

А. В. Савич

**ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАКСИМУМОВ
ФУНКЦИЙ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ
ВЕЛИЧИН С СИЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Вероятности редких событий, таких как наводнения или резкие выбросы в уровне цен финансовых активов, не могут быть оценены при помощи стандартных методов. Построение эмпирической функции распределения на основе имеющихся данных не позволяет исследовать искомую вероятность, поскольку интересующие нас события не были зафиксированы на данный момент, то есть, согласно эмпирической функции распределения, их вероятность равна 0, что, безусловно, не соответствует действительности. Для того, чтобы все же получить некоторую оценку вероятности подобных выбросов, используют методы, основанные на предельном распределении. Основным результатом в этом направлении – теорема Гнеденко–Фишера–Типпета, дающая исчерпывающий ответ на вопрос о предельном распределении последовательности максимумов независимых случайных величин:

Теорема 1 (Гнеденко–Фишера–Типпета). Пусть $X_n, n = 1, 2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если найдутся последовательности констант $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ и невырожденная функция распределения H , такие что для всех x , являющихся точками непрерывности функции H , выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq c_n x + d_n) = H(x),$$

то H принадлежит одному из трех типов распределений ($\alpha > 0$):
распределение Фреше:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0; \end{cases}$$

Ключевые слова: гауссовские временные ряды, функции зависимых гауссовских случайных величин, предельные теоремы, порядковые статистики, гауссовские копулы.

распределение Вейбулла:

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

распределение Гумбеля:

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Однако на практике часто приходится иметь дело с зависимыми случайными величинами, для которых данная теорема напрямую неприменима, поэтому многие дальнейшие работы были направлены на обобщение теоремы 1 на случай зависимых случайных величин.

В работе [1] С. Берман показал сходимость по распределению последовательности нормированных максимумов стационарных зависимых гауссовских случайных величин к функции распределения Гумбеля при некотором ограничении на их корреляционную функцию. Эти результаты были обобщены в статье Я. Миттал и Д. Илвисакера [2], где была получена следующая предельная теорема в случае сильной зависимости для гауссовских последовательностей:

Теорема 2. Пусть X_n , $n = 1, 2, \dots$ – стационарная последовательность стандартных нормальных величин с корреляционной функцией r_n . Предположим, что r_n выпукла, стремится к 0 и последовательность $\frac{1}{r_n \ln n}$ монотонна при больших n , причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n \ln n} = 0$. Тогда для любого x верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(r_n^{-\frac{1}{2}} \left(M_n - (1 - r_n)^{\frac{1}{2}} b_n \right) \leq x \right) = \Phi(x), \quad (1)$$

где $M_n = \max_{k \leq n} (X_k)$, $b_n = 2\sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln(4\pi \ln n)}{2\sqrt{2 \ln n}}$, $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения.

Поскольку зависимость для последовательности гауссовских случайных величин полностью определяется их корреляционной функцией, следующим шагом стало изучение функций от гауссовских случайных величин. Иными словами, в данной работе изучаются предельные распределения для максимума временного ряда вида $\{f(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$, где X_n – стационарный гауссовский процесс с дискретным временем и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая непрерывная функция. Более подробно, изучаются условия на функцию f , такие что существуют $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ и

невырожденная случайная величина ξ и выполняется предельное соотношение по распределению:

$$\frac{\max_{k=1,\dots,n} f(X_k) - d_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi.$$

Многочисленные оценки на асимптотическое поведение и другие свойства гауссовских процессов могут быть найдены в [12]. Необходимые и достаточные условия на функцию, при которых образ гауссовской случайной величины под действием этой функции принадлежит области притяжения распределения Фреше, были найдены В. И. Питербаргом и А. Е. Мазур в [3] и [4]. В. В. Трошиным в [5] было найдено достаточное условие принадлежности функции гауссовской случайной величины к области притяжения распределения Гумбеля. В [3] предпринимается попытка переноса предельной теоремы Бермана на случай, когда преобразованные функцией гауссовские случайные величины принадлежат области притяжения распределения Фреше.

В работах автора [6] и [11] были получены результаты для функций зависимых гауссовских случайных величин, удовлетворяющих уже упомянутому условию $r_n \ln n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а также условию $r_n \ln n \rightarrow \gamma$, $n \rightarrow \infty$, где $\gamma > 0$ – некоторая константа. Это условие может быть несложно обобщено до $r_n \ln n = O(1)$. Данная статья является прямым продолжением работ [6] и [11] и исследует наличие предельной теоремы для функций от гауссовского временного ряда при сильной зависимости преобразов, то есть когда для корреляционной функции r_n гауссовской последовательности верно следующее соотношение: $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \ln n = \infty$. Предельное поведение максимумов в этом случае имеет существенно различный характер для области притяжения Фреше по сравнению с областью притяжения Гумбеля.

