Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

И. А. Рагозин

НОВЫЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО И РЭЛЕЕВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§1. Введение

Целью данной работы является построение и асимптотическое исследование критериев согласия для семейства экспоненциальных распределений и семейства распределений Рэлея с произвольными параметрами сдвига в обоих случаях. Опишем функции распределения и плотности для каждого из семейств:
для экспоненциального распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \quad f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, \ \ \lambda > 0, \ \ x \geqslant 0;$$

для распределения Рэлея

$$F(x) = 1 - \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big), \quad f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big), \ \ \sigma > 0, \quad x \geqslant 0.$$

Экспоненциальное распределение – одно из самых распространенных и популярных распределений, используемых в моделировании реальных процессов, особенно часто применяемых в моделях, связанных с анализом выживаемости, в теории надежности, теории массового обслуживания. По этой причине были разработаны и изучены многочисленные тесты для проверки гипотезы о том, что наблюдаемые данные подчиняются экспоненциальному закону распределения. К ним относятся тесты, основанные на разности характеристических функций, среднем остаточном сроке службы, на энтропии, на отношении правдоподобия, на разности эмпирических преобразований Лапласа [11–13], а также на основе различных характеризаций, представленных, например, в $[2, 5, 7]$.

Ключевые слова: экспоненциальное распределение, U-статистики, распределение Рэлея, бахадуровская эффективность, большие уклонения, информация Кульбака–Лейблера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

Распределение Рэлея наряду с экспоненциальным законом распределения является одним из наиболее изученных частных случаев распределения Вейбулла с параметром формы равным двум, что является следствием связи с экспоненциальным распределением, а именно квадратный корень экспоненциально распределенной случайной величины имеет распределение Рэлея с соответствующим параметром масштаба. Более того, распределение Рэлея с произвольным параметром масштаба Rayleigh(σ), $\sigma > 0$, является распределением длины двумерного нормального вектора, состоящего из независимых случайных величин с нулевым средним и дисперсией равной σ^2 или распределением квадратного корня из распределения χ^2 с двумя степенями свободы, как отмечено в монографии [6]. Чаще всего распределение Рэлея применяется в теории надежности для описания времени безотказной работы системы; в физике – для описания и моделирования длин волн, что связано со связью распределения Рэлея с нормальным распределением; в метеорологии – для моделирования высоты волн и скорости ветров; в медицине – в качестве индикатора эффективности лекарств и для моделирования размера клеток и организмов. Также отметим важную в статистической радиотехнике задачу о различии распределения Рэлея и распределения Райса, что было освещено в монографии [14] и будет рассмотрено в этом исследовании. При всей важности и широкой изученности распределения Рэлея до этого практически не было статей, посвященных асимптотическому исследованию и сравнению критериев согласия для этого семейства распределений. Связано это, скорее всего, с малым количеством известных характеризаций, а также со сложной адаптацией их в качестве основы для построения критериев согласия. Можно отметить статью [1], которая является одной из первых статей, посвященных асимтотическому исследованию критериев согласия для семейства распределений Рэлея.

Теперь перейдем к описанию специальных свойств и построению статистик, на основе разности эмпирических преобразований Лапласа для каждого из рассматриваемых семейств распределений.

Экспоненциальное распределение. Начнем с рассмотрения специального свойства из статьи [19] и построения на его основе эмпирических преобразований Лапласа. Обозначим через Exp(λ) экспоненциальное распределение с математическим ожиданием равным $\frac{1}{\lambda}$.

Пусть X, Y – независимые случайные величины, распределенные по *экспоненциальному закону, тогда их частное имеет распределение* $\mathrm{Fisher}_{(2,2)}$:

$$X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Q = \frac{X}{Y} \Rightarrow F_Q(x) = \mathrm{Fisher}_{(2,2)}(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geqslant 0.$$

При помощи этого свойства можно построить следующие интегральные статистики, основанные на разности соответствующих преобразований Лапласа для разности двух случайных величин и для распределения $\mathrm{Fisher}_{(2,2)}$.

Тесты, основанные на этих свойствах, будут задействованы в следующей задаче.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной непрерывной функцией распределения* F. *Будет проверяться следующая сложная гипотеза согласия*

$$H_0 : F \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

для некоторого неизвестного $\lambda > 0$ *против общих альтернатив.*

Обозначим обычную эмпирическую функцию распределения через $F_n(t)$. Она определяется как

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i < t\}.$$

Рассмотрим преобразование Лапласа для левой части специального свойства:

$$LL(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} e^{-t \cdot \frac{X_i}{X_j}}.$$

Вычислим преобразование Лапласа для плотности распределения $\mathrm{Fisher}_{(2,2)}$, соответствующее правой части специального свойства:

$$RL(t) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot e^{-t \cdot x} dx = 1 + t\, e^t \,\mathrm{Ei}(-t),$$

где $\mathrm{Ei}(\,\cdot\,)$ – интегральная показательная функция, определяемая как $\mathrm{Ei}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{e^x}{x}\, dx$.

Введем следующие тестовые статистики, основанные на разности преобразований Лапласа:

интегральную взвешенную статистику

$$L_n^E(a) = \int_0^\infty (LL(t) - RL(t))\, e^{-a \cdot t}\, dt,$$

и статистику типа Колмогорова

$$KL_n^E = \sup_{t>0} |LL(t) - RL(t)|.$$

Теперь мы опишем альтернативы $f_i(x,\theta)$, $x > 0$, $i = 1, \ldots, 6$, которые мы будем рассматривать против нулевой гипотезы H_0.

