Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

В. Н. Солев

СОПРЯЖЕННАЯ СИСТЕМА И ТОЧНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ

§1. Введение

Пусть Λ – счетное подмножество вещественной прямой. Предположим, что в нашем распоряжении имеются независимые гауссовские случайные величины

$$y_u = a(u) + x_u, \quad u \in \Lambda, \tag{1}$$

где $a(u)$ – подлежащие оцениванию координаты вектора $\boldsymbol{a} = (a(u), u \in \Lambda)$, а x_u – гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией σ_u^2. Рассмотрим задачу оценивания неизвестного вектора $\boldsymbol{a}$ при априорном предположении, что $\boldsymbol{a} \in \Theta$, где Θ – заданное центрально-симметричное подмножество пространства $l^2(\Lambda)$. Наибольший интерес для нас будет представлять случай когда при заданных положительных $\beta > 1/2$ и L

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(|u|+1)^{2\beta} \leqslant L \quad \text{при } \boldsymbol{a} \in \Theta. \tag{2}$$

Такое подмножество пространства $l^2(\Lambda)$ мы будем обозначать $\Theta(\beta; L)$. При заданном векторе $\boldsymbol{\tau} = (\tau_u, u \in \Lambda)$ с положительными координатами τ_u из $\Theta(\beta; L)$,

$$\sum_{u\in\Lambda} \tau_u^2(|u|+1)^{2\beta} \leqslant L, \tag{3}$$

будем обозначать $\Pi(\boldsymbol{\tau})$ прямоугольник

$$\Pi(\boldsymbol{\tau}) = \{\boldsymbol{a} : |a(u)| \leqslant \tau_u, u \in \Lambda\}. \tag{4}$$

Очевидно, $\Pi(\boldsymbol{\tau}) \subset \Theta(\beta; L)$.

Мы начнем с одномерной задачи оценки величины минимаксного квадратичного риска R в задаче оценивания неизвестного среднего a,

---

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

когда наблюдается гауссовская случайная величина $y = a + x$ со средним a и дисперсией σ^2 при априорном предположении что $|a| \leqslant \tau$,

$$R = \inf_{\widehat{a}} \sup_{|a| \leqslant \tau} \mathbf{E} \, (\widehat{a} - a)^2. \tag{5}$$

Здесь $\widehat{a}$ – измеримая функция от y. Подробное изложение истории исследования этой задачи и некоторых ее бесконечномерных аналогов можно найти в [10]. Если мы ограничимся при вычислении нижней грани в (5) только линейными функциями $\widehat{a}$, то соответствующая нижняя грань R_L легко вычисляется,

$$R_L = \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}. \tag{6}$$

И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский [3] установили, что при некотором $c > 0$

$$c \, R_L < R < R_L. \tag{7}$$

Описание разнообразных бесконечномерных обобщений описанной выше проблемы и способов их решения можно найти в книге [13].

Настоящая работа является продолжением работ [4,6] и [7]. Опишем статистическую задачу, которая там рассматривалась. Предположим (см. [7]), что на растущем отрезке $[-T, T]$ наблюдается гауссовсий процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t) \, dt + dx(t), \quad t \in [-T, T], \quad T > 0. \tag{8}$$

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом центрально-симметричном компактном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемых функций s, таких что

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2 \, dt < \infty, \tag{9}$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями (см. подробнее в [1, 2]) с нулевым средним и спектральной плотностью f,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1 + u^2} \, du < \infty. \tag{10}$$

Фактически f — спектральная плотность обобщенного процесса (см. подробнее [1]), которым является производная процесса $x(t)$.

Выпуклое центрально-симметричное подмножество $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$, в котором лежат подлежащие оцениванию функции s, выбирается из класса Степанова $\mathscr{L}(\Lambda)$ (подробнее см. [9]) псевдо-периодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u \in \Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{11}$$

где Λ – заданное счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u, v \in \Lambda,\, u \neq v} |u - v| > 0. \tag{12}$$

Компактное подмножество $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda; \beta; L)$ выделяется при $\beta > 1/2$ из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2 (|u| + 1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{13}$$

Здесь β, L — заданные положительные константы. А множество векторов $\boldsymbol{a} = (a(u))$, $u \in l^2(\lambda)$, для которых выполнено (13), будем обозначать $\mathcal{L}(\Lambda; \beta; L)$.

