

А. С. Лотников

## СРЕДНЕЕ РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ТОЧКАМИ В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим выпуклое тело  $K \subset \mathbb{R}^d$ , то есть выпуклый компакт с непустой внутреннейностью.

В 1864 году Дж. Сильвестр сформулировал следующую задачу геометрической вероятности. Пусть внутри выпуклого плоского тела  $K$  случайно и независимо выбраны четыре точки

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in K.$$

Требуется найти вероятность того, что их выпуклая оболочка  $\text{conv}(X_1, X_2, X_3, X_4)$  является треугольником. Эта вероятность зависит от формы  $K$ .

В 1918 году В. Бляшке [1] установил, что для любого выпуклого тела  $K \subset \mathbb{R}^2$  выполнены оценки

$$\frac{35}{12\pi^2} \leq \mathbb{P}(\text{conv}(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ — треугольник}) \leq \frac{1}{3},$$

причем левая граница достигается на эллипсах, а правая — на треугольниках. Данная задача является одним из первых примеров применения вероятностных методов в выпуклой геометрии и положила начало направлению, ныне известному как геометрическая вероятность.

Указанное неравенство допускает переформулировку через среднюю площадь случайного треугольника:

$$P(\text{conv}(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ — треугольник}) = 4 \cdot \frac{\mathbb{E} \text{ area conv}(X_1, X_2, X_3)}{\text{area}(K)}.$$

---

*Ключевые слова:* выпуклые тела, геометрическая вероятность, среднее расстояние, случайные точки, центральная симметрия, стохастическое мажорирование, изопериметрическое неравенство, случайные сечения, интегральная геометрия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН)..

Следовательно, результат Бляшке эквивалентен неравенству

$$\frac{35}{48\pi^2} \leq \frac{\mathbb{E} \text{area conv}(X_1, X_2, X_3)}{\text{area}(K)} \leq \frac{1}{12},$$

дающему точные границы для нормированной средней площади случайного треугольника, построенного на точках, равномерно распределенных внутри  $K$ .

Подобные подходы естественно приводят к рассмотрению функционалов, связанных со средним расстоянием между случайными точками. В частности, изучалось среднее расстояние между двумя случайными точками внутри выпуклого тела. Пусть

$$\Delta(K) = \mathbb{E} |I_1 I_2|,$$

где  $I_1, I_2$  – две независимые случайные точки, выбранные равномерно внутри тела  $K$  относительно соответствующей меры Лебега. Через  $\Delta^p(K)$  обозначим математическое ожидание  $p$ -й степени соответствующего расстояния. В работе [2] (Bonnet, Gusakova, Thäle, Zaporozhets, 2021) было установлено, что

$$\frac{7}{60} < \frac{\Delta(K)}{|\sigma K|} < \frac{1}{6}, \quad (1)$$

где  $|\sigma K|$  обозначает площадь поверхности тела. Обе границы являются асимптотически достижимыми: нижняя – для вырождающихся равнобедренных треугольников, а верхняя – для последовательности прямоугольников, стремящихся к отрезку. Приведен двумерный вариант результата; в работе представлен более общий факт, справедливый в произвольной размерности.

Аналогичный функционал определен для случайных точек на границе тела. Пусть

$$\theta(K) = \mathbb{E} |B_1 B_2|,$$

где  $B_1, B_2$  – независимые точки, равномерно распределенные на  $\sigma K$  согласно соответствующей мере Лебега. Определение  $\theta^p(K)$  вводится аналогично  $\Delta^p(K)$ . В 2022 году А. С. Токмачев [3] установил, что для плоских выпуклых тел справедливо неравенство

$$\frac{\theta(K)}{|\sigma K|} \leq \frac{2}{\pi^2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $K$  – круг. Таким образом, круг максимизирует среднее расстояние между двумя случайными граничными точками при фиксированном периметре.

Д. Н. Запорожец и А. Тарасов в 2019 году выдвинули естественную гипотезу о сравнении внутренних и граничных функционалов:

**Гипотеза 1.1.** *Для любого выпуклого тела  $K$  выполнено*

$$\Delta(K) < \theta(K).$$

Данная гипотеза может быть сформулирована также для всех моментов:

**Гипотеза 1.2.** *Для любого выпуклого тела  $K$  и любого  $p \in \mathbb{N}$  выполнено*

$$\Delta^p(K) \leq \theta^p(K).$$

Из (1) следует, что для проверки гипотезы 1.1 достаточно показать справедливость следующего предположения, выдвинутого А. Г. Гусакowej и Д. Н. Запорожцем.

**Гипотеза 1.3.** *Для любого выпуклого тела  $K$  выполнено*

$$\frac{1}{6} \leq \frac{\theta(K)}{|\sigma K|}.$$

Однако данное утверждение также остается гипотезой.

Несмотря на простоту формулировки, гипотеза 1.1 остается открытой. В настоящее время неизвестно ни доказательства, ни контрпримера даже в размерности 2. Не установлена ее справедливость ни для гладких тел, ни для многоугольников. Таким образом, данная гипотеза остается одной из открытых проблем в этой области.

К изучению описанных функционалов можно подойти через исследование случайных хорд и сечений выпуклых тел. В 1969 году Дж. Кингман [4] установил фундаментальную связь между моментами расстояний между случайными внутренними точками тела и моментами длин его случайных хорд:

$$\mathbb{E}|II'|^p = \frac{d\kappa_d}{(d+p)(d+p+1)} J_{d+p+1},$$

где  $\kappa_d$  – объем единичного шара в  $\mathbb{R}^d$ , а  $J_n = \mathbb{E}|\text{хорда}|^n$  –  $n$ -й момент длины случайной хорды тела  $K$ . Случайная хорда понимается как пересечение тела со случайной прямой, выбранной среди всех прямых,

пересекающих тело, согласно мере Хаара на пространстве прямых. Данная формула устанавливает количественную зависимость между внутренними и линейными характеристиками выпуклого тела и показывает, что поведение расстояний между случайными точками тесно связано с геометрией его сечений.

