

И. И. Лукашова

КРИТИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА $\mathbf{Z}^d$ С ИММИГРАЦИЕЙ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) представляют собой одну из ключевых математических моделей для анализа эволюционных систем, характеризующихся процессами размножения, гибели, пространственного перемещения и миграции частиц. Значительное развитие теория ветвящихся случайных блужданий на решетках $\mathbf{Z}^d$ получила в последние десятилетия [1, 2, 5]. В этих работах было показано, что изучение асимптотического поведения моментов численности частиц может быть сведено к изучению спектральных свойств некоторого самосопряженного оператора, который называется генератором ВСБ. Данный оператор удобно рассматривать как сумму двух операторов, один из которых отвечает за пространственное перемещение частиц, а второй – за ветвление. В различных постановках задачи оператор ветвления может быть конечномерным [3, 4], компактным [5] или периодическим [6], и в зависимости от этого применяются различные техники изучения спектральных свойств генератора. Например, в периодическом случае задача сводилась к исследованию спектральных свойств подходящего функционального преобразования для генератора ВСБ. Это преобразование является дискретным аналогом преобразования Гельфанда, применяемого в теории Флоке–Блоха при изучении спектров периодических дифференциальных операторов. Данное преобразование позволило свести сложную задачу изучения спектра генератора – периодического линейного оператора на $\mathbf{Z}^d$ – к изучению спектра семейства конечномерных матриц, зависящих от параметра, изменяющегося на компактном множестве – элементарной ячейке.

Ключевые слова: ветвящееся случайное блуждание, прямой интеграл операторов, периодическое возмущение, критический случай.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим Институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение 075-15-2025-344 от 29.04.2025.

В настоящей работе исследуется ветвящееся случайное блуждание на $\mathbf{Z}^d$ с иммиграцией и периодически расположенными источниками ветвления. Как и в классических ВСБ, асимптотическое поведение системы определяется ее принадлежностью к надкритическому, критическому или докритическому классу. Ранее в [7] для надкритического и докритического случаев было получено асимптотическое поведение средней численности частиц при $t \rightarrow \infty$. В данной статье завершается эта задача – выводятся соответствующие результаты для критического режима.

§2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим сначала ветвящийся процесс с иммиграцией без блуждания, то есть мы предполагаем, что все частицы находятся в одной точке. Фазовым пространством такого процесса является множество $\mathbf{N} \cup \{0\}$. Считаем, что процесс в момент времени t находится в состоянии $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, если в этот момент в системе имеется ровно k частиц. Эти частицы в дальнейшем эволюционируют независимо друг от друга в соответствии со следующими правилами: каждая из этих частиц имеет время жизни, распределенное экспоненциально с параметром 1; в момент гибели частицы производят потомство в соответствии с вероятностной производящей функцией

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k, \quad b_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1,$$

независимо от поведения других частиц. Помимо этого, независимо от механизма ветвления, в случайный момент времени, распределенный экспоненциально с параметром 1, в систему добавляется случайное число частиц извне в соответствии с вероятностной производящей функцией

$$g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \quad c_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 1.$$

Новорожденные частицы эволюционируют в дальнейшем независимо друг от друга и от остальных частиц, существующих в системе, в соответствии с описанной выше схемой.

Далее определим интенсивность ветвления β и интенсивность иммиграции α , полагая

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} k b_k - 1 < \infty, \quad \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k < \infty.$$

Через $m(t)$ обозначим среднее число частиц в системе в момент времени t при условии, что в начальный момент времени в системе частиц не было. В [8, гл. VII] показано, что в любой момент времени t справедливо

$$m(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1), & \text{если } \beta \neq 0; \\ \alpha t, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $m(t)$ можно представить в виде

$$m(t) = \alpha \int_0^t e^{\beta s} ds,$$

где $e^{\beta s}$ – среднее число частиц марковского ветвящегося процесса без иммиграции в момент времени s в предположении, что в начальный момент времени в системе имеется одна частица (см. [8]). Отметим, что имеется естественная классификация ветвящихся процессов с иммиграцией в соответствии с интенсивностью ветвления β : при $\beta > 0$ в среднем наблюдается экспоненциальный рост числа частиц (надкритический режим), при $\beta < 0$ среднее число стремится к константе $\frac{\alpha}{|\beta|}$ (докритический режим), а при $\beta = 0$ наблюдается линейный по t рост числа частиц (критический режим).