Данная статья структурирована следующим образом: в §2 показано отсутствие нетривиальной функции распределения для образов гауссовского ряда с сильной зависимостью из области притяжения распределения Фреше при линейной нормировке. В §3 установлена предельная теорема для образов гауссовского ряда с сильной зависимостью в случае, когда образы имеют распределение вейбулловского типа. В §4 исследуется связь полученных результатов с характером поведения предельных распределений из [11] при $\gamma \rightarrow \infty$.

Помимо уже введенных в теореме 1 в статье используются следующие обозначения. Через $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ обозначим пространства вещественных, целых и натуральных чисел соответственно, причем последние начинаются с 1. Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ обозначают плотность и функцию распределения стандартной нормальной случайной величины соответственно.

Автор выражает благодарность И. А. Алексееву за внимание и поддержку в работе и В. И. Питербаргу за постановку первоначальной проблемы.

§2. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАВИСИМОГО ГАУССОВСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА. ОБЩИЕ ФАКТЫ

Напомним, что предметом исследования работы являются последовательности зависимых и независимых образов стационарных гауссовских временных рядов при отображении некоторой функцией $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то есть последовательности вида

$$\xi_i = f(X_i),$$

где $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ — стационарный гауссовский случайный процесс, r_n — его корреляционная функция, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}X_i = 0$ и $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ для любого i . Заметим, что в литературе [3, 6] подобные последовательности часто называют гауссовским копульным процессом, поскольку зависимость, порождаемая временным рядом, может быть выражена в терминах многомерной гауссовской копулы. Также будет использовано следующее обозначение $b_n = \sqrt{2 \ln n} + \frac{\ln(4\pi \ln n)}{2\sqrt{2 \ln n}}$.

Известно ([11, страница 11]), что для любой медленно меняющейся на бесконечности функции L выполнено

$$\ln L(x^b) = o(\ln x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Докажем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией r_n , причем последовательность r_n выпукла и $r_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Пусть $r_n \ln n \rightarrow \infty$ и последовательность $r_n \ln n$ монотонна при больших n . Обозначим $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Тогда, если существуют нетривиальная функция распределения $G(x)$ и некоторая последовательность функций $g_n(x)$, такие что для всех точек

непрерывности функции $G(x)$ верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq g_n(x)) = G(x),$$

то $\frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \rightarrow \tau(x)$, где $\tau(x)$ – некоторая вещественная функция, не зависящая от n .

Доказательство леммы 1. Из теоремы 2.4 [2] мы знаем, что в условиях леммы $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq x\right) = \Phi(x)$. Поскольку предельная функция является непрерывной функцией распределения, это означает, что сходимость равномерна по x , то есть для любого $x \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое что для любого $n > N$ верно, что

$$\left| \mathbf{P}\left(\frac{M_n - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \varepsilon.$$

При $n > N$ рассмотрим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq g_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq \frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}}\right)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}}\right) - \varepsilon \\ & \leq \mathbf{P}\left(\frac{M_n - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq \frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}}\right) \\ & \leq \Phi\left(\frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}}\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

С другой стороны, из условий теоремы следует, что для любой точки непрерывности x функции $G(x)$ существует $N_1(x) \in \mathbb{N}$, такое что для $n > N_1(x)$ верно, что

$$G(x) - \varepsilon \leq \mathbf{P}\left(\frac{M_n - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq \frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}}\right) \leq G(x) + \varepsilon.$$

Это означает, что при $n > \max(N, N_1(x))$ выполнено соотношение:

$$G(x) - 2\varepsilon \leq \Phi\left(\frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}}\right) \leq G(x) + 2\varepsilon.$$

Поскольку Φ и обратная к ней функция квантилей строго монотонны и непрерывно-дифференцируемы, отсюда следует, что

$$\Phi^{-1}(G(x) - 2\varepsilon) \leq \frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq \Phi^{-1}(G(x) + 2\varepsilon).$$

Тогда по формуле конечных приращений для некоторой $C(x) \in \mathbb{R}$ верно, что

$$\Phi^{-1}(G(x)) - C(x)\varepsilon \leq \frac{g_n(x) - \sqrt{1-r_n} b_n}{\sqrt{r_n}} \leq \Phi^{-1}(G(x)) + C(x)\varepsilon.$$

Положив $\tau(x) = \Phi^{-1}(G(x))$, получаем соответствующее определение предела. $\square$

Итак, для максимумов гауссовской последовательности с сильной зависимостью наблюдается сходимость к нетривиальному распределению только при нормировке следующего вида:

$$\mathbf{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq \sqrt{1-r_n} b_n + \sqrt{r_n} \tau(x) + o(\sqrt{r_n})) \rightarrow G(x).$$