Позднее этот результат был существенно развит. В работе [5] Н. Агаронян и В. Оганяна (2016) в размерности  $d = 2$ , а затем в работе [6] Т. Д. Мосеевой (2019) в произвольной размерности было показано, что распределение длин случайных хорд выражается через распределение длин случайных сечений. Пусть  $F_K(x)$  обозначает функцию распределения длины случайного сечения, а  $F_K^{(\rho)}(x)$  – функцию распределения длины  $|II'|$ . Тогда для  $K \subset \mathbb{R}^d$  выполняется равенство

$$F_K^{(\rho)}(x) = \frac{1}{|\sigma K|} \left( \frac{\omega_d}{d} x^d - \frac{|K|}{|\sigma K|} \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} x^{d+1} + \frac{|K|}{|\sigma K|} \frac{\kappa_{d-1}}{d} \int_0^x (x^d - t^d) F_K(t) dt \right),$$

где  $\omega_d$  – площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^d$ ,  $\kappa_{d-1}$  – объем единичного шара в  $\mathbb{R}^{d-1}$ , а  $|K|$  и  $|\sigma K|$  обозначают, соответственно, объем и  $(d-1)$ -мерную меру поверхности тела  $K$ .

Настоящая работа направлена на изучение гипотезы 1.1. Рассмотрен частный случай – центрально-симметричные плоские тела, для которых удастся получить более сильные результаты. В частности, показано, что для таких тел имеет место неравенство не только для средних расстояний, но и более общие утверждения в терминах стохастического мажорирования. Также представлены аналоги формул Оганяна и Мосеевой в данной задаче, из которых получены более точные результаты. Кроме того, приведены результаты для произвольных плоских тел.

Введем обозначения, используемые в дальнейшем. Через  $K$  обозначено рассматриваемое выпуклое тело, через  $|K|$  – его объем, через  $|\sigma K|$  – площадь поверхности. Буквой  $I$  обозначена точка, выбранная случайно согласно равномерному распределению на внутренности рассматриваемого тела. Через  $B$  обозначена случайная точка, взятая равномерно на границе тела в соответствии с мерой Лебега границы. Через  $P_u(A)$  обозначена ортогональная проекция множества точек  $A$  на прямую, проходящую через 0 в направлении  $u$ .

Для любой точки  $O \in K$  определено проективное распределение – распределение случайной точки на границе, полученной проекцией случайной внутренней точки  $I$  на границу с центром в точке  $O$ . Соответствующая величина обозначена  $B_O$ . Для любой величины  $X$  через  $X'$  обозначена независимая копия величины  $X$ , не зависящая от уже введенных величин.

## §2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящем параграфе приведены основные результаты работы. Начнем с центрально-симметричного случая, где гипотеза полностью доказывается в терминах стохастического мажорирования.

### 2.1. Центральнo-симметричный случай.

**Теорема 2.1.** *Для любого центрально-симметричного тела  $K \subset \mathbb{R}^2$  с центром симметрии  $O$  и для любого направления  $u$  выполнено*

$$|P_u(OB)| \succ |P_u(OI)|.$$

**Следствие 2.1.** *Для любого  $n \geq 0$  выполнено  $\mathbb{E}|OB|^n \geq \mathbb{E}|OI|^n$ .*

**Следствие 2.2.** *Для любого  $n \geq 1$  выполнено  $\mathbb{E}|BB'|^n \geq \mathbb{E}|II'|^n$ .*

Таким образом, в случае плоских центрально-симметричных тел гипотеза Запорожца–Тарасова подтверждается.

### 2.2. Случай описанного многоугольника.

**Теорема 2.2.** *Для любого выпуклого тела  $K \subset \mathbb{R}^d$ , где  $O \in K$  – некоторая фиксированная внутренняя точка, выполнены следующие утверждения.*

(1) *Для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство*

$$\mathbb{E}|II'|^n = \frac{2d}{n+2d} \cdot \mathbb{E}|IB_O|^n.$$

(2) *Характеристические функции связаны соотношением*

$$\mathbb{E} \exp(it \cdot |IB_O|) = \frac{\frac{d}{dt} [t^{2d} \cdot \mathbb{E} \exp(it \cdot |II'|)]}{2d \cdot t^{2d-1}}.$$

(3) Для расстояний до центра справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|OI|^n &= \frac{d}{n+d} \cdot \mathbb{E}|OB_O|^n, \\ \mathbb{E} \exp(it \cdot |OB_O|) &= \frac{\frac{d}{dt} [t^d \cdot \mathbb{E} \exp(it \cdot |IO|)]}{d \cdot t^{d-1}}.\end{aligned}$$

**Утверждение 2.1.** Для любого описанного тела  $K \subset \mathbb{R}^d$  с центром вписанной сферы  $O$  выполнено

$$B_O \stackrel{d}{=} B.$$

**Утверждение 2.2.** Для любого центрально-симметричного тела  $K \subset \mathbb{R}^2$  и некоторой фиксированной точки  $O$  выполнено

$$\mathbb{E}|II'|^2 = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}|IB_O|^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}|B_O B'_O|^2.$$

**Следствие 2.3.** Для любого описанного центрально-симметричного многоугольника  $K$  выполнено

$$\mathbb{E}|II'|^2 = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}|IB|^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}|BB'|^2.$$

Данное равенство представляет собой точное соответствие между внутренними и граничными моментами второго порядка.

**2.3. Общий случай моментов высокого порядка.** Пусть  $K \subset \mathbb{R}^2$  – некоторое выпуклое тело. В этом случае имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.3.** (1) Если выполнено

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2(n+2)(n+3)}},$$

то справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|II'|^n \leq \mathbb{E}|BB'|^n.$$

(2) Если выполнено

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{4(n+3)},$$

то справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|II'|^n \leq \mathbb{E}|IB|^n.$$

(3) Если выполнено

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{2(n+2)},$$

то справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|IB|^n \leq \mathbb{E}|BB'|^n.$$

**Следствие 2.4.** Для любого выпуклого тела  $K \subset \mathbb{R}^2$  существует  $C_K > 0$ , такое что

$$\forall n > C_K \quad \mathbb{E}|II'|^n \leq \mathbb{E}|IB|^n \leq \mathbb{E}|BB'|^n.$$

Таким образом, для моментов высоких порядков имеют место исследуемые неравенства.

### §3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ

Доказательства всех приводимых в дальнейшем утверждений существенно упрощаются для многоугольников. Известно, что любое выпуклое тело может быть приближено изнутри выпуклыми многоугольниками в метрике Хаусдорфа; требуется установить непрерывность всех функционалов в этой метрике.

В работе А. С. Токмачева [3] показано, что функционал  $\theta^p$  непрерывен в метрике Хаусдорфа. Непрерывность функционалов  $|K|$  и  $|\sigma K|$  считается известной. Рассмотрим функционал  $\Delta^p$ .

