

А. В. Люлинцев

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ ПО $\mathbb{Z}_+$ СО СНОСОМ

§1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В настоящей работе изучается процесс ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Под случайным блужданием в данном случае понимается однородный марковский процесс на фазовом пространстве $\mathbb{Z}_+$ с непрерывным временем t . Такой процесс задается своей матрицей переходных интенсивностей $A = (a(n, m))_{n, m \in \mathbb{Z}_+}$ (см., например, [4]), на которую мы налагаем условия:

A1. $a(n, n) < 0$, $a(n, n+1) > 0$, $a(n+1, n) > 0$, $a(n, n+d) = \mu > 0$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$ и

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} a(n, m) = 0.$$

A2. $a(n, n+1) = a(n+1, n)$.

За малое время частица может совершить переход либо в соседнюю точку $\mathbb{Z}_+$ или на $d \in \mathbb{N}$ позиций направо, поэтому случайное блуждание с переходной матрицей A , удовлетворяющей условиям **A1** и **A2**, будем называть случайным блужданием со сномом.

Данная работа обобщает наши результаты [10, 11] на случай, когда переход частицы мог совершаться только в соседнюю точку $\mathbb{Z}_+$, при этом, как и в [11], на матрицу A не налагается условие равномерной ограниченности элементов.

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ через $\xi_n(t)$ обозначим траекторию случайного блуждания со сномом с начальным условием $\xi_n(0) = n$. Марковское семейство $\xi_n(t)$ стандартным образом определяет полугруппу операторов

$$P_0^t : \ell_2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_+), \quad t \geq 0,$$

Ключевые слова: марковский ветвящийся процесс, ветвящиеся случайные блуждания, матрицы Якоби, ортогональные многочлены.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН)..

где оператор P_0^t действует на функцию $\varphi \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$ как

$$[P_0^t \varphi](n) = \mathbb{E} \varphi(\xi_n(t)). \quad (1)$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим генератор (инфинитезимальный оператор) полугруппы P_0^t . В [8] показано, что он является оператором, задаваемым матрицей A в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$. Существенным отличием от [10] и [11] является то, что в данном случае $\mathcal{A}$ не является самосопряженным оператором.

Для описания ветвящегося случайного блуждания добавим к случайному блужданию механизм ветвления. Будем предполагать, что источники ветвления находятся, вообще говоря, во всех точках $\mathbb{Z}_+$. Источник ветвления, находящийся в точке $n \in \mathbb{Z}_+$, описывается последовательностью коэффициентов $\{d_k(n)\}_{k=0}^\infty$, удовлетворяющих условиям

$$d_1(n) \leq 0, \quad d_k(n) \geq 0 \quad \text{при } k \neq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^\infty d_k(n) = 0.$$

Данная последовательность коэффициентов однозначно определяется своей инфинитезимальной производящей функцией

$$\varkappa(n, u) = \sum_{k=0}^\infty d_k(n) u^k, \quad u \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления в каждой точке $n \in \mathbb{Z}_+$ задается процессом Гальтона–Ватсона, где $d_k(n)$ – интенсивность деления на k потомков.

Введем последовательность $\{\beta(n)\}_{n=0}^\infty$ интенсивностей источников. По определению $\beta(n) = \varkappa'(n, 1) = \sum_{k=1}^\infty k d_k(n)$.

Как обычно, процесс ветвления предполагается независимым от процесса блуждания.

Таким образом, каждая частица, находящаяся в момент времени t в некоторой точке $n \in \mathbb{Z}_+$, независимо от остальных частиц в системе, может за малое время h перейти с вероятностью $p(h, n, m) = a(n, m)h + o(h)$ в точку $m \neq n$, или произвести $k \neq 1$ потомков, находящихся в этой же точке n , с вероятностью $p_k(h, n) = d_k(n)h + o(h)$, или сохраниться (то есть никаких изменений не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{n\}} a(n, m) h - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}} d_k(n) h + o(h).$$