Вместе с банаховой нормой $\|s\|_{\mathscr{L}}$ мы будем рассматривать две гильбертовы нормы $\|s\|_T$ и $\|s\|_*$, где

$$\|s\|_T^2 = \frac{1}{2T} \int\limits_T^T |s(t)|^2\, dt, \quad \|s\|_*^2 = \sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2. \tag{14}$$

Как установлено в [9], при условии $\tau(\Lambda) > 0$ и достаточно большом T все три упомянутые нормы в надлежащем смысле топологически эквивалентны в замкнутом линейном подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda)$ пространства $\mathscr{L}$, порожденном функциями из $\mathscr{L}(\Lambda)$. Приведем точное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\tau(\Lambda) > 0$. Тогда найдутся такие положительные константы $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_2 = C_2(\tau)$ и $T_0 = T_0(\tau)$, зависящие только от τ, что*

$$c_1 \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_1 \|s\|_{\mathscr{L}}, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda), \tag{15}$$

и при $T > T_0$

$$c_2 \|s\|_T \leqslant \|s\|_* \leqslant C_2 \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda). \tag{16}$$

Описанная выше задача оценивания неизвестной функции из $s \in \mathscr{L}(\Lambda)$ по наблюдениям (8) схожа с задачей оценивания периодической функции s известной гладкости, наблюдаемой на фоне "белого шума"

$$dy(t) = s(t)\,dt + dw(t), \quad t \in [-T, T], \quad w(t) \text{ — винеровский процесс.}$$

Однако даже в этой задаче оценивания периодической функции замена винеровского процесса на гауссовский процесс со стационарными приращениями общего вида приводит к нетривиальным эффектам, если не предполагать, что спектральная плотность f отделена от нуля и бесконечности. Схожая задача исследована также М. С. Ермаковым в [14].

Нам потребуются случайные величины вида

$$x[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,dx(t),$$

определенные для индикаторных функций $\varphi(t) = \mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ конечных интервалов соотношением

$$x[\varphi] := x(b) - x(a).$$

Они также корректно определены, например, для линейного множества $\mathscr{D}$ функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2,\ |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \quad \text{где } \widehat{\varphi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt, \tag{17}$$

при этом

$$\mathbf{E}\, x[\varphi]\,\overline{x[\psi]} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u)\,\overline{\widehat{\varphi}(u)}\,f(u)\,du, \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}. \tag{18}$$

Примем обозначение

$$\mathscr{D}_T := \{\varphi :\ \varphi \in \mathscr{D},\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-T, T]\}. \tag{19}$$

При фиксированном $T > 0$ статистику доступны наблюдения вида

$$(dy, \varphi)_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\,dy(t), \quad \varphi \in \mathscr{D}_T. \tag{20}$$

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,dy(t)=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,s(t)\,dt+\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,dx(t). \tag{21}$$

Будем обозначать L^2_T пространство L^2 на отрезке $[-T,T]$, построенное по нормировонной мере Лебега. Так что скалярное произведение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_T$ и норма $\|\,\cdot\,\|_T$ в L^2_T определены соотношениями

$$(\varphi,\psi)_T:=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(t)\,\overline{\psi(t)}\,dt,\quad \|\varphi\|^2_T:=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|\varphi(t)|^2\,dt.$$

Пусть $\varphi_u(t)=e^{iut}$. Будем обозначать $\varphi^T_u(t):=\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\,e^{iut}$. Отметим, что, если $\tau(\Lambda)>0$, то при $T>T_0(\tau)$ оператор умножения на индикаторную функцию $\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$ является ограниченным и ограниченно обратимым оператором из $\mathscr{L}(\Lambda)$ (рассматриваемого как подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$) в подпространство пространства L^2_T, определенное соотношением $\mathscr{L}_T(\Lambda)=\mathbf{1}_{[-T,T]}\,\mathscr{L}(\Lambda)$. В дальнейшем нам удобно будет считать, что функции из L^2_T равны нулю вне отрезка $[-T,T]$.