Как отмечено во введении, непрерывным в общем смысле этот функционал не является, но справедливо более слабое утверждение:

**Утверждение 3.1.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая функция, ограниченная на любом отрезке  $[0, C]$ . Пусть  $K_i \subset \mathbb{R}^d$  при  $i = 1, 2, 3, \dots$  — последовательность выпуклых тел, сходящихся по метрике Хаусдорфа к телу  $K \subset \mathbb{R}^d$ , такому что  $|K| > 0$ . Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{K_i} f(|II'|) = \mathbb{E}_K f(|II'|).$$

**Доказательство.** Пусть  $A_i = K_i \cap K$ ,  $B_i = K \setminus K_i$ . Обозначим через  $I$  случайную точку, взятую согласно равномерному распределению внутри  $K$ . Через  $I_i$  обозначена точка, равномерно распределенная в  $A_i$ . Через  $X_i$  обозначена случайная точка, равномерно распределенная внутри  $B_i$ . Все точки предполагаются независимыми. В этих

обозначениях

$$\mathbb{E} f(|II'|) = \frac{|A_i|^2}{|K|^2} \cdot \mathbb{E} f(|I_i I'_i|) + \frac{2|A_i||B_i|}{|K|^2} \cdot \mathbb{E} f(|I_i X_i|) + \frac{|B_i|^2}{|K|^2} \cdot \mathbb{E} f(|X_i X'_i|).$$

Из условия сходимости в метрике Хаусдорфа следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |A_i| = |K|, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |B_i| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|A_i|}{|K|} = 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|B_i|}{|K|} = 0.$$

Поскольку  $f$  ограничена и диаметр тела конечен, последние слагаемые стремятся к нулю по теореме о мажорируемой сходимости.  $\square$

В частности, это утверждение применяется для стандартного приближения выпуклых тел многоугольниками изнутри и  $f(x) = |x|^n$ , что позволяет проводить доказательства утверждений для многоугольников.

#### §4. ОДНОМЕРНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде чем переходить к доказательству двумерных и многомерных результатов, изучим средние расстояния между двумя точками, независимо выбранными согласно одномерному центрально-симметричному распределению общего вида. В дальнейшем все конструкции сводятся именно к этому случаю. Поскольку существенно лишь расстояние между точками или расстояние до центра симметрии, последний можно без ограничения общности принять равным нулю, применив сдвиг распределения.

**Определение 4.1.** Пусть задано симметричное относительно 0 распределение  $P$  на  $\mathbb{R}$ . Его половиной называется распределение  $P_{1/2}$  на  $\mathbb{R}_+$ , такое что

$$\forall A \subset \mathbb{R}_+ \quad P_{1/2}(A) = 2 \cdot P(A).$$

По сути  $P_{1/2}$  является распределением  $|X|$ , где  $X \sim P$ .

**Определение 4.2.** Говорят, что распределение  $P$  стохастически мажорирует распределение  $Q$  (обозначается  $P \succ Q$ ), если для любого  $t \in \mathbb{R}$  справедливо

$$P(t, \infty) \geq Q(t, \infty).$$

**Определение 4.3.** Центральное-симметричное распределение  $P$  называется шире центрально-симметричного распределения  $Q$ , если  $P_{1/2} \succ Q_{1/2}$ .

Центрально-симметричное распределение по существу фиксируется своей половиной, поэтому естественно изучать свойства  $P$  в терминах  $P_{1/2}$ . Следующее утверждение формализует эту связь.

**Утверждение 4.1.** Пусть  $P$  – симметричное относительно 0 распределение,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – некоторая функция. Пусть  $X, Y \sim P$  и независимы, а  $X_{1/2}, Y_{1/2} \sim P_{1/2}$  и также независимы между собой и с уже введенными величинами. Тогда

$$\mathbb{E} f(|X - Y|) = \mathbb{E} \left[ \frac{f(|X_{1/2} - Y_{1/2}|) + f(|X_{1/2} + Y_{1/2}|)}{2} \right].$$

**Доказательство.** Пусть  $S_1, S_2$  – независимые между собой и с уже введенными величинами бинарные переменные, равные с вероятностью  $\frac{1}{2}$  единице и с вероятностью  $\frac{1}{2}$  минус единице. Имеет место равенство по распределению  $X \stackrel{d}{=} S_1 X_{1/2}$ , а также  $Y \stackrel{d}{=} S_2 Y_{1/2}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f(|X - Y|) &= \mathbb{E} f(|S_1 X_{1/2} - S_2 Y_{1/2}|) \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{f(|X_{1/2} - Y_{1/2}|) + f(|-X_{1/2} + Y_{1/2}|) + f(|X_{1/2} + Y_{1/2}|) + f(|-X_{1/2} - Y_{1/2}|)}{4} \right] \\ &= \frac{\mathbb{E} f(|X_{1/2} - Y_{1/2}|) + \mathbb{E} f(|X_{1/2} + Y_{1/2}|)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Интуитивно, более широкое распределение должно порождать большие расстояния между независимыми точками. Естественным проявлением этого было бы стохастическое доминирование расстояния между первой парой точек над расстоянием между второй; однако такое утверждение неверно в общем случае. Интуиция реализуется в следующем утверждении.

**Утверждение 4.2.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — неубывающая не строго выпуклая функция. Пусть  $P, Q$  — два симметричных относительно 0 распределения, причем  $P$  шире  $Q$ . Пусть  $X, X' \sim P$ , а  $Y, Y' \sim Q$  и независимы друг от друга. Тогда

$$\mathbb{E} f(|X - X'|) \geq \mathbb{E} f(|Y - Y'|).$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $\mathbb{E} f(|X - X'|)$ . По доказанному утверждению

$$\mathbb{E} f(|X - X'|) = \mathbb{E} \left[ \frac{f(|X_{1/2} - X'_{1/2}|) + f(|X_{1/2} + X'_{1/2}|)}{2} \right].$$

Рассмотрим  $Q(x, y) = \frac{f(|x - y|) + f(|x + y|)}{2}$ . Функция  $Q$  возрастает по обоим переменным на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . В силу симметричности достаточно показать только возрастание по  $x$ .

Первый случай:  $x \geq y$ .

$$Q(x, y) = \frac{f(x - y) + f(x + y)}{2}.$$

Функция не убывает, так как  $f$  не убывает.

Второй случай:  $x_1 < x_2 \leq y$ .

$$\frac{f(y - x_1) + f(x_1 + y)}{2} \leq \frac{f(y - x_2) + f(x_2 + y)}{2}.$$

Сумма аргументов в правой и левой части равна  $2y$ , а разность в левой части равна  $2x_1$ , в правой —  $2x_2$ . Требуемое следует из того, что сумма значений выпуклой функции при сближении аргументов с сохранением суммы уменьшается.