Лемма 2. Пусть L — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Тогда при $x \rightarrow \infty$ верно, что

$$\ln L(x(1+O(1))) = \ln L(x) + o(1).$$

Доказательство леммы 2. Для медленно меняющихся на бесконечности функций известно [10], что для $a > 0$, принадлежащих компактному множеству, выполнена равномерная по a сходимость следующего вида:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} \rightarrow 1,$$

то есть $L(x(1+O(1))) = L(x)(1+o(1))$. Осталось прологарифмировать данный результат. $\square$

Лемма 3. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией r_n , причем $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, f — непрерывная функция, имеющая не более конечного числа изменений монотонности, причем $f(y) \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ и $f(y) < M$, $y < 0$ для некоторой константы $M \in \mathbb{R}$. Пусть также существует нетривиальный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max(f(X_1), \dots, f(X_n)) \leq c_n x + d_n) = G(x).$$

Тогда $c_n x + d_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 3. Предположим, что существует подпоследовательность индексов $n_k, k = 1, 2, \dots$, такая что $c_{n_k}x + d_{n_k} < u$ для некоторого $u \in \mathbb{R}$. Тогда выберем подпоследовательность n_{k_l} , такую что $r_{n_{k_l}} \ln l = o(1)$ при $l \rightarrow \infty$. Это можно сделать, поскольку $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\max_{i \leq n} (f(X_i)) \geq \max_{n_{k_l} \leq n} (f(X_{n_{k_l}}))$, то есть

$$\mathbf{P}\left(\max_{i \leq n} (f(X_i)) > u\right) \geq \mathbf{P}\left(\max_{n_{k_l} \leq n} (f(X_{n_{k_l}})) > u\right). \quad (3)$$

Однако, при больших n вероятность превышения уровня u , указанная в правой части (3), мало отличается от таковой для независимых копий, что было показано в [6, теорема 2]. В независимом случае такая вероятность стремится к 1, то есть ни для какой точки x по данной подпоследовательности максимумов не будет наблюдаться сходимости к нетривиальному распределению. Это означает, что любая подпоследовательность последовательности $c_nx + d_n$ стремится к бесконечности, а следовательно $c_nx + d_n$ стремится к бесконечности согласно определению предела по Гейне. $\square$

§3. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАВИСИМОГО ГАУССОВСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА. ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФРЕШЕ

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией r_n , причем последовательность r_n выпукла и $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть также $r_n \ln n \rightarrow \infty$ монотонно при больших n . Обозначим $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Пусть $\xi_i = f(X_i)$ имеет распределение, принадлежащее области притяжения распределения Фреше, т.е. $1 - \mathbf{P}(\xi \leq x) = x^{-a}L(x)$, где $a > 0$ и $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Пусть, кроме того, f — непрерывная функция, имеющая не более чем конечное число изменений монотонности, причем $f(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$ и $f(y) < M$ при $y < 0$ для некоторой константы $M \in \mathbb{R}$. Обозначим также $M_n^\xi = \max(f(X_1), \dots, f(X_n))$. Тогда не существует нормировочных коэффициентов c_n и d_n , не зависящих от x и таких что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n^\xi \leq c_nx + d_n) = G(x),$$

где $G(x)$ – нетривиальная функция распределения.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала случай строго монотонной функции f . Напомним (см. [11]), что для строго монотонной функции f , удовлетворяющей условиям теоремы, верно следующее асимптотическое соотношение:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{2a \ln y} - \frac{\ln L(y)}{\sqrt{2a \ln y}} - \frac{\ln 2\pi}{2\sqrt{2a \ln y}} - \frac{\ln 2a + \ln \ln y + o(1)}{2\sqrt{2a \ln y}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln y}}\right). \quad (4)$$

Покажем, что не существует нормировочных коэффициентов c_n и d_n , таких что $f^{-1}(c_n x + d_n) = \sqrt{1 - r_n} b_n + \sqrt{r_n} \tau(x) + o(\sqrt{r_n})$. Тогда, согласно лемме 1, предельной функцией не может быть функция распределения, отличная от тривиальной.

Итак, согласно лемме 3, $c_n x + d_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что тогда существует подпоследовательность n_k , для которой выполнено одно из следующих условий при $k \rightarrow \infty$: $\frac{c_{n_k}}{d_{n_k}} = o(1)$, $\frac{d_{n_k}}{c_{n_k}} = o(1)$ или $d_{n_k} \sim c_{n_k}$. Действительно, рассмотрим последовательность $s_n = \frac{|c_n|}{|c_n| + |d_n|}$. Заметим, что $s_n \in [0, 1]$, то есть данная последовательность лежит в компактном множестве. Тогда, по теореме Больцано–Вейерштрасса, из последовательности s_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность $s_{n_k} \rightarrow s \in [0, 1]$, $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим 3 случая: $s = 0$, $s = 1$ и $0 < s < 1$.

