

М. В. Платонова

**О ВЕРОЯТНОСТНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО
УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО
ПОРЯДКА И ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см. [13], с. 489), что решение задачи Коши для эволюционного уравнения, содержащего дифференциальный оператор второго порядка в правой части,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c^2(x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

где $c(x)$ и $a(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, которые имеют непрерывные ограниченные производные до второго порядка, и $c(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$, может быть представлено в виде

$$u(t, x) = \mathbf{E} \varphi(\xi_x(t)). \quad (1)$$

Здесь $\xi_x(t)$ – диффузионный процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_x(t) = c(\xi_x(t)) dw(t) + a(\xi_x(t)) dt,$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого четного порядка $m \geq 4$ в правой части

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (2)$$

где

$$\mathcal{L} = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{c^m(x)}{m!} \frac{d^m}{dx^m}.$$

Ключевые слова: эволюционное уравнение, задача Коши, предельная теорема.
Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

Предположим, что функция $c(x)$ непрерывна и выполнено

$$0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2 < \infty, \quad (3)$$

а начальная функция $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$.

Аналогичное (1) представление решения задачи Коши (2) написать невозможно, так как нетрудно показать, что если для решения эволюционного уравнения справедливо представление (1) с некоторым случайным процессом, то генератор $\mathcal{L}$ соответствующей полугруппы должен удовлетворять принципу максимума. То есть, если функция φ достигает в точке x_0 абсолютного максимума, то необходимо $\mathcal{L}\varphi(x_0) \leq 0$. Операторы дифференцирования порядка больше двух этому условию очевидным образом не удовлетворяют.

Различные попытки получения интегральных представлений решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором дифференцирования порядка больше двух предпринимались многими авторами. Первые результаты в этой области были получены Ю. Л. Далецким [2, 9] и В. Ю. Крыловым [4], и в дальнейшем предложенный ими подход был развит Т. Фунаки [3], А. Лашалем [5], С. Маццукки [6], Э. Орсингером [7], С. Чжао [8] и другими. Соответствующие интегральные представления были построены в виде интеграла по траекториям так называемого псевдо-процесса. Ю. Л. Далецким было показано, что в случае $m > 2$ псевдо-процесс порождает в пространстве траекторий только конечно-аддитивную меру на алгебре цилиндрических множеств, которая не продолжается на сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами [2]. Соответственно, построенные на основе теории псевдо-процессов представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений не являются в обычном смысле интегральными представлениями.

Другой подход был предложен в работе [12] в случае, когда $c(x) = 1$. Данный подход основан на регуляризации распределений стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере и хорошо показал себя в случае, когда порядок дифференциального оператора $m = 4k + 2$. В случае $m = 4k$ применение этого метода привело к появлению обобщенных функций со сверхэкспоненциально растущим преобразованием Фурье, поэтому в этом случае также пришлось привлекать некоторые идеи из комплексного анализа. Именно, используя проекторы Рисса, начальную функцию представляли в виде суммы

двух функций, одна из которых продолжалась аналитически в верхнюю полуплоскость, а другая — в нижнюю. Вместо одного вещественного процесса в работе использовались два независимых комплексных процесса со значениями в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Этот новый прием позволил избежать появления быстро растущих преобразований Фурье. В результате были построены два типа вероятностных аппроксимаций решения задачи Коши с использованием средних значений функционалов от пуассоновского точечного поля или средних значений функционалов от сумм независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с конечным моментом порядка $m + 1$, и получена скорость сходимости данных аппроксимаций к точному решению задачи Коши.

В настоящей работе мы обобщим предложенный подход на случай, когда в правой части эволюционного уравнения содержится оператор $\mathcal{L} = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \frac{c^m(x)}{m!} \frac{d^m}{dx^m}$. Мы также будем использовать некоторые идеи из [10].

§2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Положим

$$\sigma = \begin{cases} 1, & m = 4l + 2, \\ e^{\frac{i\pi}{m}}, & m = 4l. \end{cases}$$

Заметим, что $\sigma^m = 1$ при $m = 4l + 2$ и $\sigma^m = -1$ при $m = 4l$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma^m c^m(x)}{m!} \frac{d^m}{dx^m}.$$

Через $C_b^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых ограниченных функций с непрерывными ограниченными производными до порядка k включительно.