Из (15) и (16) следует (подробнее см. в [9]), что при условии (12), если T достаточно велико, $T>T_0$, то система $\{\varphi^T_u,\ u\in\Lambda\}$ является базисом Рисса в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ в метрике гильбертова пространства L^2_T с нормой $\|\cdot\|_T$. Последнее означает, что найдутся такие положительные константы $0<c<C<\infty$, такие что для любой функции $s(t)\in\mathscr{L}_T(\Lambda)$,

$$s(t)=\sum_{u\in\Lambda}a(u)\,\varphi^T_u(t),$$

выполнены неравенства

$$c\sum_{u\in\Lambda}|a(u)|^2\leqslant\Big\|\sum_{u\in\Lambda}a(u)\,\varphi^T_u\Big\|^2_T\leqslant C\sum_{u\in\Lambda}|a(u)|^2. \tag{22}$$

При этом константы T_0,c,C зависят только от τ. Стало быть, в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ существует сопряженная (в метрике гильбертова пространств с нормой $\|\cdot\|_T$) система $\{\psi^T_u,\ u\in\Lambda\}$, такая что

$$\big(\varphi^T_u,\psi^T_v\big)_T=\delta_{u,\,v},\quad \text{где } \delta_{u,\,v} \text{ – символ Кронекера.} \tag{23}$$

А потому

$$s=\sum_{u\in\Lambda}\big(s,\psi^T_u\big)_T\,\varphi_u\qquad s\in\mathscr{L}_T(\Lambda). \tag{24}$$

Система $\{\psi_u^T,\ u \in \Lambda\}$ также является базисом Рисса в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$. Точнее, найдутся положительные константы $0 < c_1 < C_1 < \infty$, такие что для любой функции $s(t) \in \mathscr{L}_T(\Lambda)$,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\,\psi_u^T(t),$$

выполнены неравенства

$$c_1 \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \leqslant \Big\| \sum_{u\in\Lambda} a(u)\,\psi_u^T \Big\|_T^2 \leqslant C_1 \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2. \tag{25}$$

При этом константы T_0, c_1, C_1 зависят только от τ.

В дальнейшем сопряженной мы будем называть любую (не обязательно лежащую в $\mathscr{L}(\Lambda)$) систему локально квадратично суммируемых функций $\{\psi_u^T,\ u \in \Lambda\}$, удовлетворяющую (23). При $r > T_0$ и $T > r + T_0$ обозначим

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\,\varphi_u^{(T-r)}(s)\,ds, \tag{26}$$

$$g_u^T(t) = \frac{T}{2r(T-r)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\,\varphi_u^{(T-r)}(s)\,ds, \tag{27}$$

Напомним, что по нашему соглашению $\psi_u^r = \mathbf{1}_{[-r,r]}\,\psi_u^r$, а $\varphi_u^T = \mathbf{1}_{[-T,T]}\,\varphi_u^T$. Следующие два утверждения установлены в [16].

Лемма 2. *При $u \in \Lambda$ функции g_u^T лежат в L_T^2, причем*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g_u^T(t)\,e^{-ivt}\,dt = \delta_{u,v}, \quad \text{если } v \in \Lambda. \tag{28}$$

Лемма 3. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\lambda(f) < \infty$. Тогда найдутся такие константы $0 < c(\tau,\lambda) \leqslant C(\tau,\lambda) < \infty$, зависящие только от λ и τ, что при $T > T_0(\tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{g}_u^T$ функции g_u^T при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки*

$$c(\tau,\lambda)\,T\,f_\varepsilon(u) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\,f(x)\,dx \leqslant C(\tau,\lambda)\,T\,f_\varepsilon(u). \tag{29}$$

Здесь $u \in \Lambda$,

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(x)\, dx,$$

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(t)\, dt \, \frac{1}{|I|} \int\limits_I \frac{1}{f(t)}\, dt < \infty, \tag{30}$$

где I – конечный интервал, $|I|$ — длина I.