1. **Альтернатива Вейбулла** с плотностью

$$f_1(x,\theta) = (1+\theta\,)\, x^\theta e^{-x^{1+\theta}}, \quad \theta \geqslant 0, \quad x \geqslant 0;$$

2. **Альтернатива Макегама** с плотностью

$$f_2(x,\theta) = (1 + \theta(1 - e^{-x}))\, e^{(-x-\theta(e^{-x}-1+x))}, \quad \theta \geqslant 0, \quad x \geqslant 0;$$

3. **Альтернатива линейной интенсивности отказов** с плотностью

$$f_3(x,\theta) = (1+\theta x)\, e^{-x-\frac{\theta x^2}{2}}, \quad \theta \geqslant 0, \quad x \geqslant 0;$$

4. **Гамма-альтернатива** с плотностью

$$f_4(x,\theta) = \frac{x^\theta e^{-x}}{\Gamma(\theta+1)}, \quad \theta \geqslant 0, \quad x \geqslant 0;$$

5. **Альтернатива Верхюльста** с плотностью

$$f_5(x,\theta) = (1+\theta)\, e^{-x}(1 - e^{-x})^\theta, \quad \theta \geqslant 0, \quad x \geqslant 0;$$

6. **Альтернатива экспоненциальной смеси с отрицательным весом** с плотностью

$$f_6(x,\theta) = (1+\theta)\, e^{-x} - \theta\beta e^{-\beta x}, \quad \theta \in [0, \frac{1}{\beta-1}], \quad \beta \geqslant 1, \quad x \geqslant 0.$$

Распределение Рэлея. Введем специальное свойство, которое было рассмотрено в работах [1, 20]:

Пусть X, Y – независимые случайные величины, с распределением Rayleigh(σ), *Тогда их частное имеет распределение, определяемое следующими плотностью и функцией распределения*:

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \geqslant 0.$$

Теперь построим на его основе эмпирическое преобразование Лапласа, которое войдет в основу построения критериев согласия. Подобная идея уже использовалась для построения критериев согласия для семейства распределений Рэлея, например, в статье [9], посвященной эмпирическому исследованию критериев согласия, основанных на разности преобразований Лапласа для оценок, получаемых методом максимального правдоподобия и методом моментов. Однако асимптотического исследования критериев в этой статье не представлено.

Используя специальное свойство для семейства распределений Рэлея, построим следующую интегральную статистику

$$L_n(a) = \int\limits_0^{\infty} (L_1(t) - L_2(t))\, e^{-a\cdot t} dt,$$

где $L_1(t)$ – U-эмпирическое преобразование Лапласа для $\frac{X}{Y}$, определяемое как

$$L_1(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} e^{-t\cdot \frac{X_i}{X_j}}$$

а $L_2(t)$ – преобразование Лапласа для плотности $f(\,\cdot\,)$:

$$L_2(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t\cdot x} f(x)\, dx = 1 - \frac{\pi\,\cdot\, t\,\cdot\, \cos(t)}{2} - t\,\mathrm{Ci}(t)\cdot\sin(t) + t\cos(t)\cdot\mathrm{Si}(t),$$

где $\mathrm{Ci}(\,\cdot\,)$, $\mathrm{Si}(\,\cdot\,)$ – интегральные косинус и синус, определяемые как $\mathrm{Ci}(t) = -\int\limits_t^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}\, dx$, $\mathrm{Si}(t) = \int\limits_0^{t} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

Построенные статики $L_n(\,\cdot\,)$ можно использовать для задачи проверки сложной гипотезы согласия, которую в данном случае можно сформулировать следующим образом:

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные наблюдения с функцией распределения R. Мы будем проверять сложную гипотезу согласия H_0, согласно которой, R – ф.р. рэлеевского закона с плотностью $r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\big)$, $x \geqslant 0$, $\sigma > 0$, против альтернативы H_1, состоящей в том, что гипотеза H_0 не выполняется.
Опишем плотности $f_i(x,\theta)$, $x \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 4$, которые будут рассмотрены как альтернативы к семейству распределений Рэлея.

1. **Альтернатива Вейбулла** с плотностью

$$f_1(x,\theta) = \frac{(1+\theta)}{2^\theta}\, x^{2\theta+1}\, \exp\Big(-\frac{x^{2\,(1+\theta)}}{2^{1+\theta}}\Big);$$

2. **Альтернатива Лемана** с плотностью

$$f_2(x,\theta) = (1+\theta)\, f(x)\, F^\theta(x) = (1+\theta)\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\big(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\big)^\theta;$$

3. **Гамма-альтернатива** с плотностью

$$f_3(x,\theta) = \frac{x^{\theta+1}\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{\theta}{2}}\, \Gamma\big(\frac{\theta}{2}+1\big)};$$

4. **Альтернатива Райса** с плотностью

$$f_4(x,\theta) = x\, \exp\Big(-\frac{(x^2+\theta^2)}{2}\Big)\, I_0(x\cdot\theta),$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого типа порядка 0.

Поскольку распределение частного не зависит от σ, то основанные на этом свойстве критерии согласия подходят для проверки сложной гипотезы согласия о принадлежности семейству распределений Рэлея с произвольным параметром масштаба. Однако, к сожалению, это свойство не является характеризацией, так как, например, следующее семейство плотностей обладает таким же свойством:

$$\frac{\sigma^2}{x^3}\exp\Big(-\frac{\sigma^2}{2x^2}\Big), \quad \sigma > 0, \quad x \geqslant 0.$$

§2. Бахадуровская эффективность

Одна из целей данного исследования – асимптотическое сравнение построенных критериев. Так как статистики типа Колмогорова не являются асимптотически нормальными, то понятие бахадуровской эффективности представляется наиболее удобным для сравнения таких тестовых статистик, поэтому изложим основные факты теории Бахадура [3, 4].