Для $M > 0$ через $PW_M(\mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R})$ обозначим пространство Пэли–Винера, состоящее из функций класса $L_2(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которых принимает значение 0 вне интервала $[-M, M]$ (подробнее см. [1], с. 43). Для $M > 0$ через P_M будем обозначать проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Пэли–Винера. Напомним, что для $f \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо

$$P_M f = f * D_M,$$

где D_M – ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{\sin Mx}{\pi x}.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных ограниченных случайных величин с симметричным распределением $\mathcal{P}$. Предположим, что

$$\mathbf{E} \xi_1^m = \int_{-\infty}^{\infty} y^m d\mathcal{P}(y) = 1.$$

Через $\eta_n(t)$ обозначим независимый от $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ пуассоновский процесс с параметром n . Напомним, что траектории процесса Пуассона являются кусочно-постоянными, непрерывными справа, неубывающими функциями со скачками, равными единице почти наверное, а времена между скачками являются независимыми случайными величинами и имеют экспоненциальное распределение с параметром n . Через $t_1, t_2, \dots, t_j$ обозначим моменты скачков процесса $\eta_n(t)$ до момента времени t .

Определим процесс $\zeta_n^x(t)$ следующим образом:

$$\zeta_n^x(t) = \begin{cases} x, & t \in [0, t_1), \\ x + \sigma c(x) \frac{\xi_1}{n^{1/m}}, & t \in [t_1, t_2), \\ \zeta_n^x(t_2-) + \sigma c(\zeta_n^x(t_2-)) \frac{\xi_2}{n^{1/m}}, & t \in [t_2, t_3), \\ \dots \\ \zeta_n^x(t_j-) + \sigma c(\zeta_n^x(t_j-)) \frac{\xi_j}{n^{1/m}}, & t \in [t_j, t_{j+1}). \end{cases}$$

Заметим, что траектории построенного процесса $\zeta_n^x(t)$ являются кусочно-постоянными, непрерывными справа функциями со скачками

$$\sigma c(\zeta_n^x(t_j-)) \frac{\xi_j}{n^{1/m}}$$

в моменты времени скачков пуассоновского процесса $\eta_n(t)$.

Для удобства введем две вспомогательные последовательности $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$. Положим

$$\begin{aligned} y_0 &= x, \\ y_1 &= x + \sigma c(x)x_1 = y_0 + \sigma c(y_0)x_1, \\ &\dots \\ y_j &= y_{j-1} + \sigma c(y_{j-1})x_j. \end{aligned} \tag{4}$$

Определим оператор регуляризации R , полагая для $\varphi \in C_b^m(\mathbf{R})$

$$R\varphi(y) = \varphi(y) - \sum_{j=1}^{m-1} \varphi^{(j)}(0) \frac{y^j}{j!}.$$

Для каждого фиксированного $M > 0$ построим последовательность функций $\{\mathcal{R}_j f_j\}_{j=0}^\infty$, $\mathcal{R}_j f_j = [\mathcal{R}_j f_j](x, x_1, \dots, x_j)$. Данная последовательность функций зависит также от переменной M , но для упрощения обозначений мы опустим этот индекс в обозначениях. Пусть

$$f_j = f_j(x, x_1, \dots, x_j) = \varphi(y_j), \quad (5)$$

где y_j определено формулой (4). Сначала свернем функцию $\varphi(y_j)$ с ядром Дирихле D_M по переменной y_j . Далее выразим y_j как $y_{j-1} + z$ и подействуем оператором регуляризации R по переменной z , после чего подставим вместо $z = \sigma c(y_{j-1})x_j$. Полученная функция зависит от переменных y_{j-1}, x_j . На следующем шаге мы свернем полученную функцию с ядром Дирихле D_M по переменной y_{j-1} . Далее выразим y_{j-1} как $y_{j-2} + z$ и подействуем оператором регуляризации R по переменной z , после чего подставим вместо $z = \sigma c(y_{j-2})x_{j-1}$. Полученная функция зависит теперь от переменных y_{j-2}, x_{j-1}, x_j . Далее повторяем то же самое, пока не получим функцию, зависящую от переменных $y_1, x_2, \dots, x_j$. На последнем шаге свернем полученную функцию с ядром Дирихле D_M по переменной y_1 . Далее выразим y_1 как $x + z$ и подействуем оператором регуляризации R по переменной z , после чего подставим вместо $z = \sigma c(x)x_1$. Наконец, свернем полученную функцию с ядром Дирихле D_M по переменной x .