Условие (30), называемое условием Макенхаупта, будет подробно обсуждено позже. Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\lambda(f) < \infty$. Тогда найдутся такие константы $0 < c(\tau,\lambda) \leqslant C(\tau,\lambda) < \infty$, зависящие только от λ и τ, что при $T > T_0(\tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{\psi}_u^{\scriptscriptstyle T}$ функции $\psi_u^{\scriptscriptstyle T}$ при $\varepsilon = 1/T$ справедлива оценка*

$$c(\tau,\lambda)\, T\, f_\varepsilon(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}_u^{\scriptscriptstyle T}(x)|^2\, f(x)\, dx \leqslant C(\tau,\lambda)\, T\, f_\varepsilon(u). \tag{31}$$

Здесь $u \in \Lambda$.

Обозначим через $\widehat{s}_{\scriptscriptstyle T}$ оценку неизвестной функции $s \in \mathscr{L}_*$, построенную по наблюдениям (8). Риск от использования оценки $\widehat{s}_{\scriptscriptstyle T} \in \mathscr{L}_*$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_{\scriptscriptstyle T}\left(\widehat{s}_{\scriptscriptstyle T}; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) = \sup_{s \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f}\, \|\widehat{s}_{\scriptscriptstyle T} - s\|_{\mathscr{L}}^2 . \tag{32}$$

Обозначим $\mathscr{R}_{\scriptscriptstyle T}$ – минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_{\scriptscriptstyle T}\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_{\scriptscriptstyle T}\left(\widehat{s}_{\scriptscriptstyle T}; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right). \tag{33}$$

Когда нам это потребуется, мы можем переходить в определении (33) без серьезной потери точности в оценке скорости убывания минимаксного риска от банаховой нормы $\|s\|_{\mathscr{L}}^2$ к любой из гильбертовых норм $\|s\|_{\scriptscriptstyle T}$ или $\|s\|_*$, определенных в (14), поскольку, как установлено в [9], при условии $\tau(\Lambda) > 0$ и достаточно большом T все три упомянутые нормы в надлежащем смысле топологически эквивалентны в замкнутом линейном подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda)$ пространства $\mathscr{L}$.

Лемма 5. *Пусть* $\tau(\Lambda) > 0$. *Тогда найдутся такие положительные константы* $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_2 = C_2(\tau)$ *и* $T_0 = T_0(\tau)$, *зависящие только от* τ, *что при* $T > T_0$

$$c_1 \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) \leqslant \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*\right) \leqslant C_1 \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) \quad (34)$$

и

$$c_1 \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_T\right) \leqslant \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*\right) \leqslant C_1 \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_T\right). \quad (35)$$

Здесь $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda; \beta; L)$.

Приведем аналогичное утверждение, касающееся минимаксного риска.

Лемма 6. *Пусть* $\tau(\Lambda) > 0$. *Тогда найдутся такие положительные константы* $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_2 = C_2(\tau)$ *и* $T_0 = T_0(\tau)$, *зависящие только от* τ, *что при* $T > T_0$

$$c_1 \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) \leqslant \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*\right) \leqslant C_1 \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) \quad (36)$$

и

$$c_1 \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_T\right) \leqslant \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*\right) \leqslant C_1 \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_T\right). \quad (37)$$

Здесь $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda; \beta; L)$.

Задача состоит в исследовании асимптотического поведения при $T \to \infty$ величины минимаксного риска.