Теперь добавим к ветвящемуся процессу с иммиграцией механизм блуждания. Будем считать, что перемещение частиц в пространстве задается матрицей переходных интенсивностей случайного блуждания $\{a_1(v, u)\}_{v, u \in \mathbf{Z}^d}$, коэффициенты которой удовлетворяют следующим свойствам:

- (1) $a_1(v, u) \geq 0$, $v \neq u$, $a_1(v, v) < 0$;
- (2) $a_1(v, u) = a_1(u, v)$, $u, v \in \mathbf{Z}^d$;
- (3) $\sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a_1(v, u) = 0$ для любого $v \in \mathbf{Z}^d$;
- (4) для любых $v, u \in \mathbf{Z}^d$ существует путь $v = u_0, u_1, \dots, u_n = u$, что $a_1(u_k, u_{k+1}) > 0$ при всех $k = 0, \dots, n-1$.

В описанной модели естественно предположить, что все параметры, описывающие механизмы ветвления и иммиграции, являются функциями от $v \in \mathbf{Z}^d$. Дополнительно предположим, что параметры модели

являются периодическими функциями относительно некоторой решетки

$$\Gamma = \{g \in \mathbf{Z}^d : g = \sum_{k=1}^d n_k g_k, n_k \in \mathbf{Z}\},$$

где $\{g_k\}_{k=1}^d$ – набор линейно независимых векторов в $\mathbf{Z}^d$. Предположим, что для любого $g \in \Gamma$ выполнено

$$\begin{aligned} (5) \quad & a_1(u, v) = a_1(u + g, v + g), \quad u, v \in \mathbb{Z}^d; \\ (6) \quad & \beta(v) = \beta(v + g), \quad \alpha(v) = \alpha(v + g), \quad v \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

Через $\|\cdot\|$ обозначим евклидову норму в $\mathbf{R}^d$ и предположим, что дисперсия скачков случайного блуждания конечна, то есть для любых $u, v \in \mathbf{Z}^d$ выполнено

$$(7) \quad \sum_{g \in \Gamma} \|g\|^2 |a_1(v, u + g)| < \infty.$$

Также будем считать, что возможно блуждание центра иммиграции, которое задается с помощью инфинитезимальной матрицы переходных интенсивностей $\{a_0(v, u)\}_{v, u \in \mathbf{Z}^d}$, элементы которой удовлетворяют аналогичным свойствам.

Через $l_2(\mathbf{Z}^d)$ обозначим пространство квадратично суммируемых функций $f : \mathbf{Z}^d \rightarrow \mathbf{C}$ с нормой

$$\|f\|_{l_2(\mathbf{Z}^d)}^2 = \sum_{v \in \mathbf{Z}^d} |f(v)|^2 < \infty.$$

Обозначим через $m(t, v, u)$ среднее число частиц в точке u в момент времени t при условии, что в начальный момент в системе не было частиц, а первые частицы появляются в точке v . В [7] было показано, что $m(t, v, u)$, как функция переменных t и v , может быть представлена в виде

$$m(t, v, u) = \int_0^t e^{(t-\tau)A_0} Q_0 e^{\tau(A_1+Q_1)} \delta_u(v) d\tau, \quad (1)$$

где операторы $A_0, A_1, Q_0, Q_1 : l_2(\mathbf{Z}^d) \rightarrow l_2(\mathbf{Z}^d)$ определяются следующим образом:

$$A_j f(v) = \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a_j(v, u) f(u), \quad j = 0, 1, \quad (2)$$

$$Q_0 f(v) = \alpha(v) f(v), \quad (3)$$

$$Q_1 f(v) = \beta(v) f(v). \quad (4)$$

Заметим, что $e^{t(A_1+Q_1)} \delta_u(v)$ описывает среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания без иммиграции в предположении, что в начальный момент времени в системе находится одна частица в точке v .

В [7] было показано, что классификация ветвящихся случайных блужданий с иммиграцией определяется правым краем спектра оператора $A_1 + Q_1$: надкритический случай соответствует случаю положительного правого края спектра, докритический случай – отрицательного, критический случай соответствует равенству нулю правого края спектра. Также в [7] было изучено асимптотическое поведение $m(t, v, u)$ при $t \rightarrow \infty$ в надкритическом и докритическом случаях. Именно, было показано, что для любых $u, v \in \mathbf{Z}^d$ при $t \rightarrow \infty$ справедливо

$$m(v, u, t) = C(v, u, d) \cdot \frac{e^{t\lambda}}{t^{d/2}} (1 + o(1)),$$

где $C(v, u, d) > 0$, а через λ обозначен максимум из двух величин – правого края спектра оператора $A_1 + Q_1$ и нуля.