Одним из основных понятий в этой теории является точный бахадуровский наклон, определяемый как положительная и конечная функция, описывающая скорость экспоненциального убывания достигаемого уровня последовательности статистик при альтернативе H_1, равная:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln(L_n(s)) = -\frac{1}{2}c_T(\theta), \quad \text{п.н.} \quad \mathbf{P}_\theta,$$

где величина $L_n(s)$ называется достигаемым уровнем или p-значением и определяется для некоторой статистики $T_n(\,\cdot\,)$ следующим образом:

$$L_n(s) = 1 - \inf_{\theta_0\in\Theta_0}\{G_n(T_n(s))\},$$

где

$$G_n(t) = \mathbf{P}_{\theta_0}(s : T_n(s) < t), \quad \forall\theta_0 \in \Theta_0.$$

Однако вычислить точный наклон по этой формуле невозможно. Это можно сделать с помощью фундаментальной теоремы Бахадура [3, 14], которая утверждает, что точный бахадуровский наклон для последовательности статистик T_n существует и вычисляется следующим образом:

$$c_T(\theta) = 2k(b(\theta)), \quad \forall\theta \in \Theta_1,$$

где функции $k(\,\cdot\,)$, $b(\,\cdot\,)$ и последовательность статистик $\{T_n\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $T_n \to b(\theta)$ по $\mathbf{P}_\theta$-вероятности, $\theta \in \Theta_1$, где $-\infty < b(\theta) < \infty$, и
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\ln\mathbf{P}_\theta(T_n \geqslant a) = -k(a)$ для любого $\theta \in \Theta_0$ и любых a из некоторого открытого интервала I, где функция k непрерывна на I, причем $\{b(\theta),\, \theta \in \Theta_1\} \subset I$.

Для бахадуровского точного наклона выполнено следующее неравенство:

$$c_T(\theta) \leqslant 2K(\theta),$$

где $K(\theta)$ – информация или “расстояние” Кульбака–Лейблера между альтернативой и семейством распределений, удовлетворяющих нулевой гипотезе [3, 14], которую в случае сложной гипотезы H_0 можно определить следующим образом:

$$K(\theta) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{f(x,\theta)}{h(x,t)} f(x,\theta)dx,$$

где $f(x,\theta)$ – плотность, соответствующая альтернативе, а $h(x,t)$ – плотность, удовлетворяющая сложной нулевой гипотезе.

Из сказанного выше следует, что естественным определением локальной бахадуровской эффективности (ЛБЭ) последовательности $\{T_n\}$ служит следующая формула:

$$\mathrm{eff}_T = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_T(\theta)}{2K(\theta)}. \qquad (1)$$

Из результатов, полученных в статьях [17] и [19], при условии регулярности альтернативных плотностей $f(x,\theta)$ можно получить улучшенные формулы для локального бахадуровского наклона, которые можно записать следующим образом.

1. Для интегральной статистики T_n (см. [17]).

$$c_T(\theta) \sim \frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_T(x)\, f'_\theta(x,0)\, dx\right)^2}{\Delta_T^2} \cdot \theta^2 \quad \text{при} \quad \theta \to 0, \qquad (2)$$

где Ψ_T – проекция ядра статистики T_n, а Δ_T^2 – дисперсия проекции.

2. Для статистики типа Колмогорова H_n (см. [19]).

$$c_H(\theta) \sim \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_H(x;t)\, f'_\theta(x,0)\, dx\right)^2}{\Delta_H^2} \cdot \theta^2 \quad \text{при} \quad \theta \to 0, \qquad (3)$$

где Ψ_H и Δ_H^2 определяются аналогично.

Сформулируем полученные условия для справедливости формул (2) и (3), которые следуют из регулярности, но выглядят иначе при $0 < \theta < \delta$:

$$\int\limits_R |f'_\theta(x;\theta)|\, dx < \infty, \quad \int\limits_R |f''_{\theta\theta}(x;\theta)|\, dx < \infty.$$

§3. Информация Кульбака–Лейблера

Экспоненциальное распределение. Для альтернатив к экспоненциальному распределению $f_i(x,\theta)$, $i = 1,\ldots,6$, $x > 0$, введенных на странице 277, справедлива следующая формула для информации Кульбака–Лейблера [15]:

$$2K(\theta) \sim \left(\int\limits_0^\infty e^x f'_\theta(x,0)^2 dx - \left(\int\limits_0^\infty x f'_\theta(x,0)\, dx\right)^2\right) \cdot \theta^2, \quad \theta \to 0.$$

Соберем найденную асимптотику по формуле выше в таблицу 1.

Таблица 1. Информация Кульбака–Лейблера при $\theta \to 0$.

