. Л. Якимив, *Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки*. — Дискрет. матем. **17**, No. 4 (2005), 40–58.

Yakubovich Yu. V. Random partitions growth by appending parts: the Cesàro convergent weights case.

We investigate a generalized Ewens measure on integer partitions when weights converge in Cesàro mean to a constant $\theta > 0$, thus resembling the classical Ewens measure. We introduce a stochastic growth process on partitions which evolves by adding random parts one by one to the current partition. If the constructed process visits some partition of n in its evolution, this random partition is distributed according to the generalized Ewens measure. The growth process is explicitly described in terms of certain independent Poisson processes. It has an interesting property that it produces parts in reversed size-biased order. Using this construction we show that the only non-trivial limit of scaled random partitions in this setting can be the Poisson–Dirichlet distribution with parameter θ .

С.-Петербургский государственный
экономический университет, Санкт-Петербург;
НГУ “Сириус”,
Краснодарский край, Россия
E-mail: yuyakub@gmail.com

Поступило 15 октября 2025 г.