Описанную процедуру можно записать в виде последовательного применения нескольких операторов. Именно для любого $j = 1, 2, \dots$ справедливо

$$[\mathcal{R}_j f_j](x, x_1, \dots, x_j) = [P_M^x G^1 P_M^{y_1} \dots P_M^{y_{j-1}} G^j P_M^{y_j} \varphi](x, x_1, \dots, x_j),$$

где набор операторов G^l , $l = 1, \dots, j$, определяется следующим образом: для достаточно гладкой функции (по первому аргументу) $\psi(y_l, x_{l+1}, \dots, x_j)$ положим

$$[G^l \psi](y_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \dots, x_j) = R^z \psi(y_{l-1} + z, x_{l+1}, \dots, x_j) \Big|_{z=\sigma c(y_{l-1})x_l}.$$

Верхний индекс z у операторов P_M^z и R^z означает действие этих операторов по переменной z .

Лемма 2.1. Последовательность функций $\{\mathcal{R}_j f_j\}_{j=0}^{\infty}$ при любом фиксированном x удовлетворяет условию согласования

$$[\mathcal{R}_j f_j](x, x_1, \dots, x_{j-1}, 0) = [\mathcal{R}_{j-1} f_{j-1}](x, x_1, \dots, x_{j-1}).$$

Доказательство. Положим $x_j = 0$. Тогда $y_j = y_{j-1}$ и

$$[G^j P_M^{y_j} \varphi](y_{j-1}, 0) = [P_M^{y_j} \varphi](y_{j-1}),$$

а дальше мы снова применяем оператор P_M по переменной y_{j-1} . Но оператор P_M – это проектор, поэтому $(P_M)^2$ – это тождественный оператор. $\square$

Пусть процесс $\zeta_n^x(t)$ имеет j скачков до момента времени t . Для $\varphi \in PW_M(\mathbf{R})$ определим

$$[\mathcal{R} \varphi](\zeta_n^x(t)) = [\mathcal{R}_j f_j]\left(x, \frac{\xi_1}{n^{1/m}}, \dots, \frac{\xi_j}{n^{1/m}}\right),$$

где f_j определяется в (5).

Далее определим оператор $P_{n,M}^t$, полагая для $\varphi \in PW_M(\mathbf{R})$

$$P_{n,M}^t \varphi(x) = \mathbf{E} [\mathcal{R} \varphi](\zeta_n^x(t)).$$

Через $\mathcal{L}_n$ обозначим оператор, который на функцию $\psi \in \mathbf{C}_b^m(\mathbf{R})$ действует следующим образом:

$$\mathcal{L}_n \psi(x) = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi\left(x + \frac{\sigma c(x)y}{n^{1/m}}\right) - \psi(x) - \sum_{j=1}^{m-1} \psi^{(j)}(x) \frac{\sigma^j c^j(x) y^j}{j! n^{j/m}} \right) d\mathcal{P}(y).$$

Лемма 2.2. Операторы $P_{n,M}^t$ образуют однопараметрическую полуруппу на $PW_M(\mathbf{R})$

$$P_{n,M}^{t+s} = P_{n,M}^t P_{n,M}^s$$

с генератором $P_M \mathcal{L}_n P_M$.

Доказательство. Пусть до момента времени t у процесса $\eta_n(t)$ произошло j скачков, а между моментами времени t и $t+s$ произошло l скачков.

Заметим, что по построению

$$\begin{aligned} & [\mathcal{R}_{j+l} f_{j+l}](x, x_1, \dots, x_{j+l}) \\ &= [P_M^x G^1 P_M^{y_1} \dots P_M^{y_{j+l-1}} G^{j+l} P_M^{y_{j+l}} \varphi](x, x_1, \dots, x_{j+l}) \\ &= [P_M^x G^1 P_M^{y_1} \dots P_M^{y_j} G^j P_M^{y_j} \psi](x, x_1, \dots, x_{j+l}), \end{aligned}$$

где $\psi(y_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l}) = [\mathcal{R}_l f_l](y_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+l})$. Отсюда следует, что

$$[\mathcal{R}_{j+l} f_{j+l}](x, x_1, \dots, x_{j+l}) = [\mathcal{R}_j [\mathcal{R}_l f_l]](x, x_1, \dots, x_{j+l}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{n,M}^{t+s} \varphi(x) &= \mathbf{E} [\mathcal{R} \varphi](\zeta_n^x(t+s)) = \mathbf{E} \left([\mathcal{R}_{j+l} f_{j+l}](x, \frac{\xi_1}{n^{1/m}}, \dots, \frac{\xi_{j+l}}{n^{1/m}}) \right) \\ &= \mathbf{E} \left([\mathcal{R}_j [\mathcal{R}_l f_l]](x, \frac{\xi_1}{n^{1/m}}, \dots, \frac{\xi_{j+l}}{n^{1/m}}) \right) = P_{n,M}^t P_{n,M}^s \varphi(x), \end{aligned}$$

так как случайные величины $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ независимы в совокупности.