В первом случае при $k \rightarrow \infty$ имеем:

$$s_{n_k} = \frac{1}{1 + \frac{|d_{n_k}|}{|c_{n_k}|}} \rightarrow 0, \quad (5)$$

то есть $\frac{|d_{n_k}|}{|c_{n_k}|} \rightarrow \infty$ или, иными словами, $\frac{|c_{n_k}|}{|d_{n_k}|} = o(1)$.

Если $s = 1$, то в правой части (5) должна наблюдаться сходимость к 1, то есть $\frac{|d_{n_k}|}{|c_{n_k}|} \rightarrow 0$.

Наконец, если $0 < s < 1$, то

$$\frac{|d_{n_k}|}{|c_{n_k}|} \rightarrow \frac{1}{s} - 1,$$

то есть $c_{n_k} \sim d_{n_k}$ и оба стремятся к бесконечности.

Заметим, что если имеется сходимость для всей последовательности нормированных максимумов, то должна быть и сходимость для любой подпоследовательности. Далее для удобства доказательства и не нарушая общности рассуждений будем считать, что вся нормировочная последовательность целиком удовлетворяет одному из описанных условий. Итак, пусть $\frac{c_n}{d_n} = o(1)$. Тогда

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)} - \frac{\ln L(c_n x + d_n)}{\sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)}} \\ &\quad - \frac{\ln 2\pi}{2\sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)}} - \frac{\ln 2a + \ln \ln(c_n x + d_n) + o(1)}{2\sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)}} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}}\right). \end{aligned}$$

Вынесем d_n за скобки и получим:

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a \left(\ln d_n + \ln \left(1 + \frac{c_n x}{d_n} \right) \right)} \\ &\quad - \frac{\ln L(c_n x + d_n)}{\sqrt{2a \left(\ln d_n + \ln \left(1 + \frac{c_n x}{d_n} \right) \right)}} \\ &\quad - \frac{\ln 2\pi + \ln 2a + \ln \left(\ln d_n + \ln \left(1 + \frac{c_n x}{d_n} \right) \right) + o(1)}{2\sqrt{2a \left(\ln d_n + \ln \left(1 + \frac{c_n x}{d_n} \right) \right)}} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}}\right). \end{aligned}$$

Далее, переобозначим $h_n(x) = \ln \left(1 + \frac{c_n x}{d_n} \right) = \frac{c_n x}{d_n} + O\left(\frac{c_n^2 x^2}{d_n^2}\right)$. Заметим, что $h_n(x) = o(1)$. Тогда

$$f^{-1}(c_n x + d_n) = \sqrt{2a \ln d_n \left(1 + \frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right)} - \frac{\ln L(c_n x + d_n)}{\sqrt{2a \ln d_n \left(1 + \frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right)}}$$

$$- \frac{\ln 2\pi + \ln 2a + \ln \left(\ln d_n \left(1 + \frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right) \right) + o(1)}{2\sqrt{2a \left(\ln d_n \left(1 + \frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right) \right)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}} \right).$$

Разлагая в ряд Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a \ln d_n} \left(1 + O\left(\frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right) \right) \\ &- \frac{2 \ln L(c_n x + d_n) + \ln 4\pi a + \ln \ln d_n + \ln \left(1 + \frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right) + o(1)}{\sqrt{2a \ln d_n}} \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{h_n(x)}{\ln d_n} \right) \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}} \right). \end{aligned}$$

Как было показано ранее в лемме 2,

$$\ln(L(c_n x + d_n)) = \ln L(d_n) + o(1),$$

то есть

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a \ln d_n} - \frac{2 \ln L(d_n) + \ln 4\pi a + \ln \ln d_n + o(1)}{\sqrt{2a \ln d_n}} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(d_n)}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из леммы 1 следует, что $\sqrt{2a \ln d_n} \sim b_n$, то есть $\ln d_n$ должен иметь порядок $\frac{\ln n}{a}$. Кроме того, поскольку $r_n \ln n \rightarrow \infty$, имеем $\frac{1}{\sqrt{\ln n}} = o(\sqrt{r_n})$. Но это означает, что o малое в (6) не повлияет на предел (если он существует), то есть при такой нормировке предел не зависит от x , а следовательно тривиален и не представляет интереса.