Мы исследуем асимптотическое поведение при $T \to \infty$ минимаксного риска при надлежащих условиях на спектральное множество Λ и спектральную плотность f, относительно которой предполагается, в частности, что она удовлетворяет условию Макенхаупта (30). Отметим, что при названных условиях (см. подробнее в [12])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\, du < \infty. \quad (38)$$

Дополнительно налагается условие на поведение спектральной плотности f в малой окрестности Λ_ε спектрального множества Λ,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcup_{u \in \Lambda} [u - \varepsilon, u + \varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \tau/2.$$

Для нас модельным является случай, когда функция f при $0 < |\alpha| < 1$ совпадает на Λ_ε с функцией $g_0(x)$,

$$g_0(x) = \sum_{u\in\Lambda} \mathbf{1}_{[u-\varepsilon,u+\varepsilon]}(x)\,|x-u|^{\alpha}, \tag{39}$$

или близка к ней. Однако условия на точность такой аппроксимации в настоящей работе и работе [7] отличаются. Другое отличие настоящей работы от [7] состоит в том, что мы описываем точность оценивания в терминах сопряженной системы, а не ее аппроксимации.

Перечислим условия, в которых доказывается основной результат работы.

C(1) Неизвестная функция s лежит при некоторых $\beta > 1/2$ и $L > 0$ в подпространстве $\mathscr{L}(\Lambda;\beta;L)$.

C(2) Величина $\tau(\Lambda) > 0$ и при некоторых положительных a и A для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$a\,m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\,|u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\beta} \leqslant A\,m^{2\beta+1}.$$

C(3) $x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями с нулевым средним и спектральной плотностью f, удовлетворяющей условию Макенхаупта (30).

C(4) При некотором $\alpha \in (-1,1)$ и достаточно малом положительном $\varepsilon_0 < \tau/2$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\sup_{u\in\Lambda}\Big|\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \ln f(x)\,dx - \alpha\ln\varepsilon\Big| < \infty.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть в задаче оценивания неизвестной функции s из $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda;\beta;L)$ по наблюдениям* (1) *выполнены условия* **C(1)** *и* **C(2)** *на параметрическое множество $\mathscr{L}_*$ и условия* **C(3)** *и* **C(4)** *на процесс $x(t)$. Тогда для для некоторых $0 < c \leqslant C < \infty$ и достаточно больших $T > T_0$ имеет место оценка*

$$c\,T^{-\frac{(2\beta)(1+\alpha)}{2\beta+1}} \leqslant \mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_{\mathscr{L}}) \leqslant C\,T^{-\frac{(2\beta)(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

Следует отметить, что константы $c \leqslant C$ зависят от параметров, определяющих функциональный класс $\mathscr{L}(\Lambda;\beta;L)$. Таковыми являются величины $\tau(\Lambda),\beta,m_0,a,A,L$. Кроме того, они зависят от параметров, определяющих класс неотрицательных функций, из которого черпаются функции f. Таковыми являются величины $\lambda(f)$.

В силу леммы 6, нам достаточно доказать, что в условиях теоремы найдутся такие константы $0<c\leqslant C<\infty$, зависящие от наборов (τ,β,m_0,a,A,L) и $(\lambda(f),\varepsilon_0,\alpha)$, что при достаточно больших $T>T_0$ имеют место неравенства для минимаксного риска

$$cT^{-\frac{(2\beta)(1+\alpha)}{2\beta+1}} \leqslant \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_*\right) \leqslant CT^{-\frac{(2\beta)(1+\alpha)}{2\beta+1}}. \qquad (40)$$

Так как функция $s\in\mathscr{L}(\Lambda)$ однозначно определяется вектором $\boldsymbol{a}=(a(u))$, $u\in\Lambda$, своих коэффициентов из разложения

$$s(t)=\sum_{u\in\Lambda} a(u)\,e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda}|a(u)|^2<\infty, \qquad (41)$$

то по оценке $\widehat{s}_T$ со значениями из $\mathscr{L}(\Lambda)$,

$$\widehat{s}_T(t)=\sum_{u\in\Lambda} \widehat{a}_T(u)\,e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda}|\widehat{a}_T(u)|^2<\infty,$$

однозначно воспроизводится оценка $\widehat{\boldsymbol{a}}_T=(\widehat{a}_T(u),u\in\Lambda)\in l^2(\Lambda)$. Риск от использования оценки $\widehat{\boldsymbol{a}}_T\in\mathcal{L}(\Lambda;\beta,L)$, построенной по наблюдениям (8), будем измерять величиной

$$\mathcal{R}_T\left(\widehat{\boldsymbol{a}}_T;\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)\right)=\sup_{\boldsymbol{a}\in\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)}\mathbf{E}_{\boldsymbol{a},f}\sum_{u\in\Lambda}|\widehat{a}_T(u)-a(u)|^2. \qquad (42)$$