Далее вычислим генератор $P_{n,M}^t$. Пусть $\psi \in PW_M(\mathbf{R})$. При $t \rightarrow 0$ выполнено

$$\begin{aligned} P_{n,M}^t \psi(x) &= e^{-nt} \psi(x) + nt e^{-nt} \mathbf{E} \left([P_M^x G^1 P_M^{y_1} \psi](x, \frac{\xi_1}{n^{1/m}}) \right) + o(t) \\ &= \psi(x) + t P_M \mathcal{L}_n P_M \psi(x) + o(t), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{L}_n \psi(x) = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi(x + \frac{\sigma c(x)y}{n^{1/m}}) - \psi(x) - \sum_{j=1}^{m-1} \psi^{(j)}(x) \frac{\sigma^j c^j(x) y^j}{j! n^{j/m}} \right) d\mathcal{P}(y). \quad \square$$

Заметим, что из леммы 2.2 следует, что для $M > 0$ и $\varphi \in PW_M(\mathbf{R})$ функция $u_{n,M}(t, x) = P_{n,M}^t \varphi(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P_M \mathcal{L}_n P_M u, \quad u(0, x) = \varphi(x). \quad (6)$$

Рассмотрим пространство $L_2(\mathbf{R}, w)$ с весовым скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(\mathbf{R}, w)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx,$$

где

$$w(x) = \frac{m!}{c^m(x)}.$$

Так как $0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2 < \infty$, то существуют такие положительные числа γ_1, γ_2 , что норма в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ и “весовая” норма в пространстве $L_2(\mathbf{R}, w)$ эквивалентны друг другу:

$$\gamma_1 \|u\|_{L_2(\mathbf{R})} \leq \|u\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} \leq \gamma_2 \|u\|_{L_2(\mathbf{R})}. \quad (7)$$

Для существования решения (2) нам достаточно предположения непрерывности функции $c(x)$ и выполнения условия (3). Тем не менее, для получения скорости сходимости допредельного выражения к точному решению нам потребуется дополнительное предположение о гладкости функции $c(x)$. Далее мы будем предполагать, что для некоторого $k \geq 2$ выполнено условие

$$c(x) \in C_b^{m(k-1)}(\mathbf{R}). \quad (8)$$

Лемма 2.3. Пусть непрерывная функция $c(x)$ удовлетворяет условиям (3) и (8). Тогда справедливо

$$\sup_{t \geq 0} \|e^{t\mathcal{L}}\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R}) \rightarrow W_2^{mk}(\mathbf{R})} < \infty.$$

Доказательство. Заметим, что для любой функции $\varphi \in W_2^{m/2}(\mathbf{R})$ справедливо

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\varphi, \varphi)_{L_2(\mathbf{R}, w)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^m c^m(x)}{m!} \varphi^{(m)}(x) \overline{\varphi(x)} w(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(m/2)}(x)|^2 dx = (\varphi, \mathcal{L}\varphi)_{L_2(\mathbf{R}, w)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор $\mathcal{L}$ может быть продолжен до самосопряженного неположительного оператора в пространстве $L_2(\mathbf{R}, w)$. Тогда для $t \geq 0$

$$\|e^{t\mathcal{L}}f\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbf{R}, w)},$$

а значит

$$\|e^{t\mathcal{L}}\|_{L_2(\mathbf{R}) \rightarrow L_2(\mathbf{R})} \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

где γ_1, γ_2 определены в (7).

Так как операторы $\mathcal{L}$ и $e^{t\mathcal{L}}$ коммутируют, то для любой функции $f \in W_2^{mk}(\mathbf{R})$ имеем

$$\|\mathcal{L}^k e^{t\mathcal{L}}f\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} = \|e^{t\mathcal{L}}\mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} \leq \|\mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} \leq \gamma_2 \|\mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R})}.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{mk}(\mathbf{R})$ выполнено

$$|e^{t\mathcal{L}}f|^2 \leq C|f|^2,$$

где норма

$$|f|^2 = \|f\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 + \|\mathcal{L}^k f\|_{L_2(\mathbf{R})}^2$$