Целью данной работы является изучение асимптотического поведения $m(t, v, u)$ при $t \rightarrow \infty$ в критическом случае. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\lambda = 0$ – верхняя граница спектра оператора $A_1 + Q_1$, тогда для любых $u, v \in \mathbf{Z}^d$ существует константа $C(u, v, d) > 0$, такая что

$$m(v, u, t) = C(v, u, d) \cdot \frac{1}{t^{d/2-1}} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства нам потребуется ввести ряд обозначений, а также сформулировать и доказать несколько вспомогательных утверждений.

Введем на $\mathbf{Z}^d$ отношение эквивалентности следующим образом: точки $u, v \in \mathbf{Z}^d$ назовем эквивалентными, если $u - v \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство обозначим через $\Omega = \mathbf{Z}^d / \Gamma$. Заметим, что множество Ω конечно, через p обозначим число элементов этого множества. Будем называть Ω фундаментальным множеством вершин. Его удобно отождествить с некоторым множеством $\{v_1, \dots, v_p\}$ попарно неэквивалентных элементов $\mathbf{Z}^d$. Заметим, что для фиксированного выбора

$\Omega = \{v_1, \dots, v_p\}$ любая вершина $u \in \mathbf{Z}^d$ единственным образом представляется в виде

$$u = \omega_u + \gamma_u,$$

где $\omega_u \in \Omega$ и $\gamma_u \in \Gamma$.

Обозначим стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Определим двойственный базис $\{\tilde{g}_j\}_{j=1}^d$ как $\langle \tilde{g}_j, g_k \rangle = 2\pi \delta_{kj}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Определим элементарную ячейку решетки, двойственной к Γ , как

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \theta \in \mathbf{R}^d : \theta = \sum_{j=1}^d \theta_j \tilde{g}_j, \ 0 \leq \theta_j < 1, \ j = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Обозначим объем $\tilde{\Omega}$ через $|\tilde{\Omega}| = \int_{\tilde{\Omega}} d\theta$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство квадратично интегрируемых p -мерных комплекснозначных вектор-функций на множестве $\tilde{\Omega}$ со стандартной для такого пространства нормой $\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\tilde{\Omega}} |f(\theta)|^2 d\theta$. Для прямого интеграла обычно используется символическое обозначение $\mathcal{H} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathbf{C}^p d\theta$. Определим оператор $U : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \rightarrow \mathcal{H}$ равенством

$$(Uf)(v, \theta) = |\tilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} f(v + g), \quad v \in \Omega.$$

Такой оператор изначально определяется на функциях из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$, имеющих ограниченный носитель, а потом по непрерывности продолжается до унитарного оператора во всем $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$.

В [6] было показано, что операторы $A_j, Q_j : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}^d)$, определенные в (2)–(4), унитарно эквивалентны прямому интегралу операторов (см. [9, глава XIII.16])

$$UA_jU^{-1} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus A_j(\theta) d\theta, \quad UQ_jU^{-1} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus Q_j(\theta) d\theta, \quad (5)$$

где при почти всех $\theta \in \tilde{\Omega}$ действие операторов $A_j(\theta), Q_j(\theta), j = 0, 1$, на функцию $h \in \mathbf{C}^p$ определяется как

$$\begin{aligned}
(A_j(\theta)h)(v) &= \sum_{u \in \Omega} \tilde{a}_j(v, u, \theta) h(u), \\
\tilde{a}_j(v, u, \theta) &= \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} a_j(v + g, u), \quad j = 0, 1; \\
(Q_0(\theta)h)(v) &= \alpha(v) h(v); \quad (Q_1(\theta)h)(v) = \beta(v) h(v).
\end{aligned}$$

Формулы (5) означают, что для любой функции $f \in \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ и любого $v \in \Omega$ при почти всех $\theta \in \tilde{\Omega}$ выполнены равенства

$$(UA_j f)(v, \theta) = A_j(\theta)(Uf)(v, \theta), \quad (UQ_j f)(v, \theta) = Q_j(\theta)(Uf)(v, \theta).$$