Обозначим через $X_n(t)$, $t \geq 0$, процесс, задаваемый оператором $\mathcal{A}$ и производящей функцией $\varkappa(n, u)$, с условием $X_n(0) = \delta_n$ того, что в момент времени $t = 0$ в системе имеется ровно одна частица, находящаяся в точке $n \in \mathbb{Z}_+$, где δ_n — дельта-мера в точке n . Как и в [8], процесс $X_n(t)$ мы далее будем рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве $\mathcal{M}$ всех конечных целочисленных мер на $\mathbb{Z}_+$. Всякий элемент $M \in \mathcal{M}$ имеет вид

$$M = \sum_{j=1}^k \delta_{m_j}, \quad (2)$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Важно отметить, что в представлении (2) точки m_j не обязательно различны, что соответствует тому, что в одной точке $\mathbb{Z}_+$ может находиться несколько частиц одновременно, и отличаются находящиеся в одной точке частицы только своими номерами в списке частиц $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$. Другими словами, каждое m_j соответствует отдельной частице, которую мы кодируем занятой ей точкой m_j и ее номером j в списке. Так как далее мы будем рассматривать только симметрические функции от $X_n(t)$, конкретный выбор нумерации частиц не играет роли. Для $M \in \mathcal{M}$ символом $\{M\}$ будем обозначать множество всех частиц, это множество мы будем записывать как

$$\{M\} = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}, \quad (3)$$

причем в этом представлении каждая точка $\mathbb{Z}_+$ может встречаться несколько раз, что соответствует тому, что в этой точке находится несколько частиц.

Итак, ветвящееся случайное блуждание $X_n(t)$ мы рассматриваем как $\mathcal{M}$ -значный марковский случайный процесс, определяемый условием того, что в начальный момент времени имеется единственная частица в точке $n \in \mathbb{Z}_+$. Нас будет интересовать величина, равная среднему числу частиц $\mathcal{N}_n(t, m)$ в некоторой точке $m \in \mathbb{Z}_+$ в момент времени $t > 0$, а также асимптотическое поведение этой величины при $t \rightarrow \infty$. В общем случае величина $\mathcal{N}_n(t, m)$ будет выражена в терминах ортогональных многочленов, отвечающих некоторой матрице Якоби.

Также будут рассмотрены конкретные модели, в которых будут получены явные ответы и найдена асимптотика.

§2. ПОЛУГРУППА ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМАЯ ВЕТВЯЩИМСЯ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ

Определим еще одну полугруппу операторов. Напомним, процесс $X_n(t)$ мы рассматриваем как марковский случайный процесс со значениями в пространстве $\mathcal{M}$, при этом случайное множество $\{X_n(t)\}$ определяется формулой (3).

Для каждого $t \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\varphi \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$ определим случайную величину $\mathfrak{I}_{t,n}(\varphi)$, полагая

$$\mathfrak{I}_{t,n}(\varphi) = \sum_{m \in \{X_n(t)\}} \varphi(m) = \int_{\mathbb{Z}_+} \varphi dX_n(t). \quad (4)$$

По определению $\mathfrak{I}_{0,n}(\varphi) = \varphi(n)$.

Для каждого $t \geq 0$ определим оператор P^t , который действует на $\varphi \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$ как

$$[P^t \varphi](n) = \mathbb{E} \mathfrak{I}_{t,n}(\varphi). \quad (5)$$

Определим диагональный оператор $\mathcal{B}$, задаваемый в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \beta(0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta(1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В работе [10] доказаны следующие две леммы, которые мы будем использовать. Важно отметить, что доказательство этих лемм не требует симметричности матрицы и равномерной ограниченности ее элементов.

Лемма 1. Семейство операторов P^t является полугруппой, то есть для всех $s, t \geq 0$ справедливо соотношение

$$P^{t+s} = P^t P^s.$$

Лемма 2. Генератор полугруппы P^t есть оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, то есть для всех $\varphi \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{[P^t \varphi](n) - \varphi(n)}{t} = [\mathcal{A}\varphi](n) + \beta(n) \varphi(n).$$

Заметим, что утверждение леммы 2 эквивалентно операторному тождеству (см., например, [3], глава 8, §2)

$$P^t = e^{t\mathcal{H}}, \quad \text{где } \mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

где оператор $\mathcal{A}$ отвечает блужданию, а диагональный оператор $\mathcal{B}$ отвечает ветвлению. Так как оператор $\mathcal{H}$ не является самосопряженным, строгое определение экспоненты от оператора будет приведено ниже.