Обозначим $\mathcal{R}_T(\Lambda;\beta;L)$ – минимаксный риск,

$$\mathcal{R}_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L))=\inf_{\widehat{\boldsymbol{a}}_T}\mathcal{R}_T\left(\widehat{\boldsymbol{a}}_T;\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)\right). \qquad (43)$$

Очевидно,

$$\mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_*\right)=\mathcal{R}_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)). \qquad (44)$$

Пусть $\boldsymbol{\tau}=(\tau_u,u\in\Lambda)$ — вектор с неотрицательными координатами. Обозначим $\Pi(\boldsymbol{\tau})=\{\boldsymbol{a}:\,|a(u)|\leqslant\tau_u,\ u\in\Lambda\}$. В случае замены в описанной выше задаче множества $\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)\}$ на его подмножество $\Pi(\boldsymbol{\tau})$ величины риска и минимаксного риска будем обозначать $\mathcal{R}_T\left(\widehat{\boldsymbol{a}}_T;\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)\right);\boldsymbol{\tau})$ и $\mathcal{R}_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L);\boldsymbol{\tau})$.

§2. Оценки среднего $f_\varepsilon(u)$.

Для $\varepsilon > 0$ и локально суммируемой функции h мы будем использовать обозначение

$$h_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-s)\, ds.$$

В [12] установлено, что при условии Макенхаупта на неотрицательную функцию f при некотором конечном C, зависящем только от $\lambda(f)$,

$$e^{w_\varepsilon(u)} \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant C\, e^{w_\varepsilon(u)}, \quad w(x) = \ln f(x). \tag{45}$$

В [7] фактически установлено, что при том же условии, если предположить, что при некотором $\alpha \in (-1, 1)$ и достаточно малом положительном $\varepsilon < \varepsilon_0 < \tau/2$

$$\sup_{u\in\Lambda} \Big| \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \ln f(x)\, dx - \alpha \ln \varepsilon \Big| < \infty,$$

то найдутся такие конечные константы $d > 0$ и $D \geqslant d$, не зависящие от u и ε, что

$$d\,\varepsilon^\alpha \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant D\,\varepsilon^\alpha, \quad \text{когда } 0 < \varepsilon < \tau/2 \text{ и } u \in \Lambda. \tag{46}$$

§3. Верхняя граница для величины минимаксного риска.

В силу неравенств (36), достаточно доказать теорему для величины минимаксного риска $\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*)$. Обозначим через $\boldsymbol{a}$ функцию на Λ, значение которой в точке u совпадает с коэффициентом $a(u)$ функции $s(t)$ в разложении

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}.$$

То есть мы будем следить не за функцией s, а за вектором $\boldsymbol{a}$ ее коэффициентов в соответствующем разложении. Пусть $\varepsilon = 1/T$, а неотрицательное m определено соотношением

$$m^{1+2\beta}\, \varepsilon^{1+\alpha} = 1. \tag{47}$$

Положим при $u \in \Lambda$

$$\widetilde{a}_T(u) = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \overline{\psi_u^T(t)}\, dy(t) = a(u) + \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \overline{\psi_u^T(t)}\, dx(t).$$

Здесь мы учли, что $\{\psi_u^T,\ u \in \Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_T(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L_T^2) к системе $\{\varphi_u^T,\ u \in \Lambda\}$, а потому

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \overline{\psi_u^T(t)}\, s(t)\, dt = a(u).$$

Стало быть, при $u \in \Lambda$ величина $\widetilde{a}_T(u)$ — несмещенная оценка $a(u)$. Поэтому

$$\sigma^2(u) := \mathbf{E}\,|a(u) - \widetilde{a}_T(u)|^2 = \frac{1}{4T^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}_u^T(t)|^2\, f(t)\, dt. \tag{48}$$

Учитывая (31), получаем при $T = 1/\varepsilon$

$$\sigma^2(u) \leqslant C_1(\tau, \lambda)\, \varepsilon\, f_\varepsilon(u), \tag{49}$$

где $4C_1(\tau, \lambda) = C(\tau, \lambda)$ а $C(\tau, \lambda)$ – константа из (31).