Заметим, что $A_0(\theta)$ и $A_1(\theta) + Q_1(\theta)$ при всех $\theta \in \tilde{\Omega}$ являются p -мерными эрмитовыми матрицами, а значит, спектр каждой состоит из p возможно совпадающих собственных значений. Обозначим через $\{\lambda_j^0(\theta)\}_{j=1}^p$ и $\{\lambda_j(\theta)\}_{j=1}^p$ собственные значения матриц $A_0(\theta)$ и $A_1(\theta) + Q_1(\theta)$ соответственно. Будем считать их упорядоченными в порядке невозрастания:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^0(\theta) &\geq \dots \geq \lambda_p^0(\theta), \\
\lambda_1(\theta) &\geq \dots \geq \lambda_p(\theta).
\end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть правый край спектра оператора $A_1 + Q_1$ равен 0. Тогда

1. максимумы функций $\lambda_1^0(\theta)$ и $\lambda_1(\theta)$ достигаются только при $\theta = 0$, и $\lambda_1^0(0) = \lambda_1(0) = 0$;
2. старшие собственные значения операторов $A_0(0)$ и $A_1(0) + Q_1(0)$ являются простыми, соответствующие им собственные функции могут быть выбраны положительными;
3. расстояние от правого края спектра операторов A_0 и $A_1 + Q_1$ до правого края второй спектральной зоны строго положительно, то есть

$$\lambda_1^0(0) - \sup_{\theta \in \tilde{\Omega}} \lambda_2^0(\theta) > 0,$$

$$\lambda_1(0) - \sup_{\theta \in \tilde{\Omega}} \lambda_2(\theta) > 0;$$

4. гессианы функций $\lambda_1^0(\theta)$ и $\lambda_1(\theta)$ не обращаются в нуль при $\theta = 0$;

5. для любого $s \in (0, 1)$ и $j, k = 1, \dots, p$ выполнено

$$(1 - s) \lambda_k^0(\theta) + s \lambda_j(\theta) \leq 0,$$

причем равенство достигается только при $\theta = 0$ и $j = k = 1$.

Доказательство. Доказательство пунктов 1–4 можно найти в работе [6]. Покажем, что выполнено утверждение 5.

Элементы матриц $A_0(\theta)$ и $A_1(\theta) + Q_1(\theta)$ являются непрерывными функциями переменной θ . Следовательно, собственные значения $\lambda_j^0(\theta)$ и $\lambda_j(\theta)$ тоже являются непрерывными по переменной θ функциями при всех $j = 1, \dots, p$. Из эрмитовости матриц $A_0(\theta)$ и $A_1(\theta)$ при всех $\theta \in \tilde{\Omega}$ следует, что при всех $s \in (0, 1)$ и всех $\theta \in \tilde{\Omega}$ выражение $(1 - s) \lambda_k^0(\theta) + s \lambda_j(\theta)$ вещественно при любых $j, k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Тогда из утверждения 1 мгновенно следует утверждение 5. $\square$

Доказательство теоремы 1. Из (1) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} m(t, v, u) &= \int_0^t e^{(t-\tau)A_0} Q_0 e^{\tau(A_1+Q_1)} \delta_u(v) d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}} \left\langle (U e^{(t-\tau)A_0} Q_0 e^{\tau(A_1+Q_1)} \delta_u)(\cdot, \theta), (U \delta_v)(\cdot, \theta) \right\rangle_{\mathbf{C}^p} d\theta d\tau \quad (6) \\ &= \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}} \left\langle (e^{(t-\tau)A_0(\theta)} Q_0(\theta) e^{\tau(A_1(\theta)+Q_1(\theta))} U \delta_u)(\cdot, \theta), (U \delta_v)(\cdot, \theta) \right\rangle_{\mathbf{C}^p} d\theta d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что для $w \in \Omega$

$$(U \delta_u)(w, \theta) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{g \in \Gamma} e^{-i\langle g, \theta \rangle} \delta_u(w + g) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} e^{-i\langle \gamma_u, \theta \rangle} \tilde{\delta}_{\omega_u}(w),$$

$$(U \delta_v)(w, \theta) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} e^{-i\langle \gamma_v, \theta \rangle} \tilde{\delta}_{\omega_v}(w),$$

где $\{\tilde{\delta}_{\omega_u}\}_{\omega_u \in \Omega}$ – стандартный базис в $\mathbf{C}^p$, определенный как

$$\tilde{\delta}_{\omega_u}(\cdot) = \begin{cases} 1, & w = \omega_u, \\ 0, & w \neq \omega_u. \end{cases}$$