Теперь рассмотрим случай если $\frac{d_n}{c_n} = o(1)$. Тогда, обозначив $w_n(x) = \ln \left(1 + \frac{d_n}{c_n x} \right) = \frac{d_n}{c_n x} + O\left(\frac{d_n^2}{c_n^2 x^2} \right) = o(1)$, имеем:

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a(\ln c_n + \ln x + w_n(x))} \\ &- \frac{2 \ln L(c_n x + d_n) + \ln 4\pi a + \ln(\ln c_n + \ln x + w_n(x)) + o(1)}{2\sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)}} \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}} \right). \end{aligned}$$

Вынесем главное слагаемое за скобки

$$f^{-1}(c_n x + d_n) = \sqrt{2a \ln c_n} \sqrt{1 + \frac{\ln x}{2a \ln c_n} + \frac{w_n(x)}{2a \ln c_n}} - \frac{2 \ln L(c_n) + \ln 4\pi a + \ln \ln c_n + o(1)}{2\sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}}\right).$$

Выше мы снова воспользовались свойством медленно меняющейся функции, доказанным в лемме 2. Таким образом получаем, что

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a \ln c_n} - \frac{2 \ln L(c_n) + \ln \ln c_n}{2\sqrt{2a \ln c_n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln c_n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}}\right) \\ &= \sqrt{2a \ln c_n} - \frac{2 \ln L(c_n) + \ln \ln c_n}{2\sqrt{2a \ln c_n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln c_n}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку это выражение должно быть того же порядка, что и асимптотика g_n в лемме 1, отсюда следует, что

$$\sqrt{2a \ln c_n} = \sqrt{1 - r_n} b_n (1 + o(1)) = \sqrt{2 \ln n} (1 + o(1)),$$

т.е. O большое выше не повлияет на предел. Но это означает, что снова предел тривиален и не зависит от x .

Рассмотрим случай, когда c_n и d_n эквивалентны.

Пусть $v_n(x) = \ln\left(x + \frac{d_n}{c_n}\right) = O(1)$. Тогда

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a(\ln c_n + v_n(x))} \\ &- \frac{2 \ln L(c_n x + d_n) + \ln 4\pi a + \ln(\ln c_n + v_n(x)) + o(1)}{2\sqrt{2a \ln(c_n x + d_n)}} \\ &+ o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(c_n x + d_n)}}\right). \end{aligned}$$

Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2a \ln c_n} \sqrt{1 + \frac{v_n(x)}{2a \ln c_n}} \\ &\quad - \frac{2 \ln L(c_n) + \ln 4\pi a + \ln \ln c_n + o(1)}{2\sqrt{2a(\ln c_n + v_n(x))}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{(\ln c_n + v_n(x))}}\right) \\ &= \sqrt{2a \ln c_n} - \frac{2 \ln L(c_n) + \ln 4\pi a + \ln \ln c_n + o(1)}{2\sqrt{2a \ln c_n}} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{(\ln c_n + v_n(x))}}\right). \end{aligned}$$

Как видим, слагаемые, влияющие на предел, снова не зависят от x .

Теперь рассмотрим функции f , монотонные лишь на бесконечности. Предположим, что для такой функции существуют нормировочные коэффициенты, такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n^\xi \leq c_n x + d_n) = G(x).$$

Выберем достаточно большое фиксированное число $A > M$, такое что при значениях аргумента больших B — прообраза A при отображении f , сама f строго монотонна и больше M из условия теоремы. Согласно лемме 3, $c_n x + d_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что, начиная с некоторого n , $c_n x + d_n > A$. Рассмотрим функцию $\bar{f}(x)$, совпадающую с f в точке и справа от нее, но при этом строго монотонную слева от нее (максимум достигается на правой полуоси, поскольку слева f не превосходит M). Распишем:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\max(f(X_1), \dots, f(X_n)) \leq c_n x + d_n) \\ &= \mathbf{P}(\max(f(X_1), \dots, f(X_n)) \leq A) \\ &\quad + \mathbf{P}(A < \max(f(X_1), \dots, f(X_n)) \leq c_n x + d_n) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\max(f(X_1), \dots, f(X_n)) > A) \\ &\quad + \mathbf{P}(A < \max(\bar{f}(X_1), \dots, \bar{f}(X_n)) \leq c_n x + d_n). \end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение из определения A совпадает с

$$\begin{aligned}
& 1 - \mathbf{P}(\max(\bar{f}(X_1), \dots, \bar{f}(X_n)) > A) \\
& + \mathbf{P}(A < \max(\bar{f}(X_1), \dots, \bar{f}(X_n)) \leq c_n x + d_n) \\
& = \mathbf{P}(\max(\bar{f}(X_1), \dots, \bar{f}(X_n)) \leq c_n x + d_n),
\end{aligned} \tag{7}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\max(\bar{f}(X_1), \dots, \bar{f}(X_n)) > A) &= \mathbf{P}(\max(X_1, \dots, X_n) > B) \\
&= \mathbf{P}(\max(f(X_1), \dots, f(X_n)) > A).
\end{aligned}$$

Однако (7) означает, что для случая строго монотонной на бесконечности функции $\bar{f}$ существует нетривиальный предел для нормированной последовательности максимумов, что противоречит уже доказанному. $\square$

§4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАВИСИМОГО ГАУССОВСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА. ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГУМБЕЛЯ

Ниже установлена предельная теорема для случая, когда образом рассматриваемых гауссовских процессов является последовательность случайных величин вейбулловского типа. Представленный тип распределений выбран так как он является многопараметрическим и часто используется на практике. На данный момент получить результаты в общем случае не удалось, поскольку область притяжения Гумбеля является очень обширной и с разнообразной асимптотикой поведения функции распределения на бесконечности.