Осталось показать, что существует возрастающая функция  $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , такая что  $X_{1/2} \stackrel{d}{=} F(Y_{1/2})$ .

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |X - X'| &= \mathbb{E} Q(X_{1/2}, X'_{1/2}) = \mathbb{E} Q(F(Y_{1/2}), F(Y'_{1/2})) \\ &\geq \mathbb{E} Q(Y_{1/2}, Y'_{1/2}) = \mathbb{E} |Y - Y'|. \end{aligned}$$

Такое отображение  $F$  действительно существует. Пусть  $F_{X_{1/2}}, F_{Y_{1/2}}$  — функции распределения соответствующих величин. Тогда согласно

свойствам преобразования Смирнова

$$X_{1/2} \stackrel{d}{=} F_{X_{1/2}}^{-1} F_{Y_{1/2}}(Y_{1/2}).$$

Монотонность преобразования гарантируется стохастической мажоризацией.  $\square$

В частности, лемма применима к функциям  $f(t) = t^n, n \geq 1$ , что в дальнейшем позволяет сравнивать моменты расстояний между различными случайными точками.

**Утверждение 4.3.** Пусть  $P, Q$  — два симметричных распределения, причем  $P$  шире  $Q$ . Пусть  $X, X' \sim P, Y, Y' \sim Q$  и независимы друг от друга. Тогда:

- (1)  $\forall n > 0 \quad \mathbb{E}|X|^n \geq \mathbb{E}|Y|^n.$
- (2)  $\forall n \geq 1 \quad \mathbb{E}|X - X'|^n \geq \mathbb{E}|Y - Y'|^n.$

**Доказательство.** Первое утверждение следует напрямую из определения соотношения ширины.

Второе следует напрямую из предыдущего утверждения.  $\square$

## §5. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В настоящем параграфе изучаются центрально-симметричные плоские тела. Приведены результаты для большинства вопросов, связанных с этим случаем. Прежде всего, представлено утверждение, позволяющее свести двумерный случай к одномерному.

**Утверждение 5.1.** Пусть  $X, Y$  — пара случайных точек, имеющих некоторое (возможно зависимое) распределение. Тогда

$$\mathbb{E}|XY|^n = c_n \int_0^\pi \mathbb{E}|P_u(XY)|^n,$$

$$\text{где } c_n = \left[ \int_0^\pi |\cos(x)|^n dx \right]^{-1}.$$

**Доказательство.** Данное утверждение следует из теоремы Фубини:

$$\begin{aligned} c_n \int_0^\pi \mathbb{E} |P_u(XY)|^n &= c_n \mathbb{E} \int_0^\pi |P_u(XY)|^n \\ &= c_n \mathbb{E} \int_0^\pi |\cos(u)|^n \cdot |XY|^n du = \mathbb{E} |XY|^n \cdot c_n \cdot \int_0^\pi |\cos(u)|^n = \mathbb{E} |XY|^n. \quad \square \end{aligned}$$

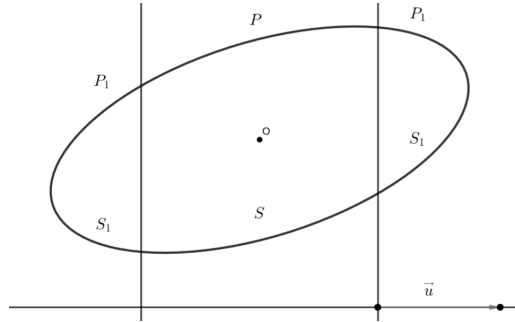
Следовательно, для изучения моментов достаточно изучать лишь моменты расстояний между проекциями. В этом используется следующая лемма.

**Лемма 5.1.** Пусть  $K$  – непустое выпуклое тело, центрально-симметричное относительно точки  $O$ . Пусть также выбрано некоторое направление  $u$ . Пусть прямые  $l_1, l_2$  центрально-симметричны друг другу относительно точки  $O$  и перпендикулярны  $u$ . Часть плоскости, заключенная между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , обозначим  $H$ . Тогда выполнено неравенство

$$\frac{|\sigma K \cap H|}{|\sigma K|} \leq \frac{|K \cap H|}{|K|}.$$

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть центрально-симметричные многоугольники, поскольку переход к пределу по метрике Хаусдорфа в неравенстве не составляет труда, как обсуждалось в §1.

Полуплоскость, примыкающую к  $l_1$  и не содержащую  $O$ , обозначим  $H_-$ , а центрально-симметричную ей относительно  $O$  –  $H_+$ . Пусть  $P_1 = |\sigma K \cap H_+|$ ,  $P = |\sigma K \cap H|$ ,  $S_1 = |K \cap H_+|$ ,  $S = |K \cap H|$ . Тогда  $|K| = S + 2S_1$ ,  $|\sigma K| = P + 2P_1$ .



Заявленное утверждение эквивалентно следующему:

$$\frac{S_1}{P_1} \leq \frac{|K|}{|\sigma K|}.$$

Введем координатную параметризацию прямой  $l_1$ , двигающейся от положения касания тела до положения прохождения через центр симметрии. Координата определяется как пересечение  $l_1$  с прямой, сонаправленной с  $u$ ; координаты выбраны так, что 0 соответствует моменту касания, а 1 – моменту прохождения через центр симметрии. Прямая в момент  $t$  обозначена  $l_1(t)$ . Аналогично определены  $S_1(t)$  и  $P_1(t)$ . Требуется показать, что

$$\forall 0 \leq t \leq 1 \quad \frac{S_1(t)}{P_1(t)} \leq \frac{S_1(1)}{P_1(1)} = \frac{|K|}{|\sigma K|}.$$

Достаточно проверить неубывание функции  $R(t) = \frac{S_1(t)}{P_1(t)}$ . Функция  $R(t)$  кусочно дифференцируема, а точки отсутствия производной совпадают с моментами, когда  $l_1(t)$  проходит через вершины многоугольника, так как  $S_1(t)$  дифференцируема, а  $P_1(t)$  дифференцируема везде, кроме указанных точек. Достаточно проверить неотрицательность производной во всех точках, где она существует.

$$\frac{d}{dt} R(t) = \frac{S'_1(t) P_1(t) - P'_1(t) S_1(t)}{P_1(t)^2} \geq 0 \iff \frac{S_1(t)}{P_1(t)} \leq \frac{S'_1(t)}{P'_1(t)}.$$

Имеем  $S'_1(t) = a(t)$  – длина отрезка пересечения  $K$  и  $l_1(t)$ . В то же время  $P'_1(t) = \frac{1}{\sin(\alpha_1(t))} + \frac{1}{\sin(\alpha_2(t))}$ , где  $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$  – углы между пересеченной стороной и  $l_1(t)$ .