Пусть $\{\chi_j(\theta)\}_{j=1}^p$ и $\{\varphi_j(\theta)\}_{j=1}^p$ – собственные базисы матриц $A_0(\theta)$ и $A_1(\theta) + Q_1(\theta)$. При каждом $\theta \in \tilde{\Omega}$ разложим $\tilde{\delta}_{\omega_u}(w)$ по собственному

базису оператора $A_1(\theta) + Q_1$:

$$\tilde{\delta}_{\omega_u}(w) = \sum_{j=1}^p c_j^{\omega_u}(\theta) \varphi_j(w, \theta), \quad c_j^{\omega_u}(\theta) = \langle \tilde{\delta}_{\omega_u}(\cdot), \varphi_j(\cdot, \theta) \rangle_{\mathbb{C}^p} = \overline{\varphi_j(\omega_u, \theta)},$$

а $\tilde{\delta}_{\omega_v}(w)$ – по собственному базису оператора $A_0(\theta)$:

$$\tilde{\delta}_{\omega_v}(w) = \sum_{k=1}^p f_k^{\omega_v}(\theta) \chi_k(w, \theta), \quad f_k^{\omega_v}(\theta) = \overline{\chi_k(\omega_v, \theta)}. \quad (7)$$

Тогда

$$(e^{\tau(A_1(\theta)+Q_1(\theta))} U \delta_u)(w, \theta) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} e^{-i\langle \gamma_u, \theta \rangle} \sum_{j=1}^p e^{\tau \lambda_j(\theta)} \overline{\varphi_j(\omega_u, \theta)} \varphi_j(w, \theta).$$

Далее разложим $\alpha(\cdot) \varphi_j(\cdot, \theta)$ по собственным функциям оператора $A_0(\theta)$

$$\alpha(\cdot) \varphi_j(\cdot, \theta) = \sum_{l=1}^p d_{jl}(\theta) \chi_l(\cdot, \theta), \quad d_{jl}(\theta) = \langle \alpha(\cdot) \varphi_j(\cdot, \theta), \chi_l(\cdot, \theta) \rangle_{\mathbb{C}^p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (e^{(t-\tau)A_0(\theta)} Q_0(\theta) e^{\tau(A_1(\theta)+Q_1(\theta))} U \delta_u)(\cdot, \theta) \\ &= |\tilde{\Omega}|^{-1/2} e^{-i\langle \gamma_u, \theta \rangle} \sum_{j,l=1}^p e^{(t-\tau)\lambda_l^0(\theta)} e^{\tau \lambda_j(\theta)} d_{jl}(\theta) \overline{\varphi_j(\omega_u, \theta)} \chi_l(\cdot, \theta). \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение и (7) в (6), имеем

$$\begin{aligned} & m(t, v, u) \\ &= \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \sum_{k,j=1}^p \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}} e^{-i\langle \gamma_u - \gamma_v, \theta \rangle} e^{(t-\tau)\lambda_k^0(\theta) + \tau \lambda_j(\theta)} d_{jk}(\theta) \chi_k(\omega_v, \theta) \overline{\varphi_j(\omega_u, \theta)} d\theta d\tau. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $\tau = ts$ и положим

$$\begin{aligned} & I_{jk}(t, s) \\ &= |\tilde{\Omega}|^{-1} \int_{\tilde{\Omega}} e^{-i\langle \gamma_u - \gamma_v, \theta \rangle} e^{t(1-s)\lambda_k^0(\theta) + ts\lambda_j(\theta)} d_{jk}(\theta) \chi_k(\omega_v, \theta) \overline{\varphi_j(\omega_u, \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Рассмотрим вклад от слагаемых при $j \neq 1$ и $k \neq 1$. Заметим, что для любого $s \in [0, 1]$ и всех $j \neq 1$, $k \neq 1$ существует такое $\delta_1 > 0$, что при всех $\theta \in \tilde{\Omega}$ выполнено

$$(1-s)\lambda_k^0(\theta) + s\lambda_j(\theta) \leq \max(\sup_{\theta \in \tilde{\Omega}} \lambda_2^0(\theta), \sup_{\theta \in \tilde{\Omega}} \lambda_2(\theta)) = -\delta_1 < 0,$$