В настоящей работе мы исследуем ветвящееся случайное блуждание, для которого соответствующий оператор $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mu$ в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ задается матрицей

$$H_\mu = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $a_k \leq 0, b_k > 0$, параметр $\mu \geq 0$ расположен на d -наддиагонали, $d \in \mathbb{N}$.

Матрицу (6) можно представить в виде

$$H_\mu = \begin{pmatrix} -(b_0 + \mu) & b_0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & -(b_0 + b_1 + \mu) & b_1 & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & -(b_1 + b_2 + \mu) & b_2 & \dots & 0 & 0 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & -(b_2 + b_3 + \mu) & \dots & 0 & 0 & 0 & \mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + \mu & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 + b_0 + b_1 + \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 + b_1 + b_2 + \mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 + b_2 + b_3 + \mu & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (7)$$

Первое слагаемое является матрицей A оператора, соответствующего блужданию, второе слагаемое – матрица B оператора, соответствующая ветвлению.

Ниже всегда будем предполагать, что $\mathcal{H}_0$ является самосопряженным оператором в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$. Это всегда выполнено, если оператор $\mathcal{H}_0$ ограничен. В случае, если оператор $\mathcal{H}_0$ не является ограниченным, достаточные условия самосопряженности можно найти в [2].

Во введенных обозначениях для среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t, m)$ в момент времени t в точке m при условии, что в начальный момент

времени в системе имеется одна частица в точке n справедливо соотношение (подробнее см. [8])

$$\mathcal{N}_n(t, m) = \mathbb{E} \mathfrak{I}_{t,n}(\mathbb{I}_{\{m\}}) = [P^t \mathbb{I}_{\{m\}}](n) = [e^{t\mathcal{H}_\mu} \mathbb{I}_{\{m\}}](n). \quad (8)$$

Таким образом, исследование среднего числа частиц в точке сводится к нахождению экспоненты оператора $\mathcal{H}_\mu$.

Случай $\mu = 0$ подробно рассмотрен в [10, 11]. При изменении параметра μ в модели с матрицей (7) не только появляется снос в процессе блуждания, но и меняется интенсивность ветвления. Последнее приводит к тому, что в асимптотике для среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t, m)$ при $t \rightarrow \infty$ будет присутствовать множитель $e^{\mu t}$. Связано это с тем, что в (7) матрицу B можно представить в виде суммы $B_1 + \mu I$, где I – единичная матрица, что приводит к сдвигу спектра на μ , а в асимптотике – к возникновению множителя $e^{\mu t}$. Есть простой способ избавиться от этого множителя. Для этого можно каждой появившейся частице придать другую ни от чего не зависящую экспоненциально распределенную случайную величину ζ с параметром μ . В момент ζ , если частица еще существовала, она исчезает, не оставляя потомства. Это операция приведет к тому что матрица ветвления станет $B_1 = B - \mu I$.

§3. ФОРМУЛА ДЛЯ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ $\mathcal{N}_n(t, m)$

Через S^* обозначим оператор сдвига на единицу направо, матрица которого в стандартном базисе $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ имеет вид

$$S^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Используя это обозначение, представим матрицу (6) в виде

$$H_\mu = H_0 + \mu(S^*)^d. \quad (9)$$

Матрица H_0 является матрицей Якоби. Известно (см., например, [2, 7]), что ей соответствует последовательность многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$, которые ортонормированы по некоторой вероятностной мере ρ (своей

для каждой матрицы), то есть

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(\lambda) P_m(\lambda) d\rho(\lambda) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Данные многочлены являются решением задачи на собственные числа

$$H_0 P(\lambda) = \lambda P(\lambda), \quad \text{где } P(\lambda) = (P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots)^T. \quad (10)$$

и удовлетворяют тождеству

$$S^* P(\lambda) = (P_1(\lambda), P_2(\lambda), P_3(\lambda), \dots)^T. \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, – ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}_+$, а соответствующая ему матрица H_μ в стандартном базисе $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ задается формулой (6). Тогда для среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t, m)$ в точке $m \in \mathbb{Z}_+$ в момент времени $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}_n(t, m) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} P_n(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (12)$$

при условии, что ряд в правой части (12) сходится абсолютно, а также сходится интеграл.