Требуется проверить неравенство

$$\forall 0 \leq t \leq 1 \quad \frac{S_1(t)}{P_1(t)} \leq \frac{A(t)}{\frac{1}{\sin(\alpha_1(t))} + \frac{1}{\sin(\alpha_2(t))}}.$$

Данное неравенство усиливается до

$$\forall 0 \leq t \leq 1 \quad \frac{S_1(t)}{P_1(t)} \leq \frac{A(t) \cdot \min(\alpha_1(t), \alpha_2(t))}{2}.$$

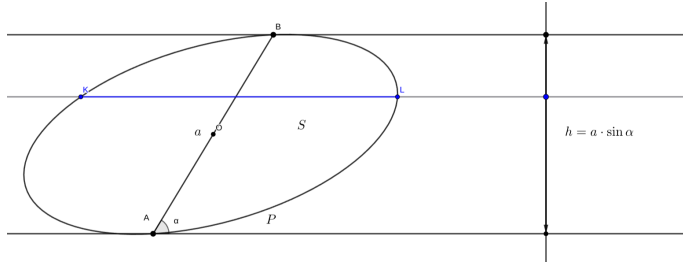
Для этого рассмотрим полосу, образованную двумя параллельными прямыми, и отрезок на ней. Предположим, что в одну из полученных

полуполос помещена выпуклая фигура, содержащая весь отрезок длины  $a$  в своей границе. Пусть ее площадь равна  $\hat{S}$ , периметр (без длины отрезка) –  $\hat{P}$ , угол между отрезком и основаниями полос –  $\alpha$ .

Тогда

$$\hat{S} \leq \frac{\hat{P} \cdot a \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Для обоснования построим вторую дугу, центрально-симметричную данной относительно середины отрезка. Полученная фигура имеет площадь вдвое больше исходной. Обозначения соответствуют рисунку.



Представим ее площадь в виде интеграла:

$$2S = \int_0^h |K \cap l(x)| dx \leq \int_0^h P dx = Ph = P \cdot a \sin \alpha.$$

Отсюда следует требуемое, поскольку длина любого сечения не превосходит половины длины периметра фигуры.  $\square$

Из геометрической леммы получается множество полезных вероятностных следствий.

**Следствие 5.1.** Пусть  $K$  – центрально-симметричное выпуклое тело с центром в точке  $O$ , а  $u$  – некоторое направление. Тогда:

- (1)  $|P_u(OB)| \succ |P_u(OI)|$ .
- (2)  $P_u(B)$  шире  $P_u(I)$ .
- (3)  $\forall n > 0 \quad \mathbb{E}|OB|^n > \mathbb{E}|OI|^n$ .
- (4)  $\forall n > 1 \quad \mathbb{E}|BB'|^n > \mathbb{E}|II'|^n$ .

**Доказательство.** Утверждение (1) по определению эквивалентно описанной лемме, второе выводится из первого по определению, а утверждения (3) и (4) получаются из второго применением утверждений 5.1 и 4.3.  $\square$

Таким образом доказаны все заявленные результаты для центрально-симметричных тел.

## §6. ПРОЕКТИВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Настоящий параграф посвящен поиску более точных соотношений. Изучается вопрос о том, при каких условиях можно точно вычислить отношение между моментами средних расстояний. Результаты такого рода требуют иной техники и более жестких ограничений. Однако в процессе исследования получены результаты для ранее не изучавшихся объектов.

Основная трудность возникает при попытке найти параметр, по которому удобно разложить конструкцию. Большинство стандартных величин, таких как декартовы координаты или углы с различными направлениями, имеют сложно выражающиеся плотности и взаимные зависимости, что затрудняет анализ.

Первая цель – построение параметризации точек внутри выпуклого тела, удобной для дальнейших вычислений.

**6.1. Гомотетичные координаты.** В дальнейшем используется функционал Минковского; приведем его определение.

**Определение 6.1** (Функционал Минковского). *Для любого векторного пространства  $X$  и его подмножества  $K$  функционал Минковского  $\mu_K : X \rightarrow [0, \infty)$  определяется как*

$$\mu_K(x) = \inf \{r > 0 : x \in rK\}.$$

**Определение 6.2.** *Пусть зафиксирована некоторая выпуклая фигура  $K \subset \mathbb{R}^d$  и точка  $O \in K$ . Тогда любая точка  $T \in K$ ,  $T \neq O$  задается следующим образом:*

$$T \sim (\alpha, s), \quad \alpha \in [0, 1], \quad s \in S^{d-1},$$

где  $s$  определяет направление вектора  $OT$ . Пусть луч  $OT$  пересекает

$K$  в точке  $T_B$ . Тогда  $\alpha := \frac{OT}{OT_B}$  – функционал Минковского для точки

в системе координат с началом отсчета в точке  $O$  относительно множества  $K$ . Координата  $\alpha$  является по сути коэффициентом гомотетии с центром в точке  $O$ , при которой точка  $T$  попадает на образ границы.

Полученная параметризация имеет прямоугольную область определения. Более того, она обладает следующими свойствами.

**Утверждение 6.1.** Пусть точка  $I$  распределена внутри  $K$  пропорционально мере Лебега. Тогда ее координаты  $I_\alpha$  и  $I_s$  независимы. Более того, распределение  $I_\alpha$  имеет плотность  $p(t) = d \cdot t^{d-1} \cdot 1_{[0,1]}$ .

**Доказательство.** Сперва покажем, что распределение  $\alpha$ -координаты совпадает с заявленным. Имеем

$$\mathbb{P}(I_\alpha \leq t) = t^d,$$

поскольку для выполнения  $I_\alpha \leq t$  требуется, чтобы точка  $I$  попала в образ  $K$  при гомотетии с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $t$ , который имеет объем в  $t^d$  раз отличающийся от объема исходной фигуры. Из этого уравнения следует, что  $I_\alpha$  обладает заявленной плотностью.