	Альтернативы					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$2K(\theta)$	$\frac{\pi^2\,\theta^2}{6}$	$\frac{\theta^2}{12}$	θ^2	$\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^4}{36}\right)\theta^2$	$\frac{(\beta-1)^4}{\beta^2(2\beta-1)}\cdot\theta^2$

Распределение Рэлея. Теперь вычислим информацию Кульбака–Лейблера для альтернатив $f_i(x,\theta)$, $x \geqslant 0$, $i = 1,\dots,4$, введенных для распределения Рэлея на странице 279. Так как в нашем случае гипотеза H_0 сложная, то для альтернативной плотности $f(x,\theta)$ величина $K(\theta)$ определяется следующим образом:

$$K(\theta) = \inf_{\sigma>0}\int_0^\infty \ln\frac{f(x,\theta)}{r(x,\sigma)}\,f(x,\theta)\,dx,$$

где в нашем случае функция $r(x,\sigma) = \frac{x}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$. Следующая лемма, доказанная в работе [20], позволяет получить асимптотику порядка θ^2 для информации Кульбака–Лейблера.

Для некоторой альтернативной плотности $f(x,\theta)$ при $\theta \to 0$ имеет место следующее выражение для информации Кульбака–Лейблера:

$$2K(\theta) = \theta^2\left(I(0) - \left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 f'_\theta(x,0)\,dx\right)^2\right),$$

где $I(0)$ – информация Фишера.

Заметим, что этой асимптотики порядка θ^2 недостаточно для альтернативы Райса, так как $f'_{4,\theta}(x,0) \equiv 0$. В случае этой альтернативы получено следующее: $K_4(\theta) = \frac{1}{128}\,\theta^8 + o(\theta^8)$. Для остальных альтернатив соберем выражения для информации Кульбака–Лейблера в таблицу ниже:

Таблица 2. Информация Кульбака–Лейблера при $\theta \to 0$.

	f_1	f_2	f_3
$2K(\theta)$	$\frac{\pi^2}{6}\,\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^4}{36}\right)\theta^2$	$\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\theta^2$

§4. Критерии согласия для экспоненциального распределения

Интегральная статистика L_n^E. Статистика $L_n^E(a)$ асимптотически эквивалентна U-статистике степени 2 с центрированным ядром

$$\Phi_L(x,y;a) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{x}{y}} + \frac{1}{a+\frac{y}{x}}\right) - \frac{a-1-\ln(a)}{(a-1)^2}.$$

Найдем проекцию ядра

$$\Psi_L(s;a) = \mathbb{E}\left(\Phi_L(X,Y;a)|Y=s\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+s\,e^{\frac{s}{a}}\mathrm{Ei}(-\frac{s}{a})}{a^2} - s\,e^{as}\mathrm{Ei}(-as)\right) - \frac{a-1-\ln(a)}{(a-1)^2},$$

теперь вычислим дисперсию проекции:

$$\Delta_L^2(a) = \mathbb{E}\left(\Psi_L^2(X;a)\right).$$

В явном виде функция дисперсии не представляется, но возможно найти ее в конкретных точках: $\Delta_L^2(2) = 0.000142572$, $\Delta_L^2(0.5) = 0.00228115$, $\Delta_L^2(3) = 0.000139166$, $\Delta_L^2(4) = 0.000109478$. Следовательно, ядра Φ невырождены. Тогда можно применить теорему Хёфдинга [8].
При $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\,L_n^E(a) \xrightarrow{d} N(0, 4\Delta_L^2(a)).$$

Так как ядро Φ_L не только невырождено и центрировано, но еще и ограничено, то можно применить результат о больших уклонениях U-статистик [16]. Таким образом, получим следующий результат.

Теорема 1. *При $t > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\left(\mathbf{P}(L_n^E > t)\right) = h(t) \sim -\frac{t^2}{4\Delta_L^2},$$

где h – некоторая непрерывная функция, для которой возможно найти асимптотику в нуле.

Теперь можно найти точные бахадуровские наклоны по формуле (2) и затем вычислить локальную бахадуровскую эффективность по формуле (1), значения которой соберем в таблицу ниже.

Отметим, что для первых трех альтернатив максимально достигаемое значение локальной бахадуровской эффективности совпадает со случаем когда $a = 1$. Для последней введенной альтернативы соберем значения эффективностей в таблицу ниже для $b = 2, \ldots, 8$.

Таблица 3. Локальная бахадуровская эффективность.

	Альтернативы				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$a = 1$	0.812	0.56	0.214	0.921	0.936
$a = 2$	0.808	0.548	0.209	0.922	0.938
$a = 3$	0.801	0.531	0.202	0.922	0.94
$a = 4$	0.794	0.515	0.195	0.922	0.941
$a = 5$	0.787	0.500	0.188	0.921	0.941
max	0.812	0.56	0.214	0.9225	0.941
argmax	1	1	1	$\frac{13}{4}$	5

Таблица 4. Локальная бахадуровская эффективность.

	f_6						
	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$	$b = 5$	b=6	b=7	$b = 8$
$a = 1$	0.560	0.761	0.875	0.938	0.972	0.986	0.989
$a = 2$	0.548	0.749	0.864	0.930	0.966	0.984	0.989
$a = 3$	0.531	0.730	0.848	0.917	0.957	0.978	0.987
$a = 4$	0.515	0.712	0.831	0.904	0.947	0.971	0.983

Статистика типа Колмогорова KL_n^E. Статистику KL^E будем рассматривать, как супремум по $t > 0$ модуля семейства U-статистик, образованными соответствующими эмпирическими преобразованиями Лапласа, с центрированными ядрами:

$$\Phi_{KL}(X, Y; t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t\frac{X}{Y}} + e^{-t\frac{Y}{X}}\right) - (1 + te^t \mathrm{Ei}(-t)).$$

Найдем проекцию семейства ядер:

$$\begin{aligned}\Psi_{KL}(s; t) &= \mathbb{E}\left(\Phi_{KL}(X, Y; t)|Y = s\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s+t} + 2\sqrt{st}\, K_1(2\sqrt{st})\right) - (1 + te^t \mathrm{Ei}(-t)),\end{aligned}$$

где $K_1(\,\cdot\,)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода. Отметим также, что $\mathbb{E}\left(\Psi_{KL}(X; t)\right) = 0$.