Перейдем к усеченной оценке $\widehat{a}_T(u)$,

$$\widehat{a}_T(u) = \widetilde{a}_T(u) \times \mathbf{1}_{[-m,m]}(u), \quad u \in \Lambda.$$

Очевидно,

$$\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*) \leqslant \sum_{u\in\Lambda, |u|\leqslant m} \mathbf{D}\,\widehat{a}_T(u) + \sum_{u\in\Lambda, |u|>m} |a(u)|^2. \tag{50}$$

В силу (46) и (49), первое слагаемое допускает оценку

$$\sum_{u\in\Lambda, |u|\leqslant m} \mathbf{D}\,\widehat{a}_T(u) = \sigma^2(u)\, m = \sigma^2(u)\, \varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{2\beta+1}}$$
$$\leqslant C_1(\tau, \lambda)\, D\, \varepsilon^{1+\alpha}\, \varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{2\beta+1}} = C_1(\tau, \lambda)\, D\, \varepsilon^{\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}$$
$$= C_1(\tau, \lambda)\, D\, T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

Второе слагаемое допускает оценку

$$\sum_{u\in\Lambda, |u|>m} |a(u)|^2 \leqslant m^{-2\beta} \sum_{u\in\Lambda, |u|>m} (1+|u|)^{2\beta} |a(u)|^2$$

$$\leqslant m^{-2\beta} L = L\,\varepsilon^{\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}} = L\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

Отсюда

$$\mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_*) \leqslant (C_1(\tau,\lambda)\,D + L)\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

§4. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ ВЕЛИЧИНЫ МИНИМАКСНОГО РИСКА.

Оценка снизу минимаксного риска устанавливается следующим образом (см. [16]). Стандартный прием заключается в переходе к дискретной схеме, когда наблюдаются величины

$$y_T(u) = (s, \psi_u^T)_T + (x, \psi_u^T)_T = a(u) + (x, \psi_u^T)_T, \quad u \in \Lambda. \tag{51}$$

Обозначим $x_T(u) = (x, \psi_u^T)_T$. Задача сводится к оцениванию вектора $\boldsymbol{a} = (a(u),\ u \in \Lambda)$ по наблюдениям

$$y_T(u) = a(u) + x_T(u), \quad u \in \Lambda. \tag{52}$$

Отметим, что $y_T(u)$ – несмещенная оценка параметра $a(u)$, когда $u \in \Lambda$.

Обозначим $\sigma_T^2(u) := \mathbf{E}\,|x_T(u)|^2$. Из леммы 4 следует, что при некоторых константах $0 < c(\tau,\lambda) \leqslant C(\tau,\lambda) < \infty$

$$c(\tau,\lambda)\,\frac{1}{T}\,f_\varepsilon(u) \leqslant \sigma_T^2(u) \leqslant C(\tau,\lambda)\,\frac{1}{T}\,f_\varepsilon(u), \quad u \in \Lambda. \tag{53}$$

Пусть $\boldsymbol{\tau} = (\tau_u,\ u \in \Lambda)$ – вектор с неотрицательными координатами. Напомним обозначение $\Pi(\boldsymbol{\tau}) = \{\boldsymbol{a} : |a(u)| \leqslant \tau_u, u \in \Lambda\}$. Рассмотрим задачу оценивания вектора $\boldsymbol{a} \in \Pi(\boldsymbol{\tau})$ по наблюдениям (52), обозначая $R_T\,(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathcal{L}(\Lambda;\beta;L))\,;\boldsymbol{\tau})$ и $R_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L);\boldsymbol{\tau})$ – соответствующие величины риска и минимаксного риска в описанной выше задаче оценивания, сохраняя обозначения $\mathcal{R}_T\,(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \mathcal{L}(\Lambda;\beta;L))\,;\boldsymbol{\tau})$ и $\mathcal{R}_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L);\boldsymbol{\tau})$ величины риска и минимаксного риска в случае, когда используются наблюдения (8).