Доказательство. Как было отмечено выше, задача нахождения среднего числа частиц сводится к нахождению экспоненты оператора $\mathcal{H}_\mu$. В случае $\mu = 0$ оператор $\mathcal{H}_0$ самосопряженный, соответственно экспонента определена. В случае $\mu > 0$, когда оператор уже не является самосопряженным, мы рассматриваем $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_0 + \mu(\mathcal{S}^*)^d$ как ограниченное возмущение оператора $\mathcal{H}_0$. Экспоненту $\mathcal{H}_\mu$ определяем через ряд Тейлора.

Введем оператор

$$U : \ell_2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \rho),$$

действующий на стандартный базис в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ по правилу:

$$U \vec{e}_n = P_n(\lambda).$$

В предположении того, что оператор $\mathcal{H}$ самосопряжен, система многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L_2(\mathbb{R}, \rho)$ (см., например, [7]).

Данный оператор является унитарным и диагонализует оператор $\mathcal{H}_0$ (подробнее см. [10, 11]), то есть для функции $f \in L_2(\mathbb{R}, \rho)$ справедливо

$$[U\mathcal{H}_0U^*f](\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Теперь найдем среднее число частиц в точке m в момент времени $t \geq 0$, при условии, что в начальный момент времени была единственная частица в точке n :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(t, m) &= \mathbb{E} \mathfrak{J}_{t,n}(\mathbb{I}_{\{m\}}) = [e^{t\mathcal{H}_\mu} \mathbb{I}_{\{m\}}](n) = [U^*(e^{t\mathcal{H}_\mu} P_m(\lambda))](n) \\ &= (e^{t(\mathcal{H}_0 + \mu(\mathcal{S}^*)^d)} P_m(\lambda), P_n(\lambda))_\rho, \end{aligned} \quad (13)$$

где $(\cdot, \cdot)_\rho$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}, \rho)$.

Отдельно вычислим действие экспоненты на $P(\lambda)$. Учитывая соотношения (10), (11), m -ая координата имеет вид

$$\begin{aligned} e^{t(\mathcal{H}_0 + \mu(\mathcal{S}^*)^d)} P_m(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{H}_0 + \mu(\mathcal{S}^*)^d)^k P_m(\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^{k-j} \mu^j P_{m+jd}(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= e^{t\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda). \end{aligned}$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(t, m) &= \left(e^{t\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda), P_n(\lambda) \right)_\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} P_n(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda) d\rho(\lambda). \quad \square \end{aligned}$$

Полученные результаты могут быть перенесены на ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}_+$ с поглощением в нуле, подобно тому, как в [12] это сделано для якобиевых ветвящихся случайных блужданий. Аналогично, вопрос исследования средних значений функционалов от случайного поля частиц ветвящегося случайного блуждания со сносом

сводится к исследованию средних значений функционалов от случайного поля частиц якобиева ветвящегося случайного блуждания [13].

Пример 1. Многочлены Чебышёва II рода. Рассмотрим модель, для которой оператор $\mathcal{H}_\mu$ в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ задается матрицей

$$H_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 2\mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 2\mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2\mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mu > 0. \quad (14)$$

Данную матрицу можно представить в виде

$$H_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(1+2\mu) & 1 & 0 & 0 & \dots & 2\mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -(2+2\mu) & 1 & 0 & \dots & 0 & 2\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -(2+2\mu) & 1 & \dots & 0 & 0 & 2\mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -(2+2\mu) & \dots & 0 & 0 & 0 & 2\mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2\mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2+2\mu & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2+2\mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2+2\mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где первая матрица отвечает случайному блужданию, а вторая – ветвлению.