Введем функцию дисперсии проекции:

$$\Delta^2_{KL}(t) = \mathbb{E}\left(\Psi^2_{KL}(X; t)\right).$$

В явном виде функция дисперсии не представляется, однако возможно вычислить ее супремум, что нам и нужно для применения дальнейших результатов об асимптотике больших уклонений. Супремум функции дисперсии равен приблизительно 0.00507162 и достигается в точке $t_0 = 0.551$. Следовательно ядро Φ_{KL} невырождено. Так как помимо этого оно еще ограничено и центрировано, то можно применить теорему из [18] об асимптотике логарифмической функции больших уклонений U-статистик типа Колмогорова при нулевой гипотезе H_0. Что приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Для некоторого $z > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left\{KL_n^E > z\right\} = w_{KL}(z) \sim -\frac{z^2}{8\Delta_{KL}^2},$$

где w_{KL} – некоторая непрерывная функция в окрестности нуля.

Теперь по формуле (3) можно вычислить локальный бахадуровский наклон, и в соответствии с формулой (1) вычислить локальную бахадуровскую эффективность, значение которой соберем в таблицу 5.

Таблица 5. Локальная бахадуровская эффективность статистик KL^E.

Альтернативы	ЛБЭ	argmax
	eff	t_0
f_1	0.7945	$t_0 \sim 5.032$
f_2	0.5304	$t_0 \sim 4.365$
f_3	0.2018	$t_0 \sim 4.255$
f_4	0.9195	$t_0 \sim 5.43$
f_5	0.9381	$t_0 \sim 5.501$
f_6, b=2	0.5304	$t_0 \sim 4.365$
f_6, b=3	0.7266	$t_0 \sim 4.537$
f_6, b=4	0.8424	$t_0 \sim 4.712$
f_6, b=5	0.9113	$t_0 \sim 4.88$
f_6, b=6	0.9518	$t_0 \sim 5.042$
f_6, b=7	0.9743	$t_0 \sim 5.195$
f_6, b=8	0.9852	$t_0 \sim 5.342$

Отметим, что в случае альтернативы f_6 максимально достигаемая эффективность $= 0.9884$ при $b = 9.037$ и $t_0 = 5.487018$.

Локальная бахадуровская эффектиновсть. Соберем значения локальных бахадуровских эффективностей статистик L_n^E (максимально достигаемое), KL_n^E и статистик W_n, D_n из статьи [19], в которой результаты известны для альтернатив $f_1, f_4, f_5, f_6, b = 3$ в наших обозначениях в таблице 6 ниже.

Таблица 6. Локальная бахадуровская эффективность.

Альтернативы	$\max(L_n^E)$	KL_n^E	W_n	D_n
f_1	0.812	0.795	**0.825**	0.798
f_2	0.56	0.53	–	–
f_3	**0.214**	0.202	–	–
f_4	**0.923**	0.92	0.915	0.875
f_5	**0.941**	0.938	0.927	0.866
f_6, b=3	0.761	0.727	0.800	0.821
f_6, b=4	0.875	0.842	–	–
f_6, b=5	0.938	0.911	–	–
f_6, b=6	**0.972**	0.952	–	–
f_6, b=7	**0.986**	0.974	–	–
f_6, b=8	**0.989**	0.985	–	–

Таким образом, при рассмотрении разности преобразований Лапласа нам удалось улучшить результат для двух альтернатив (f_4, f_5), получив более высокие значения локальной бахадуровской эффективности. Однако, в двух других случаях значения остаются достаточно высокими, но уступают статистикам из статьи [19]. Более того, интегральная взвешенная статистика L^E в большинстве случаев оказывается эффективнее других статистик в бахадуровском смысле. Стоит также отметить необычно высокие значения статистики типа Колмогорова KL^E, которая менее эффективна во всех случаях, чем статистика L^E, что является частым явлением в этой теории. Вдобавок во всех случаях значения локальной бахадуровской эффективности у интегральных статистик выше, чем у критериев типа Колмогорова, основанных на том же свойстве, что является типичным результатом.

§5. Критерии согласия для распределения Рэлея

Статистика L^R. Статистика $L_n^R(a)$ асимптотически эквивалентна U-статистике степени 2 с центрированным ядром

$$\Phi_L(x,y;a) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{x}{y}} + \frac{1}{a+\frac{y}{x}}\right) - \frac{\pi + a(2+2a^2-a\pi+4\ln(a))}{2(1+a^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{x}{y}} + \frac{1}{a+\frac{y}{x}}\right) - CLT(a),$$

где $CLT(a) = \frac{\pi+a(2+2a^2-a\pi+4\ln(a))}{2(1+a^2)^2}$.