В [7] установлено, что если при $\beta > 1/2$, $u \in \Lambda$ и

$$\tau_u = \frac{f_\varepsilon(u)\,L}{\sum\limits_{u\in\Lambda} f_\varepsilon(u)(1+|u|)^{2\beta}}, \quad u \in \Lambda,$$

то в условиях теоремы при $\varepsilon = 1/T$ и некоторой константе c для величины минимаксного риска справедлива оценка

$$R_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L);\boldsymbol{\tau}) \geqslant c\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

Следующее утверждение в другой форме установлено в [16].

Лемма 7. *Пусть* $h \in \mathscr{D}_T$,

$$z = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{h(t)}\,dx(t), \quad \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{h(t)}\,e^{iut}dt = 0. \tag{54}$$

Тогда в условиях теоремы при некотором положительном $\rho = \rho(f) < 1$

$$\mathbf{E}\,|x(u) - z|^2 > (1-\rho)\mathbf{E}\,|x(u)|^2.$$

Из леммы 7 следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 8. *В условиях теоремы при* $u \in \Lambda$ *для любой оценки* $\widetilde{a}_T(u)$ *параметра* $a(u)$*, построенной по наблюдениям* (8)*,*

$$\mathbf{E}\,|a(u) - \widetilde{a}_T(u)| \geqslant (1-\rho)\,\sigma_T^2(u).$$

Из леммы 8 следует, что в условиях теоремы для величины минимаксного риска $\mathcal{R}_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L);\boldsymbol{\tau})$ справедлива оценка

$$\mathcal{R}_T(\mathcal{L}(\Lambda;\beta;L)) \geqslant (1-\rho)\,c\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

Из последнего неравенства, очевидно, следует оценка

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}(\Lambda;\beta;L)) \geqslant (1-\rho)\,c\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{2\beta+1}}.$$

Отметим, что упомянутые в этом пункте константы c и ρ зависят только от величин $\tau(\Lambda), \beta, m_0, a, A, L, \lambda(f)$.

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы,* М., Мир, 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы,* М., Мир, 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее применен. **29**, No. 1, (1984), 19–32.
4. В. Н. Солев,*Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 261–275.
5. В. Н. Солев,*Оценка функции в гауссовском стационарном шуме* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 277–290.
6. В. Н. Солев, *Оценка снизу минимаксного риска в одной задаче оценивания функции в стационарном гауссовском шуме* — Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 282–293.
7. В. Н. Солев, *Пространство BMO и задача оценивания функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума* — Зап. научн. семин. ПОМИ **526** (2023), 193–206.
8. В. Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме: новые спектральные условия.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2018), 275–285.

9. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости,* М., Наука, 1964.
10. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax Risk over Hyperrectangles, and Implications.* — Ann. Statist., **18**, No. 3, 1416–1437.
11. W. Stepanoff, *Sur quelques généralisations des fonctions presque-périodiques.* — Comptes Rendus **181** (1925), 90–92.
12. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions,* New York, Academic Press, 1981.
13. I. M. Johnstone, *Gaussian Estimation: Sequence and Wavelet Models.* Book Draft, http://statweb.stanford.edu, 2017.
14. M. Ermakov, *Minimax and Bayes estimation in deconvolution problem.* — ESAIM: Probab. Statist. **12** (2008), 327–344.
15. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
16. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.

Solev V. N. Conjugate system and accuracy in the estimation problem.

In this paper, we construct lower and upper bounds for minimax risk in the problem of estimating the unknown pseudo-periodic function observed in the stationary noise with a spectral density satisfying the Muckenhoupt condition, with some a priori information about the behavior of the spectral density in the neighborhood of the spectrum of the signal.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27,
Санкт-Петербург, 191023 Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 3 ноября 2025 г.