Для установления независимости достаточно показать, что

$$\forall \alpha \in [0, 1], B \subset S^{d-1} \quad \mathbb{P}(I_s \in B | I_\alpha \leq t) = \mathbb{P}(I_s \in B). \quad (2)$$

Действительно, по определению условной вероятности

$$\mathbb{P}(I_s \in B | I_\alpha \leq t) = \frac{\mathbb{P}(I_s \in B, I_\alpha \leq t)}{\mathbb{P}(I_\alpha \leq t)}.$$

Обозначим через  $K_B$  конус с вершиной в точке  $O$  и основанием  $B$ . Через  $H_{O,t}(K)$  обозначен образ  $K$  при гомотетии с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $t$ . Тогда имеют место следующие равенства:

$$\frac{\mathbb{P}(I_s \in B, I_\alpha \leq t)}{\mathbb{P}(I_\alpha \leq t)} = \frac{\nu_n(K_s \cap H_{O,t}(K))}{\nu_n(H_{O,t}(K))} = \frac{\nu_n(K_s \cap K)}{\nu_n(K)} = \mathbb{P}(I_s \in B).$$

Предпоследний переход справедлив, поскольку при гомотетии с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $1/t$  множество  $K_s \cap H_{O,t}(K)$  переходит в  $K_s \cap K$ , а  $H_{O,t}(K)$  переходит в  $K$ , причем объемы изменяются в одинаковое число раз, следовательно, отношение сохраняется.

Используя это разложение, докажем теорему 2.2.

**6.2. Доказательство теоремы 2.2.** Сперва проверим последний пункт теоремы. Напомним, что нижний индекс  $\alpha$  означает взятие соответствующей координаты у точки внутри  $K$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E} |II'|^n &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [|II'|^n \mid (I_\alpha, I'_\alpha)]] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1, I'_\alpha = t_2] \cdot d^2 \cdot t_1^{d-1} t_2^{d-1} dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

Из свойств гомотетии и независимости  $\alpha$  и  $t$ -координат следует, что

$$\forall t_1 < t_2 \quad \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1, I_\alpha = t_2] = t_2^n \cdot \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1/t_2, I'_\alpha = 1].$$

Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}&= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{t_2} \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1, I'_\alpha = t_2] \cdot d^2 \cdot t_1^{d-1} t_2^{d-1} dt_1 dt_2 \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{t_2} \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1/t_2, I'_\alpha = 1] \cdot t_2^n \cdot d^2 \cdot t_1^{d-1} t_2^{d-1} dt_1 dt_2 \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{t_2} \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1/t_2, I'_\alpha = 1] \cdot d^2 \cdot (t_1/t_2)^{d-1} \cdot t_2^{n+2d-1} \frac{dt_1}{t_2} \cdot dt_2 \\ &= 2d \cdot \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1, I'_\alpha = 1] \cdot d \cdot t_1^{d-1} \cdot t_2^{n+2d-1} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{2d}{n+2d} \cdot \int_0^1 \mathbb{E} [|II'|^n \mid I_\alpha = t_1, I'_\alpha = 1] \cdot d \cdot t_1^{d-1} dt_1 \\ &= \frac{2d}{n+2d} \cdot \mathbb{E} |IB_O|^p.\end{aligned}$$

Второй пункт является практически прямым следствием первого. Действительно, для любой ограниченной случайной величины  $X$  ее характеристическая функция  $\varphi$  разлагается в ряд

$$\varphi(t) = \mathbb{E} e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E} X^k \cdot i^k}{k!} \cdot t^k.$$

В частности,

$$\begin{aligned}
\mu_{io}(t) &:= \mathbb{E} e^{it|IB_O|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |IB_O|^k \cdot i^k}{k!} \cdot t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |II'|^k \cdot i^k}{k!} \cdot \frac{k+2d}{2d} \cdot t^k \\
&= \frac{1}{t^{2d-1} \cdot 2d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |II'|^k \cdot i^k}{k!} \cdot (k+2d) \cdot t^{k+2d-1} \\
&= \frac{1}{t^{2d-1} \cdot 2d} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E} |II'|^k \cdot i^k}{k!} \cdot t^{k+2d} \right] \\
&= \frac{1}{t^{2d-1} \cdot 2d} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \mathbb{E} e^{it|II'|} \cdot t^{2d} \right].
\end{aligned}$$

Проверка третьего пункта осуществляется аналогично проверке первого:

$$\mathbb{E} |OI|^n = \mathbb{E} [\mathbb{E} [|OI|^n \mid I_\alpha]] = \int_0^1 \mathbb{E} [|OI|^n \mid I_\alpha = t] \cdot d \cdot t^{d-1} dt.$$

В силу свойств гомотетии  $\mathbb{E} [|OI|^n \mid I_\alpha = t] = \mathbb{E} [|OI| \mid I_\alpha = 1] \cdot t^n$ . Продолжим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathbb{E} [|OI|^n \mid I_\alpha = 1] \cdot d \cdot t^{d+n-1} dt \\
&= \frac{d}{n+d} \cdot \mathbb{E} [|OI| \mid I_\alpha = 1] = \frac{d}{n+d} \cdot \mathbb{E} |OB_O|^n.
\end{aligned}$$

Связь между характеристическими функциями выводится аналогично.

Из описанных результатов также получается следующее следствие.

**Следствие 6.1.** *Распределение  $|IB_O|$  не зависит от выбора точки  $O$ .*

**Доказательство.** Имеем

$$\mathbb{E} |IB_O|^n = \frac{n+2d}{2d} \cdot \mathbb{E} |II'|^n.$$

Следовательно, моменты распределения  $|IB_O|$  не зависят от выбора точки  $O$ , а распределения заведомо ограничены. Следовательно, совпадают и распределения.  $\square$

**6.3. О распределениях  $B_O$ .** Распределения  $B_O$  в случае выпуклых многогранников устроены следующим образом:

- (1) Они сконцентрированы на гранях размерности  $d - 1$ .
- (2) Распределение внутри каждой грани равномерно.
- (3) Равномерные распределения внутри граней смешиваются с весами, пропорциональными объему  $d$ -мерной пирамиды с вершиной в точке  $O$  и основанием на соответствующей грани.

В частности, это означает, что  $B_O \stackrel{d}{=} B$  в том и только в том случае, когда существует сфера, вписанная в многогранник, а  $O$  является ее центром.

Таким образом, при условии описанности фигуры проективные распределения заменяются на обычные равномерные распределения на границе.