откуда следует, что

$$\left| t \int_0^1 I_{jk}(t, s) ds \right| \leq C t e^{-\delta_1 t}.$$

Теперь рассмотрим вклад от слагаемого при $j = 1$ и $k \neq 1$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, что при $\|\theta\| > \varepsilon$ и всех $s \in [0, 1]$ выполнено

$$(1-s)\lambda_k^0(\theta) + s\lambda_1(\theta) \leq \max(\sup_{\theta \in \tilde{\Omega}} \lambda_2^0(\theta), \sup_{\|\theta\| > \varepsilon} \lambda_1(\theta)) = -\delta_2 < 0,$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{t}{|\tilde{\Omega}|} \int_0^1 \int_{\|\theta\| > \varepsilon} e^{-i\langle \gamma_u - \gamma_v, \theta \rangle} e^{t(1-s)\lambda_k^0(\theta) + ts\lambda_1(\theta)} d_{1k}(\theta) \chi_k(\omega_v, \theta) \overline{\varphi_1(\omega_u, \theta)} d\theta ds \right| \leq C t e^{-\delta_2 t}.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\lambda_1(\theta) > \lambda_k^0(\theta)$ при всех $k \neq 1$ и $\|\theta\| \leq \varepsilon$. Для оставшегося интеграла по области $\|\theta\| \leq \varepsilon$ поменяем порядок интегрирования и проинтегрируем по переменной s . Имеем

$$|\tilde{\Omega}|^{-1} \int_{\|\theta\| \leq \varepsilon} \frac{e^{t\lambda_1(\theta)} - e^{t\lambda_k^0(\theta)}}{\lambda_1(\theta) - \lambda_k^0(\theta)} e^{-i\langle \gamma_u - \gamma_v, \theta \rangle} d_{1k}(\theta) \chi_k(\omega_v, \theta) \overline{\varphi_1(\omega_u, \theta)} d\theta,$$

к полученному интегралу применим многомерный метод Лапласа (см. теорему 4.1, [10]). Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$t \int_0^1 I_{1k}(t, s) ds = \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{d/2} \frac{d_{1k}(0) \chi_k(\omega_v, 0) \varphi_1(\omega_u, 0)}{|\tilde{\Omega}| \sqrt{|\text{Hess } \lambda_1(0)|} (-\lambda_k^0(0))} (1 + o(1)).$$

Аналогичное утверждение справедливо для слагаемых при $j \neq 1$ и $k = 1$. Имеем при $t \rightarrow \infty$

$$t \int_0^1 I_{j1}(t, s) ds = \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{d/2} \frac{d_{j1}(0) \chi_1(\omega_v, 0) \overline{\varphi_j(\omega_u, 0)}}{|\tilde{\Omega}| \sqrt{|\text{Hess } \lambda_1^0(0)|} (-\lambda_j(0))} (1 + o(1)).$$

Осталось рассмотреть слагаемое с $j = 1$ и $k = 1$. Заметим, что при любом $s \in [0, 1]$ точка $\theta = 0$ является невырожденным максимумом функции $(1 - s) \lambda_1^0(\theta) + s \lambda_1(\theta)$. Тогда, применяя метод Лапласа для многомерного интеграла с параметром (теорема 4.4, [10]) к $I_{11}(t, s)$, при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$I_{11}(t, s) = \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{d/2} \frac{d_{11}(0) \varphi_1(\omega_u, 0) \chi_1(\omega_v, 0)}{|\tilde{\Omega}| \sqrt{|\text{Hess}((1 - s) \lambda_1^0(0) + s \lambda_1(0))|}} (1 + o(1)),$$

где

$$d_{11}(0) = \langle \alpha(\cdot) \varphi_1(\cdot, 0), \chi_1(\cdot, 0) \rangle_{\mathbf{C}^p} = \sum_{w \in \Omega} \alpha(w) \varphi_1(w, 0) \chi_1(w, 0) > 0.$$

В силу того, что при всех $s \in [0, 1]$ функция $(1 - s) \lambda_k^0(\theta) + s \lambda_j(\theta)$ достигает своего максимума в точке $\theta = 0$, полученная асимптотика является равномерной по параметру $s \in [0, 1]$ (см. теорему 4.4, [10]). Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$t \int_0^1 I_{11}(t, s) ds = \left(\frac{1}{t} \right)^{d/2-1} \int_0^1 \frac{(2\pi)^{d/2} d_{11}(0) \varphi_1(\omega_u, 0) \chi_1(\omega_v, 0) ds}{|\tilde{\Omega}| \sqrt{|\text{Hess}((1 - s) \lambda_1^0(0) + s \lambda_1(0))|}} (1 + o(1)).$$