Якобиевой матрице H_0 соответствуют многочлены Чебышёва II рода

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin[(n+1)\arccos \lambda]}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

которые ортонормированы по мере

$$d\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda^2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(\lambda) d\lambda.$$

В данном случае

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(t, m) &= \int_{-1}^1 e^{t\lambda} P_n(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda) \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos \theta} P_n(\cos \theta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos \theta} \sin[(n+1)\theta] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} \sin[(m+jd+1)\theta] d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{t(\cos \theta + \mu \cos[\theta d])} \sin[(m+1)\theta + \mu t \sin(\theta d)] \sin[(n+1)\theta] d\theta \\
&= \frac{1}{i\pi} \int_0^\pi e^{t(\cos \theta + \mu \cos[\theta d])} \left(e^{i((m+1)\theta + \mu t \sin(\theta d))} \right. \\
&\quad \left. - e^{-i((m+1)\theta + \mu t \sin(\theta d))} \right) \sin[(n+1)\theta] d\theta.
\end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл к сумме интегралов вида

$$F(t) = \int_0^\pi e^{tS(\theta)} f(\theta) dx.$$

В нашем случае $S(\theta) = \cos \theta + \mu e^{\pm i\theta d}$, где в одном из интегралов берется знак плюс, а в другом — знак минус.

Максимум $\operatorname{Re} S(\theta)$ равен $1 + \mu$ и достигается в единственной точке $\theta = 0$ из отрезка $[0, \pi]$, причем $S'(0) \neq 0$ (то есть 0 не является точкой перевала), поэтому (см. [9, глава IV, §1, теорема 1.2]) можем воспользоваться методом Лапласа нахождения асимптотики интеграла при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_n(t, m) &\sim \frac{2}{\pi} \int_0^\varepsilon e^{t(1 - \frac{\theta^2}{2} + \mu - \mu \frac{\theta^2 d^2}{2})} (m+1 + \mu t d)(n+1) \theta^2 d\theta \\
&\sim \frac{2(m+1 + \mu t d)(n+1) e^{(\mu+1)t}}{\pi(1 + \mu d^2)^{3/2} t^{3/2}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{t(1+\mu d^2)}} e^{-y^2/2} y^2 dy \\
&\sim \frac{2\mu d(n+1) e^{(\mu+1)t}}{(1 + \mu d^2)^{3/2} \sqrt{2\pi t}}.
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА

Рассмотрим модель, для которой оператор $\mathcal{H}_\mu$ в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ задается матрицей

$$H_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots & \mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots & 0 & 0 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mu > 0. \quad (15)$$

Данную матрицу можно представить в виде

$$H_\mu = \begin{pmatrix} -(\sqrt{1} + \mu) & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots & \mu & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & -(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \mu) & \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & -(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \mu) & \sqrt{3} & \dots & 0 & 0 & \mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{1} + \mu & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{1} + \sqrt{2} + \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \mu) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} + \sqrt{4} + \mu & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где первая матрица отвечает случайному блужданию, а вторая – ветвлению.

Якобиевой матрице H_0 соответствуют многочлены Эрмита

$$P_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

которые ортонормированы по мере

$$d\rho(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda.$$

Тогда с учетом результатов примера 1 из [11] получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n(t, m) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} P_{m+jd}(\lambda) P_n(\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda} P_{m+jd}(\lambda) P_n(\lambda) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{(m+jd)!} \sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{\min(m+jd, n)} C_{m+jd}^k C_n^k k! t^{m+jd+n-2k}$$

Исследуем асимптотическое поведение $\mathcal{N}_n(t, m)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{N}_n(t, m) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^j}{j!} \frac{t^{m+jd+n} e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{(m+jd)!} \sqrt{n!}} \sim \frac{t^{m+n} e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{n!}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t^d \mu)^j}{j! \sqrt{(jd)!}}.$$