**6.4. Связь со средним расстоянием между двумя точками на границе.** Получено точное выражение моментов расстояния между двумя внутренними точками в терминах моментов расстояния между внутренней и граничной точкой. Требуется установить связь с расстоянием между двумя граничными точками. Эта связь формулируется в следующей теореме.

**Теорема 6.1.** Пусть  $K$  – выпуклый многоугольник, точка  $O$  – некоторая его внутренняя точка.

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|IB_O|^2 &= \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}|OB_O|^2 - \frac{4}{3} \cdot |O\mathbb{E}B_O|^2, \\ \mathbb{E}|B_O B'_O|^2 &= 2 \cdot \mathbb{E}|OB_O|^2 - 2 \cdot |O\mathbb{E}B_O|^2.\end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть

$$f(\alpha) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|B_O I|^2 \mid I_\alpha = \alpha]] = \int_0^1 \int_0^1 |\alpha \cdot \gamma(t) - \gamma(s)|^2 ds dt,$$

где  $\gamma(t)$  – квантильная функция проективного распределения. Величина  $\gamma(t)$  – такая точка на границе тела, что на участке границы от

точки пересечения тела с положительной частью оси абсцисс до данной точки приходится ровно масса  $t$  от проективного распределения. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \int_0^1 \int_0^1 |\alpha \cdot \gamma(t) - \gamma(s)|^2 ds dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \langle \alpha \cdot \gamma(t) - \gamma(s), \alpha \cdot \gamma(t) - \gamma(s) \rangle ds dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \alpha^2 \cdot \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle - 2 \cdot \alpha \langle \gamma(t), \gamma(s) \rangle + \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle ds dt \\
 &= (\alpha^2 + 1) \cdot \int_0^1 \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle dt - 2 \cdot \alpha \int_0^1 \int_0^1 \langle \gamma(t), \gamma(s) \rangle ds dt \\
 &= (\alpha^2 + 1) \cdot \mathbb{E} |OB_O|^2 - 2 \cdot \alpha |O \mathbb{E} B_O|^2.
 \end{aligned}$$

Используем соотношение

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |IB_O|^2 &= \int_0^1 f(\alpha) \cdot 2\alpha d\alpha \\
 &= \int_0^1 [(\alpha^2 + 1) \cdot \mathbb{E} |OB_O|^2 - 2 \cdot \alpha |O \mathbb{E} B_O|^2] \cdot 2\alpha d\alpha \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E} |OB_O|^2 - \frac{4}{3} \cdot |O \mathbb{E} B_O|^2.
 \end{aligned}$$

В то же время

$$\mathbb{E} |B_O B'_O|^2 = f(1) = 2 \cdot \mathbb{E} |OB_O|^2 - 2 \cdot |O \mathbb{E} B_O|^2,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Соединяя данную теорему с предыдущей, получаем желаемый результат.

**Следствие 6.2.** Если  $O$  – центр масс соответствующего проективного распределения, то

$$\mathbb{E} |IO'|^2 = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E} |IB_O|^2 = \mathbb{E} |OB_O|^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} |B_O B'_O|^2.$$

**Следствие 6.3.** Если  $O$  – центр сферы, вписанной в центрально-симметричное тело, то

$$\mathbb{E} |IO'|^2 = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E} |IB|^2 = \mathbb{E} |OB|^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E} |BB'|^2.$$

## §7. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ МОМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Настоящий параграф посвящен результатам, полученным для плоских тел без дополнительных ограничений, то есть доказательствам теоремы 2.3 и следствия 2.3.

**7.1. Предварительные сведения.** В этом параграфе используются формулы, полученные в [7] Т. Д. Мосеевой на основе формул Крофтона и формулы Бляшке–Петканчина. Наиболее общий вид формулы следующий:

**Теорема 7.1** (Т. Д. Мосеева 2022). Пусть  $K$  – выпуклое тело в  $\mathbb{R}^d$  с гладкой границей,  $h(x_0, \dots, x_l)$  – непрерывная функция,  $l \leq d$ . Тогда для всех  $k \in \{0, \dots, l+1\}$  выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{(\sigma K)^k} \int_{K^{l-k+1}} h(x_0, \dots, x_l) dx_0 \dots dx_{l-k} \sigma(dx_{l-k+1}) \dots \sigma(dx_l) \\ &= (l!)^{d-l} b_{d,l} \int_{A_{d,l}} \int_{(E \cap \sigma K)^k} \int_{(E \cap K)^{l-k+1}} h(x_0, \dots, x_l) [x_0, \dots, x_l]^{d-l} \\ & \quad \times \prod_{j=l-k+1}^l \|P_E(n_K(x_j))\|^{-1} \lambda_E(dx_0) \dots \lambda_E(dx_{l-k}) \\ & \quad \times \sigma_{E \cap \sigma K}(dx_{l-k+1}) \dots \sigma_{E \cap \sigma K}(dx_l) \mu_{d,l}(dE), \end{aligned}$$

где  $b_{d,l} = \frac{\omega_{d-l+1} \dots \omega_d}{\omega_1 \dots \omega_l}$ ,  $n_K(x)$  обозначает внешнюю нормаль к  $K$  в точке  $x$ ,  $P_E$  – ортогональная проекция на плоскость  $E$ , а  $A_{d,l}$  – множество всех  $l$ -мерных аффинных подпространств  $E$  в  $\mathbb{R}^d$  с заданной на нем инвариантной относительно движений мерой Хаара  $\mu_{d,l}$ ,

нормированной таким образом, что мера  $E$ , пересекающих  $d$ -мерный единичный шар  $\mathbb{B}^d$ , равна  $\kappa_{d-l}$  (см., например, [8, теорема 13.2.12]).