Таким образом, для $m(t, v, u)$ при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$m(t, v, u) = \left(\frac{1}{t} \right)^{d/2-1} \int_0^1 \frac{(2\pi)^{d/2} d_{11}(0) \varphi_1(\omega_u, 0) \chi_1(\omega_v, 0) ds}{|\tilde{\Omega}| \sqrt{|\text{Hess}((1 - s) \lambda_1^0(0) + s \lambda_1(0))|}} (1 + o(1)). \quad \square$$

§4. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с иммиграцией на $\mathbf{Z}$ с источниками ветвления, расположенными в каждой точке с нулевой интенсивностью. Предположим, что интенсивность иммиграции не зависит от точки решетки и равна $\alpha > 0$. Перемещение в пространстве определим с помощью однородного марковского процесса на $\mathbf{Z}$ с непрерывным временем и равновероятными

переходами только в соседние вершины, то есть

$$a_1(v, u) = \begin{cases} -\varkappa, & v = u, \\ \frac{\varkappa}{2}, & |u - v| = 1, \\ 0, & |v - u| \geq 2, \end{cases}$$

где $\varkappa > 0$.

Перемещение центра иммиграции в пространстве определим аналогично с помощью однородного марковского процесса на $\mathbf{Z}$ с непрерывным временем и равновероятными переходами только в соседние вершины, то есть

$$a_0(v, u) = \begin{cases} -1, & v = u, \\ \frac{1}{2}, & |v - u| = 1, \\ 0, & |v - u| \geq 2. \end{cases}$$

В качестве фундаментального множества вершин в этом случае можно выбрать одноточечное множество, состоящее из 0, а в качестве элементарной ячейки двойственной решетки $-\tilde{\Omega} = [-\pi, \pi)$. Тогда $|\tilde{\Omega}| = 2\pi$.

В этом случае оператор $A_1(\theta)$ – это оператор умножения на функцию $\varkappa(\cos \theta - 1)$, а оператор $A_0(\theta)$ – оператор умножения на функцию $\cos \theta - 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} m(v, u, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos \theta - 1)(t - \tau)} \alpha e^{\varkappa(\cos \theta - 1)\tau} e^{-i\theta(u - v)} d\theta d\tau \\ &= \alpha \int_0^t e^{-(\varkappa - 1)\tau - t} I_{u - v}(t + (\varkappa - 1)\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos x} \cos(nx) dx$, $n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{Re} z > 0$ – модифицированная функция Бесселя первого рода.

При $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2}$ и $|z| \rightarrow \infty$ известно, что $I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} (1 + O(\frac{1}{z}))$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$m(v, u, t) = \alpha \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi(t + (\varkappa - 1)\tau)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t + (\varkappa - 1)\tau}\right) \right) d\tau$$

$$= \alpha t \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2\pi t(1 + (\varkappa - 1)s)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{2}\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\varkappa} + 1)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. Б. Яровая, *Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве*. — Теор. матем. физ. **88** (1991), 25–30.
2. S. Albeverio, L. V. Bogachev, E. B. Yarovaya, *Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source*. — C. R. Acad. Sci. Paris **326** (1998), 978–980.
3. И. И. Христюков, Е. Б. Яровая, *Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности*. — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 3 (2019), 456–480.
4. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, М., ЦПИ при мехмате Моск. ун-та, 2007.
5. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*. — Успехи матем. наук **77** (2022), 193–194.
6. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, *Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления*. — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 2 (2019), 283–307.
7. И. И. Лукашова, *Периодические ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с иммиграцией*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **526** (2023), 90–108.
8. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, М., Наука, 1971.
9. M. Reed, B. Simon, IV: *Analysis of Operators*, Amsterdam, Elsevier, 1978.
10. М. В. Федорюк, *Метод перевала* М., Наука, 1977.

Lukashova I. I. Critical periodic branching random walk on $\mathbf{Z}^d$ with immigration.

We consider a continuous-time branching random walk with immigration on $\mathbf{Z}^d$ with branching sources located periodically. The asymptotic behavior of the mean number of particles at an arbitrary point is obtained for $t \rightarrow \infty$ in the critical case.

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института им. В.А. Стеклова,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия;
Международный математический институт
им. Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilukashova072@gmail.com

Поступило 14 октября 2025 г.