Теорема 4. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией r_n , причем r_n выпукла и $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть также $r_n \ln n \rightarrow \infty$ монотонно при больших n . Обозначим $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Пусть $\xi_i = f(X_i)$ имеют функцию распределения вейбулловского типа, т.е. $F(x) = 1 - \frac{d}{\beta C} x^\alpha e^{-Cx^\beta}$ где $d > 0$, $\beta > 0$, $C > 0$, $\alpha > -1$ – некоторые параметры. Пусть, кроме того, f – непрерывная функция, имеющая не более чем конечное число изменений монотонности, причем $f(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$ и $f(y) < M$ при $y < 0$ для некоторой константы $M \in \mathbb{R}$. Обозначим также

$$M_n^\xi = \max(f(X_1), \dots, f(X_n)).$$

Тогда существуют нормировочные коэффициенты c_n и d_n , такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} (M_n^\xi \leq c_n x + d_n) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения. Нормировочные коэффициенты могут быть выбраны как решения представленного ниже уравнения

$$\begin{cases} \sqrt{2C}d_n^{\frac{\beta}{2}} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\ln d_n}{\sqrt{2C}d_n^{\frac{\beta}{2}}} = \sqrt{1-r_n} b_n \\ \frac{\beta c_n}{2d_n^{1-\frac{\beta}{2}}} = \sqrt{r_n} \longleftrightarrow c_n = \frac{2\sqrt{r_n}d_n^{1-\frac{\beta}{2}}}{\beta}. \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим подробнее асимптотическое уравнение, представленное в условиях теоремы. Заметим, что если рассмотреть левую часть первого уравнения системы как функцию от d_n , то при больших d_n эта функция монотонна, непрерывна и стремится к бесконечности, то есть при любом фиксированном n существует значение d_n , в точности удовлетворяющее данному уравнению, причем $d_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, что следует из определения b_n . Найти данное решение достаточно с точностью до порядка левой части $o(\sqrt{r_n})$, для чего можно воспользоваться техникой, описанной Олвером в [7, с. 23].

Напомним, что асимптотика обратной функции для распределения вейбулловского типа была найдена в [6] и имеет вид:

$$f^{-1}(u_n) = \sqrt{2C}u_n^{\frac{\beta}{2}} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\ln u_n}{\sqrt{2C}u_n^{\frac{\beta}{2}}} + O(u_n^{-\frac{\beta}{2}}).$$

Решения уравнения (8) обладают следующим свойством: $\frac{c_n}{d_n} = o(1)$ и $d_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2C}(c_n x + d_n)^{\frac{\beta}{2}} \\ &\quad - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\ln(c_n x + d_n)}{\sqrt{2C}(c_n x + d_n)^{\frac{\beta}{2}}} + O((c_n x + d_n)^{-\frac{\beta}{2}}) \\ &= \sqrt{2C}d_n^{\frac{\beta}{2}} \left(1 + \frac{c_n x}{d_n}\right)^{\frac{\beta}{2}} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\ln d_n + \ln\left(1 + \frac{c_n x}{d_n}\right)}{\sqrt{2C}d_n^{\frac{\beta}{2}} \left(1 + \frac{c_n x}{d_n}\right)^{\frac{\beta}{2}}} \\ &\quad + O(d_n^{-\frac{\beta}{2}}). \end{aligned} \quad (9)$$

Продолжая цепочку равенств (9), имеем:

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(c_n x + d_n) &= \sqrt{2C} d_n^{\frac{\beta}{2}} \left(1 + \frac{\beta c_n x}{2d_n} + o\left(\frac{c_n}{d_n}\right) \right) \\
 &\quad - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\ln d_n}{\sqrt{2C} d_n^{\frac{\beta}{2}}} + O(d_n^{-\frac{\beta}{2}}) \\
 &= \sqrt{2C} d_n^{\frac{\beta}{2}} + \frac{\beta c_n x}{2d_n^{1-\frac{\beta}{2}}} + O\left(\frac{c_n^2}{d_n^{2-\frac{\beta}{2}}}\right) - \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\ln d_n}{\sqrt{2C} d_n^{\frac{\beta}{2}}} \\
 &\quad + O(d_n^{-\frac{\beta}{2}}).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Решения (8) превращают (10) в

$$f^{-1}(c_n x + d_n) = \sqrt{1-r_n} b_n + \sqrt{r_n} x + o(\sqrt{r_n}),$$

что означает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max(f(X_1), \dots, f(X_n)) \leq d_n + c_n x) = \Phi(x). \quad \square$$

Таким образом, в данном случае существуют нормировочные коэффициенты, для которых наблюдается сходимость нормированной последовательности максимумов к стандартной нормальной случайной величине.