В рассматриваемом случае  $d = 2$ ,  $l = 1$ , а  $k \in \{0, 1, 2\}$  меняется в зависимости от формулы. Функция  $h$  используется одинаковая:

$$h_n(x_0, x_1) = |x_0 x_1|^n.$$

Применим эту формулу при  $k = 0$ . Получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K |II'|^n &= \frac{1}{|K|^2} \int_{K^2} h_n(x_0, x_1) dx_0 dx_1 \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot b_{2,1} \int_{A_{2,1}} \int_{(E \cap K)^2} |x_0 x_1|^{n+1} \lambda_E(dx_0) \lambda_E(dx_1) d\mu_{2,1}(dE) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot b_{2,1} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^2 \cdot \mathbb{E}_{E \cap K} |x_0 x_1|^{n+1} \mu_{2,1}(dE) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot b_{2,1} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^2 \cdot \frac{2|E \cap K|^{n+1}}{(n+2)(n+3)} \mu_{2,1}(dE) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{2b_{2,1}}{(n+2)(n+3)} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+3} \mu_{2,1}(dE) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{\omega_d}{(n+2)(n+3)} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+3} \mu_{2,1}(dE). \end{aligned}$$

Другое выражение, которое потребуется:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K |IB|^n &= \frac{1}{|K| |\sigma K|} \int_K \int_{\sigma K} |x_0 x_1|^n dx_0 \sigma(dx_1) \\ &= \frac{1}{|K| |\sigma K|} \cdot \frac{w_2}{4(n+2)} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+2} \left( \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{1}{\sin \alpha_2} \right) \mu_{2,1}(dE). \end{aligned}$$

Осталось выразить одну величину:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K |BB'|^{n*} &= \frac{1}{|\sigma K|^2} \int_{(\sigma K)^2} |x_0 x_1|^n \sigma(dx_0) \sigma(dx_1) \\ &= \frac{1}{|\sigma K|^2} \cdot \frac{\omega_2}{2} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+1} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2} \mu_{2,1}(dE).\end{aligned}$$

В дальнейшем для доказательства результатов проводятся несложные манипуляции с этими формулами. Простым, но вместе с тем ключевым соображением является следующее неравенство:

$$|E \cap K| \leq \frac{|\sigma K|}{2}.$$

**7.2. Достаточные условия для  $\mathbb{E}_K |II'|^n \leq \mathbb{E}_K |BB'|^n$ .** Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K |II'|^n &= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+3} \mu_{2,1}(dE) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{|\sigma K|^2}{4} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+1} \mu_{2,1}(dE) \\ &\leq \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{|\sigma K|^2}{4} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+1} \frac{1}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2} \mu_{2,1}(dE) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{|\sigma K|^2}{4} \cdot \mathbb{E}_K |BB'|^n \cdot |\sigma K|^2 \cdot \frac{2}{\omega_2} \\ &= \mathbb{E}_K |BB'|^n \cdot \frac{|\sigma K|^4}{|K|^2} \cdot \frac{1}{2(n+2)(n+3)},\end{aligned}$$

следовательно, для неравенства достаточно выполнения условия

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2(n+2)(n+3)}}.$$

**7.3. Достаточные условия для  $\mathbb{E}_K |II'|^n \leq \mathbb{E}_K |IB|^n$ .**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_K |II'|^n &= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+3} \mu_{2,1}(dE) \\
&= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{|\sigma K|}{2} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+2} \mu_{2,1}(dE) \\
&\leq \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{|\sigma K|}{4} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+2} \left( \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{1}{\sin \alpha_2} \right) \mu_{2,1}(dE) \\
&= \frac{1}{|K|^2} \cdot \frac{w_2}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{|\sigma K|}{4} \cdot \mathbb{E}_K |IB|^n \cdot |\sigma K| \cdot |K| \cdot \frac{4(n+2)}{\omega_2} \\
&= \mathbb{E}_K |IB|^n \cdot \frac{|\sigma K|^2}{|K|} \cdot \frac{1}{4(n+3)},
\end{aligned}$$

следовательно, для неравенства достаточно выполнения условия

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{4(n+3)}.$$

**7.4. Достаточные условия для  $\mathbb{E}_K |IB|^n \leq \mathbb{E}_K |BB'|^n$ .**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_K |IB|^n &= \frac{1}{|K||\sigma K|} \cdot \frac{w_2}{4(n+2)} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+2} \left( \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{1}{\sin \alpha_2} \right) \mu_{2,1}(dE) \\
&\leq \frac{1}{|K||\sigma K|} \cdot \frac{w_2}{4(n+2)} \cdot \frac{|\sigma K|}{2} \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+1} \left( \frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{1}{\sin \alpha_2} \right) \mu_{2,1}(dE) \\
&\leq \frac{1}{|K||\sigma K|} \cdot \frac{w_2}{4(n+2)} \cdot |\sigma K| \int_{A_{2,1}} |E \cap K|^{n+1} \frac{1}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2} \mu_{2,1}(dE) \\
&= \frac{1}{|K||\sigma K|} \cdot \frac{w_2}{4(n+2)} \cdot |\sigma K| \cdot |\sigma K|^2 \cdot \frac{2}{\omega_2} \cdot \mathbb{E}_K |BB'|^n \\
&= \mathbb{E}_K |BB'|^n \cdot \frac{|\sigma K|^2}{|K|} \cdot \frac{1}{2(n+2)},
\end{aligned}$$

следовательно, для неравенства достаточно выполнения условия

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{2(n+2)}.$$

Все константы стремятся к 0 с ростом номера момента, что означает, что у любого выпуклого тела, начиная с некоторого места, моменты упорядочены заявленным образом. Также отметим, что условия при малых  $n$  требуют нарушения изопериметрического неравенства.

Автор признателен Д. Н. Запорожцу за руководство и ценные советы при выполнении исследования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Blaschke, *Über affine Geometrie XI: Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten*. — Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **69** (1917), 436–453.
2. G. Bonnet, A. Gusakova, Ch. Thäle, D. Zaporozhets, *Sharp inequalities for the mean distance of random points in convex bodies*. — Adv. Math. **326** (2021), 107811.
3. А. С. Токмачев, *Среднее расстояние между случайными точками на границе выпуклой фигуры*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 248–261.
4. J. F. C. Kingman, *Random secants of a convex body*. — J. Appl. Probab. **6**, No. 3 (1969), 660–672.
5. N. G. Aharonyan, V. K. Ohanyan, *Moments of the distance between two random points*. — Model. Artif. Intell. **10**, No. 2 (2016), 64–70.
6. Т. Д. Мосеева, *Случайные сечения выпуклых тел*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 190–199.
7. Т. Д. Мосеева, *Интегральные тождества для границы выпуклого тела*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **515** (2022), 164–180.
8. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Probability and its Applications, Berlin, Springer, 2008.

Lotnikov A. S. Mean distance between random points in centrally symmetric convex bodies.

The Tarasov–Zaporozhets conjecture is considered, which states that the mean distance between two random points inside a convex body does not exceed the mean distance between points on its boundary. The main result of this work is a proof of this conjecture for centrally symmetric planar bodies. It is also established that for sufficiently high moments, an analogous inequality holds for any convex body of arbitrary dimension.

С.-Петербургский  
государственный университет,  
Университетская наб. 7/9,  
199034, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: alex.lotnikov@gmail.com

Поступило 12 ноября 2025 г.