эквивалентна стандартной норме в классе Соболева (см. [14, с. 190]). $\square$

Лемма 2.4. Пусть непрерывная функция $c(x)$ удовлетворяет условиям (3) и (8). Тогда справедливо

$$\|\mathcal{L} - P_M \mathcal{L}_n P_M\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R}) \rightarrow L_2(\mathbf{R})} \leq \frac{C}{n^{2/m}} \exp\left(\frac{CM}{n^{1/m}}\right) + \frac{C}{M^{m(k-1)}}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in W_2^{mk}(\mathbf{R})$, $m \geq 2$. Представим

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L}_n P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ &= \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M + P_M \mathcal{L} P_M - P_M \mathcal{L}_n P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ &\leq \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} + \|(P_M \mathcal{L} P_M - P_M \mathcal{L}_n P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого справедливо

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ &\leq \|(\mathcal{L} - P_M \mathcal{L})\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} + \|(P_M \mathcal{L} - P_M \mathcal{L} P_M)\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ &\leq \frac{\|\mathcal{L}\varphi\|_{W_2^{m(k-1)}(\mathbf{R})}}{M^{m(k-1)}} + C\|(I - P_M)\varphi\|_{W_2^m(\mathbf{R})} \\ &\leq \frac{C\|\varphi\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R})}}{M^{m(k-1)}}. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in W_2^{mk}(\mathbf{R})$, $k \geq 2$. Обозначим $\varphi_M(x) = P_M \varphi(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n P_M \varphi(x) &= n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi_M\left(x + \frac{\sigma c(x)y}{n^{1/m}}\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_M^{(j)}(x) \frac{\sigma^j c^j(x) y^j}{j! n^{j/m}} \right) d\mathcal{P}(y) \\ &= n \sum_{j=m}^{\infty} \varphi_M^{(j)}(x) \frac{\sigma^j c^j(x)}{j! n^{j/m}} \int_{-\infty}^{\infty} y^j d\mathcal{P}(y). \end{aligned}$$

Из симметричности распределения $\mathcal{P}$ и условия $\int_{-\infty}^{\infty} y^m d\mathcal{P}(y) = 1$ следует, что

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M \varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} &= \left\| n \sum_{j=m+2}^{\infty} \varphi_M^{(j)}(x) \frac{\sigma^j c^j(x)}{j! n^{j/m}} \int_{-\infty}^{\infty} y^j d\mathcal{P}(y) \right\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ &\leq \frac{C}{n^{2/m}} \|\varphi\|_{W_2^{m+2}(\mathbf{R})} \exp\left(\frac{CM}{n^{1/m}}\right). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что если $\varphi \in W_2^{mk}(\mathbf{R})$, $k \geq 2$, то для любого $m \geq 4$ справедливо

$$\|\varphi\|_{W_2^{m+2}(\mathbf{R})} \leq \|\varphi\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R})},$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.5. Пусть непрерывная функция $s(x)$ удовлетворяет условиям (3) и (8). Для любого $t \geq 0$ справедливо

$$\|e^{tP_M \mathcal{L}_n P_M}\|_{L_2(\mathbf{R}) \rightarrow L_2(\mathbf{R})} \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} e^{t \left(\frac{CM^{m+2}}{n^{2/m}} \exp \left(\frac{CM}{n^{1/m}} \right) \right)}.$$

Доказательство. Представим

$$e^{tP_M \mathcal{L}_n P_M} = e^{t(P_M \mathcal{L} P_M + P_M \mathcal{L}_n P_M - P_M \mathcal{L} P_M)}.$$

Оператор $P_M \mathcal{L} P_M$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}, w)$ является неположительным самосопряженным оператором, и для $t \geq 0$ справедливо

$$\|e^{tP_M \mathcal{L} P_M}\|_{L_2(\mathbf{R}, w) \rightarrow L_2(\mathbf{R}, w)} \leq 1.$$

Оператор $P_M(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M$ является ограниченным оператором в пространстве $L_2(\mathbf{R}, w)$, и для $\varphi \in L_2(\mathbf{R}, w)$ справедливо

$$\|P_M(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M \varphi\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} \leq \|P_M \varphi\|_{L_2(\mathbf{R}, w)} \frac{CM^{m+2}}{n^{2/m}} \exp \left(\frac{CM}{n^{1/m}} \right).$$

Из теоремы 2.1 ([11, глава IX, §2, п. 1, с. 614]) следует, что оператор $P_M \mathcal{L} P_M + P_M(\mathcal{L}_n - \mathcal{L})P_M$ порождает квазиограниченную полугруппу, и для любого $t \geq 0$ справедливо

$$\|e^{tP_M \mathcal{L}_n P_M}\|_{L_2(\mathbf{R}, w) \rightarrow L_2(\mathbf{R}, w)} \leq e^{t \left(\frac{CM^{m+2}}{n^{2/m}} \exp \left(\frac{CM}{n^{1/m}} \right) \right)}. \quad \square$$

Через $u(t, x)$ обозначим решение задачи Коши (2), а через $u_{n,M}(t, x)$ – решение задачи Коши (6).