Можно обратить внимание, что результаты, полученные для области притяжения Фреше принципиально отличаются от таковых для области притяжения Гумбеля – в последнем случае существует нетривиальное абсолютно непрерывное предельное распределение, в то время как в первом такого распределения не существует. Отметим также, что в случае средней и слабой зависимости подобного расхождения между областями притяжения не наблюдается. Возникает естественный вопрос, с чем может быть связано подобное различие даже при наличии достаточно строгих ограничений на корреляционную функцию. Для ответа на него предлагается подробнее рассмотреть описанный в [11] случай средней зависимости когда $r_n \ln n \rightarrow \gamma$ и изучить эволюцию предельных распределений при $\gamma \rightarrow \infty$, что поможет лучше понять причины столь существенного различия двух областей притяжения.

Итак, в [11] был получен следующий результат

Теорема 5. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – стационарная последовательность стандартных нормальных случайных величин с ковариационной функцией r_k , $k = 1, 2, \dots$, причем при $k \rightarrow \infty$ выполнено $r_k \ln k \rightarrow \gamma$,

$\gamma > 0$. Пусть Y_i – независимые копии случайных величин X_i , $\zeta_i = f(Y_i)$, причем для всех x , являющихся точками непрерывности функции $H(x)$, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \leq c_n x + d_n) = H(x),$$

где $H(x)$ – функция Фреше или Гумбеля из теоремы 1 и c_n, d_n – нормировочные коэффициенты, такие что для любого $x \in \mathbb{R}$ $c_n x + d_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Пусть, кроме того, f – непрерывная функция, имеющая не более чем конечное число изменений монотонности, причем $f(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$ и $f(y) < M$ при $y < 0$ для некоторой константы $M \in \mathbb{R}$. Тогда для $\xi_i = f(X_i)$ выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq c_n x + d_n) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)^{e^t} \cdot (2\gamma)^{-\frac{1}{2}} \varphi((2\gamma)^{-\frac{1}{2}}(t + \gamma)) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим разницу в поведении функции распределения справа при $\gamma \rightarrow \infty$ для случаев, когда $H(x)$ – функция распределения Фреше в сравнении с $H(x)$ – функцией распределения Гумбеля.

В случае распределения Гумбеля имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq c_n x + d_n) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{-x} \cdot e^t} \cdot (2\gamma)^{-\frac{1}{2}} \varphi((2\gamma)^{-\frac{1}{2}}(t + \gamma)) dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{-(x-t)}} \cdot (2\gamma)^{-\frac{1}{2}} \varphi((2\gamma)^{-\frac{1}{2}}(t + \gamma)) dt. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функция распределения справа – это функция распределения суммы случайной величины ζ , имеющей распределение Гумбеля, со случайной величиной $\mathcal{N}(-\gamma, 2\gamma)$, имеющей нормальное распределение со средним $-\gamma$ и дисперсией 2γ и не зависящей от ζ , то есть

$$\frac{M_n^\xi - d_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \zeta + \mathcal{N}(-\gamma, 2\gamma).$$

Прибавим γ к обеим частям и разделим полученное на $\sqrt{2\gamma}$ (это легко внести в нормировочные коэффициенты d_n и c_n). Тогда правая часть превратится в $\frac{\zeta}{\sqrt{2\gamma}} + \mathcal{N}(0, 1)$. Совершив предельный переход по $\gamma \rightarrow \infty$, мы получим справа стандартное нормальное распределение, что и наблюдается в рассмотренном выше случае распределений вейбулловского типа.