Проекция ядра определяется как

$$\Psi_L(t,a) = \mathbb{E}\left(\Phi_L(X,Y;a)|Y=t\right)$$
$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{x}{t}} + \frac{1}{a+\frac{t}{x}}\right) x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx - CLT(a)$$
$$= \left(\frac{a(2a-\sqrt{2\pi}\,t) + t^2\left(2\sqrt{\pi}\,DsF\left(\frac{t}{\sqrt{2}a}\right) - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{Ei}\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)\right)}{4a^3}\right)$$
$$+\frac{1}{4}t\left(\sqrt{2\pi} - 2a\sqrt{\pi}\,t\,DsF\left(\frac{a\,t}{\sqrt{2}}\right) + ae^{-\frac{1}{2}a^2t^2}\,t\,\mathrm{Ei}\left(\frac{a^2\,t^2}{2}\right)\right) - CLT(a),$$

где $DsF(t)$ – функция Доусона, определяемая как

$$DsF(t) = e^{-t^2}\int\limits_0^t e^{-x^2}dx,$$

а $\mathrm{Ei}(\,\cdot\,)$ – интегральная показательная функция. Отметим, что

$$\mathbb{E}\left(\Psi_L(X,a)\right) = 0.$$

Дисперсия проекции определяется как $\Delta_L^2(a) = \mathbb{E}\left(\Psi_L^2(X,a)\right)$, однако выразить ее в терминах математических функций не представляется возможным, при этом найти ее значения для конкретного параметра a можно, например, $\Delta_L^2(2) \approx 0.00005638$ и $\Delta_L^2(3) \approx 0.00004944$. Следовательно, ядро Φ_L – невырожденное, и согласно теореме Хёфдинга *при* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\,\cdot\, L_n(a) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 4\Delta_L^2(a)\right).$$

Ядро Φ_L – невырожденное, центрированное и ограниченное, поэтому мы можем описать логарифмические большие уклонения U-статистик с такими ядрами с помощью [16].

Теорема 3. *При* $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}(L_n^R(a) > t) = h_L(t),$$

где h_L *– некоторая непрерывная функция в окрестности нуля*

$$h_L(t) \sim -\frac{t^2}{8\Delta_L^2(a)} \quad \text{при } t \to 0.$$

Локальная бахадуровская эффективность. Соберем все полученные локальные бахадуровские эффективности для тестовых статистик в таблицу ниже. В таблице 7 также добавим значения локальной бахадуровской эффективности для интегральной статистики и статистики типа Колмогорова из статьи [20]. Статистики с индексом 1 основаны на характеризации Дезу для семейства распределений Рэлея, а с индексом 2 – соответственно на специальном свойстве, где под $IU_{2,\sigma}^R$ приведены максимально достигаемые значения бахадуровской эффективности.

Таблица 7. Локальная бахадуровская эффективность тестовых статистик.

	Альтернативы			
	f_1	f_2	f_3	f_4
IU_1^R	0.697	0.807	0.198	0.149
IU_2^R	0.802	0.805	0.202	0.288
$IU_{2,\sigma}^R$	**0.825**	**0.938**	0.23	0.314
KU_1^R	0.158	0.194	0.043	**0.697**
KU_2^R	0.798	0.886	**0.875**	0.243
$L^R(1)$	0.735	0.935	0.227	0.151
$L^R(2)$	0.725	0.931	0.226	0.146
$L^R(3)$	0.711	0.923	0.224	0.139

Вычисление мощностей на основе статистического моделирования. В качестве альтернативных распределений, на основе моделирования которых будет вычислена мощность, рассмотрим распределения из статьи [9] и альтернативу Райса для статистик

$$KU^R, \quad IU^R(\sigma), \quad \sigma = 1, 2, 4, 8, \ \text{ и } \ L^R(a), \quad a = 1, 2, 5,$$

при объеме выборки n=20 для трех уровней значимости $\alpha = 0.1$, 0.05 и 0.01.

Для удобства введем аббревиатуры, обозначающие альтернативные распределения, каждое из которых сосредоточено на положительной полуоси:

- распределение Вейбулла $W(\theta)$ с плотностью $\theta x^{\theta-1}\exp(-x^\theta)$;
- гамма-распределение $\Gamma(\theta)$ с плотностью $\Gamma(\theta)^{-1}x^{\theta-1}\exp(-x)$;
- обратное гауссово распределение $IG(a,\theta)$ с плотностью $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\theta\,(x-a)^2}{2\,a^2\,x}\right)$;
- логнормальное распределение $LN(\theta)$ с плотностью $(\theta x)^{-1}(2\pi)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\log^2 x}{2\theta^2}\right)$;
- распределение Гомперца $GO(\theta)$ с функцией распределения $1-\exp[\theta^{-1}(1-e^{-\theta x})]$;
- степенное распределение $PW(\theta)$ с плотностью

$$\theta^{-1}x^{\theta^{-1}-1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

- закон линейно возрастающей интенсивности отказов $LF(\theta)$ с плотностью $(1+\theta x)\exp(-x-\theta x^2/2)$;
- экспоненциально-степенное распределение $EP(\theta)$ с функцией распределения $1-\exp[1-\exp(x^\theta)]$;
- Пуассон-экспоненциальное распределение $PE(\theta)$, являющееся распределением суммы $E_1+\cdots+E_N$, где $N, E_1, E_2, \ldots$ независимы, N имеет распределение Пуассона с $\mathbb{E}[N]=\theta$, а для $j \geqslant 1$ величина E_j имеет экспоненциальное распределение с параметром 1;

- распределение Райса $RL(\theta)$ с плотностью

$$x \exp\left(-\frac{x^2+\theta^2}{2}\right) I_0(x \cdot \theta)\,.$$

Эти распределения представляют собой широко используемые модели в теории надежности и анализе срока службы, где распределение Рэлея встречается наиболее часто, и включают плотности f с возрастающими и убывающими интенсивностями отказов $f(x)/(1-F(x))$, а также модели с U-образными и инвертированными U-образными функциями интенсивности отказов.