Обозначим $x = t^d \mu$. По формуле Стирлинга при $j \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{x^j}{j! \sqrt{(jd)!}} &\sim \frac{e^{j \ln x}}{\sqrt{2\pi} j^{j+\frac{1}{2}} e^{-j} \sqrt[4]{2\pi} (jd)^{\frac{jd}{2}+\frac{1}{4}} e^{-\frac{jd}{2}}} = (2\pi)^{-\frac{3}{4}} j^{-\frac{3}{4}} d^{-\frac{1}{4}} \\ &\times \exp \left(j \ln x - j \left(1 + \frac{d}{2} \right) \ln j - \frac{jd}{2} \ln d + j \left(1 + \frac{d}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Найдем точку максимума по j аргумента экспоненты. Считая j непрерывным:

$$j_0 = x^{\frac{2}{d+2}} d^{-\frac{d}{d+2}}.$$

Таким образом, при $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j! \sqrt{(jd)!}} \sim C(d) x^{-\frac{1}{2(d+2)}} \exp \left(\frac{1}{2}(d+2) x^{\frac{2}{d+2}} d^{-\frac{d}{d+2}} \right).$$

В итоге, для среднего числа частиц асимптотика при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\mathcal{N}_n(t, m) \sim C(n, d, \mu) t^{m+n-\frac{d}{d+2}} \exp \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(d+2) \mu^{\frac{2}{d+2}} t^{\frac{2d}{d+2}} d^{-\frac{d}{d+2}} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Аски, Р. Рой, Дж. Эндрюс, *Специальные функции*, МЦНМО, 2013.
2. Н. И. Ахнезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней*, Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1961.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Учеб. пособие, Л., 1980.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М., Наука, 1977.
5. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Физматлит, 2003.
6. А. И. Рытова, *Гармонический анализ ветвящихся случайных блужданий с тяжелыми хвостами*. — Фунд. прикл. матем., **23**, No. 1 (2020), 175–189.
7. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1962.

8. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*. — Теория вероятн. и ее примен. **68**, No. 4 (2023), 779–795.
9. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, М., Наука, 1977.
10. А. В. Люлинцев, *Марковские ветвящиеся случайные блуждания по $\mathbb{Z}_+$. Подход с использованием ортогональных многочленов. I*. — Теория вероятн. и ее примен. **69**, No. 1 (2024), 91–111.
11. А. В. Люлинцев, *Марковские ветвящиеся случайные блуждания по $\mathbb{Z}_+$. Подход с использованием ортогональных многочленов. II*. — Теория вероятн. и ее примен. **69**, No. 3 (2024), 439–458.
12. А. В. Люлинцев, *Марковские ветвящиеся случайные блуждания по $\mathbb{Z}_+$ с поглощением в нуле*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **526** (2023), 109–129.
13. А. В. Люлинцев, *Об асимптотическом поведении среднего значения функционалов от случайного поля частиц, задаваемого ветвящимся случайным блужданием*. — Алгебра и анализ **36**, No. 4 (2024), 38–56.

Lyulintsev A. V. Branching random walks on $\mathbb{Z}_+$ with drift.

A homogeneous Markov process with continuous time on the phase space $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ is considered, which is interpreted as the motion of a particle. The particle can move to neighboring points in $\mathbb{Z}_+$ or make a jump directly $d \in \mathbb{N}$ positions to the right. Such a transition is called a drift. The process is equipped with a branching mechanism. Branching sources can be located at every point of $\mathbb{Z}_+$. At the moment of branching, new particles appear at the branching point and subsequently begin to evolve independently of each other (and of the other particles) according to the same laws as the initial particle. This branching Markov process corresponds to a matrix related to the Jacobi matrix. In terms of the orthogonal polynomials associated with this matrix, formulas are obtained for the average number of particles at an arbitrary fixed point $\mathbb{Z}_+$ at time $t > 0$. The results are applied to some specific models, and the asymptotic behavior of the average number of particles at large times is found.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lav_100k@mail.ru

Поступило 14 октября 2025 г.