В случае распределения Фреше ситуация иная – предельная функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\max(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq c_n x + d_n) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{-\alpha} \cdot e^t} \cdot (2\gamma)^{-\frac{1}{2}} \varphi((2\gamma)^{-\frac{1}{2}}(t + \gamma)) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция справа – функция распределения случайной величины $\zeta\eta$, где ζ имеет распределение Фреше, а η – не зависящая от нее случайная величина вида $\eta = \exp(\alpha^{-1}\mathcal{N}(-\gamma, 2\gamma))$. Действительно, обозначив через $\varphi_\gamma(x)$ плотность случайной величины $\mathcal{N}(-\gamma, 2\gamma)$, мы получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta\eta \leq x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta \exp(\alpha^{-1}t) \leq x) \varphi_\gamma(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left(\zeta \leq \frac{x}{\exp(\alpha^{-1}t)}\right) \varphi_\gamma(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\left(-\frac{x}{\exp(\alpha^{-1}t)}\right)^{-\alpha}\right) \varphi_\gamma(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{-\alpha} e^t} \varphi_\gamma(t) dt, \end{aligned}$$

что в точности совпадает с правой частью (11). То есть в этом случае наблюдается сходимость

$$\frac{M_n^\xi - d_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \zeta \exp(\alpha^{-1}\mathcal{N}(-\gamma, 2\gamma)) = e^{-\alpha^{-1}\gamma} \zeta \exp(\alpha^{-1}\mathcal{N}(0, 1))^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Можно заметить, что чтобы "избавиться" от γ в правой части, необходимо извлечь корень соответствующей степени из обеих частей, то есть зависимость от гамма невозможно внести в нормировочные коэффициенты c_n и d_n .

Отметим, что несмотря на то, что рассуждения выше не являются строгим доказательством, они позволяют лучше понять причины наблюдаемой разницы в результатах для распределения Фреше и Гумбеля. На основе этих рассуждений возникает гипотеза, что в случае области притяжения распределения Гумбеля пределом в данной постановке всегда будет стандартное нормальное распределение.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены предельные теоремы для случайных величин, получаемых как образ стационарной гауссовской последовательности с сильной зависимостью при отображении некоторой функцией вещественного аргумента. Показано, что если поведение хвоста соответствующего образа имеет степенной характер, то не существует линейной нормировки последовательности максимумов образов, сходящейся к нетривиальному распределению.

Также рассмотрен случай когда образ гауссовской величины имеет распределение вейбулловского типа — достаточно широкий класс распределений, часто используемый на практике для моделирования финансовых активов. В этом случае при правильной нормировке наблюдается сходимость к нормальному закону. На данный момент получить строгое доказательство в случае произвольного распределения из области притяжения Гумбеля не удалось, однако строгое обоснование предельного поведения законов из §4 может послужить первым шагом в доказательстве, что будет темой дальнейших исследований в данном направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Berman, *Limit theorems for the maximum term in stationary sequences.* — Ann. Math. Statist. **35** (1964), 502–515.
2. Y. Mittal, D. Ylvisaker, *Limit distributions for the maxima of stationary Gaussian processes.* — Stochastic Processes Appl. **3** (1975), 1–18.
3. А. Е. Мазур, *Моделирование и подгонка временных рядов с тяжелыми хвостами распределений и сильной временной зависимостью посредством гауссовских рядов.* — Теория вероятн. и ее примен. **63**, No. 1 (2018), 186–190.
4. А. Е. Мазур, В. И. Питербарг, *Гауссовские копульные временные ряды с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем., мех. No. 5 (2015), 3–7.
5. В. В. Трошин, *Об области максимального притяжения преобразования нормальной случайной величины.* — Фундамент. и прикл. матем. **23**, No. 1 (2020), 207–215.

6. И. А. Алексеев, В. И. Питербарг, А. В. Савич, *Пределная теорема для зависимых гауссовских копул.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **535** (2024), 5–23.
7. Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, М., Наука, 1978.
8. J. Farkas, E. Hashorva, V. I. Piterbarg, *Asymptotic behavior of reliability function for multidimensional aggregated Weibull type reliability indices.* — Lecture Notes Comput. Sci. **10684** (2017), 251–264.
9. P. Soulier, *Some applications of regular variation in probability and statistics.* XXII Escuela VeneZolana de Matematicas (2009).
10. В. А. Ватутин, *Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса.* — Лекционные курсы НОЦ **12** (2009).
11. А. В. Савич, *Пределная теорема для максимумов функций гауссовских процессов с логарифмическим убыванием корреляции.* — Теория вероятн. и ее примен., в печати.
12. В. И. Питербарг, *Двадцать лекций о гауссовских процессах.* 2-е изд., доп., М., МЦНМО, 2015.

Savich A. V. A limit theorem for the maxima of functions of strongly dependent Gaussian random variables.

This paper is devoted to limit theorems for the maxima of functions of dependent Gaussian time series. We investigate the asymptotic behavior of the normalized sequence of maxima in the case when the correlation function of the underlying process decays slower than logarithmically. Under certain natural assumptions on the transform, it is shown that no nontrivial limit distribution exists when the transform of a Gaussian random variable lies in the domain of attraction of the Frechet distribution. Moreover, a limit theorem is obtained for the case when the transform has a Weibull-like distribution.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: alexander.savich17@gmail.com

Поступило 20 сентября 2025 г.