Теорема 2.6. Пусть непрерывная функция $s(x)$ удовлетворяет условиям (3) и (8), $M = M(n) = n^{\frac{2}{m(m+2)}}$ и $\varphi \in W_2^{mk}(\mathbf{R})$, $k \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|u_{n,M}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ & \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(n^{-\frac{2k}{m+2}} + Ct \left(n^{-\frac{2(k-1)}{m+2}} + n^{-\frac{2}{m}} \right) e^{tC} \right) \|\varphi\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \|u_{n,M}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ & \leq \|u_{n,M}(t, \cdot) - u_M(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} + \|u_M(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})}, \end{aligned}$$

где $u_M(t, x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad u(0, x) = \varphi_M(x).$$

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\|u_M(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\|\varphi\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R})}}{M^{mk}}.$$

Для оценки первого слагаемого воспользуемся формулой теории возмущений (см. [11, глава IX, §2, п. 1, с. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau.$$

В нашем случае $A + B = P_M \mathcal{L}_n P_M$ и $A = \mathcal{L}$. Тогда, используя леммы 2.3, 2.4 и 2.5, имеем

$$\begin{aligned} \|u_{n,M}(t, \cdot) - u_M(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} & \leq \frac{Ct\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{e^{CMn^{-1/m}}}{n^{2/m}} + \frac{1}{M^{m(k-1)}} \right) \\ & \times e^{t\left(\frac{CM^{m+2}}{n^{2/m}} \exp\left(\frac{CM}{n^{1/m}}\right)\right)} \|\varphi_M\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \|u_{n,M}(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbf{R})} \\ & \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(n^{-\frac{2k}{m+2}} + Ct \left(n^{-\frac{2(k-1)}{m+2}} + n^{-\frac{2}{m}} \right) e^{tC} \right) \|\varphi\|_{W_2^{mk}(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
2. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Обобщенные меры в функциональных пространствах*. — Теория вероятн. и ее примен. **10**, No. 2 (1965), 329–343.
3. T. Funaki, *Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation*. — Proc. Japan Acad., Ser. A, Math. Sci., **55**, No. 5 (1979), 176–179.

4. В. Ю. Крылов, *О некоторых свойствах распределения, отвечающего уравнению $\partial u / \partial t = (-1)^{q+1} \partial^{2q} u / \partial x^{2q}$* . — Докл. АН СССР **132** (1960), 1254–1257.
5. A. Lachal, *A survey on the pseudo-process driven by the high-order heat-type equation $\frac{\partial}{\partial t} = \pm \frac{\partial^N}{\partial x^N}$ concerning the first hitting times and sojourn times*. — Method. Comput. Appl. Probab. **14**, No. 3 (2014), 549–566.
6. S. Mazzucchi, *Probabilistic representations for the solution of higher order differential equations*. — Int. J. Partial Differ. Equ. 2013, Article ID 297857 (2013), 7 p.
7. E. Orsingher, B. Toaldo, *Pseudoprocesses related to space-fractional higher-order heat-type equations*. — Stochastic Anal. Appl. **32**, No. 4 (2014), 619–641.
8. E. Orsingher, X. Zhao, *Iterated processes and their applications to higher order differential equations*. — Acta Math. Sinica, **15** (1999), 173–180.
9. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах*, М., Наука, 1983.
10. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Аналитические диффузионные процессы: определение, свойства, предельные теоремы*. — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 2 (2016), 300–326.
11. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.
12. М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **454** (2016), 92–106.
13. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М., Наука, 1977.
14. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры*, Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1981.

Platonova M. V. On a probabilistic approach to the Cauchy problem solution for an evolution equation with a higher even-order differential operator and a variable coefficient.

We construct a probabilistic approximation of the solution to the Cauchy problem for an evolution equation containing a higher even-order differential operator with a variable coefficient on its right-hand side. The approximation is expressed as the mathematical expectation of functionals of a stochastic process.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 12 октября 2025 г.

Санкт-Петербургский государственный
университет, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: mariyaplat@gmail.com