Таблица 8. Мощности для статистик $IU^R(\cdot)$, KU^R и $L(\cdot)$ для уровня значимости $\alpha = 0.1$.

Альтернатива	IU^R $\sigma=1$	IU^R $\sigma=2$	IU^R $\sigma=4$	IU^R $\sigma=8$	KU^R	L a=1	L a=2	L a=5
Exp	94	96	96	94	96	96	96	95
W(2)	10	10	10	10	10	10	10	10
W(3)	60	62	57	51	64	59	58	58
G(1.5)	73	75	73	63	71	71	71	68
G(2)	44	43	38	28	27	36	36	32
IG(1,0.5)	94	95	94	87	94	93	93	91
IG(1,1)	70	66	60	40	62	55	54	48
IG(1,1.5)	38	30	23	9	27	18	18	13
IG(2,0.5)	99	99	99	98	99	99	99	99
IG(2,1)	94	95	94	89	94	93	93	91
IG(2,1.5)	85	84	81	66	80	78	76	73
LN(0.8)	57	52	45	28	47	40	39	34
LN(1.2)	97	98	98	96	97	97	98	97
LN(1.5)	*	*	*	*	*	*	*	*
GO(0.5)	80	85	85	82	83	85	85	84
GO(1)	62	71	73	71	69	74	74	73
GO(1.5)	48	59	62	62	56	64	64	64
PL(1)	27	43	52	57	49	55	56	57
PL(1.5)	77	91	93	94	91	94	95	94
PL(2)	95	99	99	99	99	99	99	99
LFL(1)	76	82	82	78	78	82	82	80
LFL(2)	64	71	72	68	67	72	72	71
LFL(3)	56	64	65	62	60	66	65	66
LFL(4)	50	58	59	57	54	61	61	60
EP(0.5)	*	*	*	*	*	*	*	*
EP(1)	62	71	73	71	68	74	74	74
EP(2)	34	30	26	24	34	27	27	26
EP(3)	92	90	81	71	92	83	83	82
PE(1)	92	95	95	92	93	94	94	93
PE(2)	85	89	88	84	86	88	87	86
PE(3)	68	73	73	68	69	73	73	71
PE(4)	46	51	51	47	45	52	51	50
RL(2)	40	38	35	31	42	36	36	35
RL(3)	91	91	86	78	92	87	87	86
RL(4)	*	*	99	97	*	*	99	99

Таблица 9. Мощности для статистик $IU^R(\cdot)$, KU^R и $L(\cdot)$ для уровня значимости $\alpha = 0.05$

Альтернатива	IU^R $\sigma=1$	IU^R $\sigma=2$	IU^R $\sigma=4$	IU^R $\sigma=8$	KU^R	L $a=1$	L $a=2$	L $a=5$
Exp	91	94	93	90	92	93	93	92
W(2)	5	5	5	5	5	5	5	5
W(3)	46	48	44	39	51	46	44	45
G(1.5)	64	66	63	51	59	60	60	57
G(2)	33	31	27	18	25	25	25	21
IG(1,0.5)	91	92	90	81	89	88	88	85
IG(1,1)	60	54	47	26	47	41	40	34
IG(1,1.5)	26	19	13	4	16	9	9	6
IG(2,0.5)	98	99	99	97	98	98	98	98
IG(2,1)	91	92	90	81	90	88	88	85
IG(2,1.5)	77	76	71	52	70	66	65	60
LN(0.8)	45	40	33	17	33	27	27	22
LN(1.2)	96	97	96	92	95	95	95	94
LN(1.5)	99	*	*	99	*	*	*	*
GO(0.5)	72	79	79	74	74	78	78	77
GO(1)	52	62	64	61	57	65	65	64
GO(1.5)	38	49	52	52	44	54	55	54
PL(1)	18	33	41	47	37	45	46	47
PL(1.5)	70	86	90	90	86	91	92	91
PL(2)	92	98	99	99	98	99	99	99
LFL(1)	67	74	74	69	68	75	74	73
LFL(2)	54	62	62	58	56	63	63	62
LFL(3)	46	53	54	51	47	56	55	55
LFL(4)	40	48	49	47	42	51	51	50
EP(0.5)	99	*	*	*	*	*	*	*
EP(1)	52	62	64	61	57	65	66	65
EP(2)	23	20	17	16	25	18	18	18
EP(3)	85	83	72	62	86	75	74	73
PE(1)	88	92	91	87	88	91	91	89
PE(2)	78	83	82	76	78	82	82	80
PE(3)	58	64	64	58	58	63	64	62
PE(4)	36	40	40	36	33	41	41	40
RL(2)	27	26	24	22	31	25	25	24
RL(3)	83	83	78	69	86	79	79	78
RL(4)	*	*	98	95	*	99	99	99

Таблица 10. Мощности для статистик $IU^R(\cdot)$, KU^R и $L(\cdot)$ для уровня значимости $\alpha = 0.01$

Альтернатива	IU^R $\sigma = 1$	IU^R $\sigma = 2$	IU^R $\sigma = 4$	IU^R $\sigma = 8$	KU^R	L $a = 1$	L $a = 2$	L $a = 5$
Exp	81	87	85	78	80	84	87	81
W(2)	1	1	1	1	1	1	1	1
W(3)	22	22	21	18	28	22	20	21
G(1.5)	44	45	42	30	33	38	38	34
G(2)	16	14	12	6	8	9	10	8
IG(1,0.5)	80	81	77	62	72	72	72	66
IG(1,1)	38	30	24	9	20	17	17	12
IG(1,1.5)	10	6	3	1	3	2	1	1
IG(2,0.5)	94	96	96	92	93	95	95	93
IG(2,1)	80	81	77	61	73	72	71	66
IG(2,1.5)	59	54	48	28	43	41	39	33
LN(0.8)	25	19	14	5	12	10	10	6
LN(1.2)	89	91	90	81	86	87	87	84
LN(1.5)	98	99	99	98	98	99	99	98
GO(0.5)	52	63	62	56	51	62	62	60
GO(1)	32	43	44	42	35	46	47	45
GO(1.5)	20	30	33	33	23	34	36	36
PL(1)	8	18	24	29	18	27	29	29
PL(1.5)	53	75	80	81	71	83	83	83
PL(2)	84	95	97	97	94	97	98	97
LFL(1)	47	57	56	51	45	57	56	54
LFL(2)	33	43	43	39	32	43	44	42
LFL(3)	26	34	35	33	25	36	36	36
LFL(4)	22	29	29	28	21	31	32	31
EP(0.5)	98	*	*	99	99	*	*	*
EP(1)	32	42	44	42	34	46	47	46
EP(2)	8	8	6	6	11	7	7	7
EP(3)	62	61	50	43	68	53	53	52
PE(1)	77	82	81	73	73	80	80	77
PE(2)	62	68	66	59	57	66	66	63
PE(3)	40	45	44	38	33	44	44	42
PE(4)	19	23	22	19	15	23	23	22
RL(2)	10	10	10	8	14	10	10	9
RL(3)	59	59	55	48	67	57	56	56
RL(4)	96	96	93	87	98	94	94	94

Список литературы

1. И. А. Рагозин, *Новые критерии согласия для семейства распределений Рэлея, основанные на некотором специальном свойстве и некоторой характеризации.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 230–243.
2. M. Ahsanullah, *Characterizations of Univariate Continuous Distributions*, Atlantis Press, 2017.
3. R. R. Bahadur, *Some Limit Theorems in Statistics*, Philadelphia, SIAM, 1971.
4. R. R. Bahadur, *Stochastic comparison of tests.* — Ann. Math. Statist. **31** (1960), 276–295.
5. J. Galambos, S. Kotz, *Characterizations of Probability Distributions*, New York, Springer, 1978.
6. N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions.* Vol. 1, 2nd Edition, New York, Wiley, 1994.
7. A. M. Kagan, Y. V. Linnik, C. R. Rao, *Characterization Problems in Mathematical Statistics*, New York, Wiley, 1973.
8. V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskikh, *Theory of U-statistics,* Dordrecht, Kluwer, 1994.
9. S. Meintanis, G. Iliopoulos, *Tests of fit for the Rayleigh distribution based on the empirical Laplace transform.* — Ann. Inst. Statist. Math., **55** (2003), 137–151.
10. B. Milošević, M. Obradović, *New class of exponentiality tests based on U-empirical Laplace transform.* — Statist. Papers **57**, No. 4 (2016), 977–990.
11. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović, *New L^2-type exponentiality tests.* — Statist. Oper. Research Trans. **43**, No. 1 (2019), 25–50.
12. M. Jiménez-Gamero, B. Milošević, M. Obradović, *Exponentiality tests based on Basu characterization.* — Statistics **54**, No. 4 (2020), 714–736.
13. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović, *New consistent exponentiality tests based on V-empirical Laplace transforms with comparison of efficiencies.* — Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas, **116**, No. 1 (2022), article №42.
14. Ya. Nikitin, *Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests*, New York, Cambridge University Press, 1995.
15. Ya. Yu. Nikitin, A. V. Tchirina, *Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic.* — J. Ital. Stat. Soc. **5**, No. 1 (1996), 163–175.
16. Ya. Yu. Nikitin, E. V. Ponikarov, *Rough large deviation asymptotics of Chernoff type for von Mises functionals and U-statistics.* — Proc. St. Petersburg Math. Soc. **7** (1999), 124–167.
17. Ya. Yu. Nikitin, I. Peaucelle, *Efficiency and local optimality of distribution-free tests based on U- and V- statistics.* — Metron **62**, No. 2 (2004), 185–200.
18. Ya. Yu. Nikitin, *Large deviations of U-empirical Kolmogorov–Smirnov tests, and their efficiency.* — J. Nonpar. Statist. **22**, No. 5 (2010), 649–668.
19. Ya. Yu. Nikitin, K. Yu. Volkova, *Efficiency of exponentiality tests based on a special property of exponential distribution.* — Math. Meth. Statist. **25**, No. 1 (2016), 54–66.
20. I. A. Ragozin, *New goodness-of-fit tests for family of Rayleigh Distributions, based on a special property and a characterization.* — J. Math. Sci. **281**, No. 1 (2024).

Ragozin I. A. New goodness-of-fit tests for the exponential and Rayleigh distributions.

In this paper, new goodness-of-fit tests are developed for the family of exponential distributions and for the Rayleigh distribution family with an arbitrary scale parameter, based on the difference of empirical Laplace transforms of a certain special property. Their limiting distributions and large deviation probabilities are described, the local Bahadur efficiency for natural alternatives is calculated, and an asymptotic comparison of the tests is performed. For the Rayleigh distribution family, the constructed test statistics are simulated, and their power is evaluated through statistical modeling for close alternative distributions.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7-9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ragza34@gmail.com

Поступило 17 октября 2025 г.