

М. А. Кукушкин

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СЧЁТНЫХ ЗОНОТОПОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные сведения. Для начала напомним читателю ключевые определения из выпуклой геометрии и теории меры, а также зафиксируем необходимые обозначения.

Определение 1.1.1. Суммой по Минковскому множеств $A, B \subset \mathbb{R}^d$ называют множество $A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Определение 1.1.2. Отрезком между двумя произвольными точками $a, b \in \mathbb{R}^d$ называют множество $[a, b] = \{ta + (1 - t)b : t \in [0, 1]\}$.

Определение 1.1.3. Множество $A \subset \mathbb{R}^d$ называют выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками $a, b \in A$ оно содержит отрезок между ними, $[a, b] \subset A$.

Определение 1.1.4. Точка p называется экстремальной для множества $A \subset \mathbb{R}^d$, если не существует точек $x, y \in A$ и $t \in (0, 1)$, таких что $x \neq y$ и $p = tx + (1 - t)y$.

Замечание 1.1.1. Множество всех экстремальных точек множества $A \subset \mathbb{R}^d$ обозначают через $\text{ext } A$.

Для выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^d$ экстремальность точки $p \in A$ равносильна выпуклости множества $A \setminus \{p\}$.

Определение 1.1.5. Для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ обозначим его (замкнутую) ε -окрестность через $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$, где под ρ подразумевается евклидово расстояние.

Определение 1.1.6. Расстоянием Хаусдорфа между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^d$ называют величину

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^\varepsilon, B \subseteq A^\varepsilon\}.$$

Ключевые слова: устойчивые случайные величины, зонотопы, случайные счётные зонотопы, абстрактные конусы, размерность Хаусдорфа, экстремальные точки.

Замечание 1.1.2. Расстояние (метрика) Хаусдорфа действительно является *метрикой* на пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ всех непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$.

Определение 1.1.7. Пусть дано произвольное борелевское множество $A \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $\alpha > 0$ и $\delta > 0$. Положим

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\bigcup E_i \supset A} \left\{ \sum (\text{diam}(E_i))^\alpha : E_i - \text{открытое, } \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\}.$$

Мерой Хаусдорфа порядка α множества A называется величина

$$\mathcal{H}^\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A).$$

В свою очередь, размерность Хаусдорфа множества A есть

$$\dim_H(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \alpha : \mathcal{H}^\alpha(A) > 0 \}.$$

1.2. Зонотопы. В пространстве всех (непустых) выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$ с метрикой Хаусдорфа, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, рассмотрим класс центрально-симметричных тел.

Простейшим примером таковых являются *зонотопы*, т.е. многогранники, представимые в виде суммы по Минковскому конечного числа отрезков, $P = \bigoplus_{k=1}^K [a_k, b_k]$, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}^d$.

Можно также изучать пределы зонотопов по метрике Хаусдорфа, $Q = \lim_n P_n$, называемые *зоноидами*.

Нас же будут интересовать только зоноиды, представимые как сумма по Минковскому *счётного* числа отрезков, $Z = \bigoplus_{k=1}^\infty [a_k, b_k]$, известные как *счётные зонотопы*.

На примере единичной сферы $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ легко показать, что не всякий зоноид является счётным зонотопом. Более того, следующий результат, содержащийся в работе [5], даёт геометрическую характеристику счётных зонотопов в классе зоноидов.

Теорема 1.2.1. Зоноид Z является счётным зонотопом тогда и только тогда, когда

- (а) все его $(d-1)$ -мерные грани G_k есть счётные зонотопы, и
- (б) $\mathcal{H}^{d-1}(\partial Z \setminus \bigcup_k G_k) = 0$.

Замечание 1.2.1. Свойство (б) эквивалентно тому, что

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial Z) = \sum_k \mathcal{H}^{d-1}(G_k).$$

Отсюда немедленно следует, что $\dim_H(\text{ext } Z) < d - 1$ для произвольного счётного зонотопа Z (тривиальная оценка).

1.3. Случайные счётные зонотопы.

Определение 1.3.1 (Давыдов, Вершик). *Случайным зонотопом будем называть произвольное множество вида*

$$Z_K = \bigoplus_{k=1}^K [0, \xi_k],$$

где ξ_k суть некоторые случайные векторы в $\mathbb{R}^d$.

Определение 1.3.2 (Давыдов, Вершик). *Случайным счётным зонотопом будем называть произвольное множество вида*

$$Z = \bigoplus_{k=1}^{\infty} [0, \xi_k],$$

где ξ_k суть некоторые случайные векторы в $\mathbb{R}^d$.

Мы же ограничимся изучением случайных счётных зонотопов только следующего особого вида.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы ε_j в $\mathbb{R}^d$ с общим распределением σ , сосредоточенным на единичной сфере $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$.

Пусть даны н.о.р. случайные величины τ_j с общим стандартным экспоненциальным распределением, $\text{Exp}(1)$. Предположим, что последовательности (τ_j) и (ε_j) независимы.

Тогда случайные величины $\Gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^k \tau_j$ имеют распределение $\text{Gamma}(k, 1)$, причём $\Gamma_k \leq \Gamma_{k+1}$, поскольку $\tau_j \geq 0$.

Зафиксируем параметр $0 < \alpha < 1$ и рассмотрим *случайный счётный зонотоп*

$$Z_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^{\infty} [0, \varepsilon_k] \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Несложно показать, что сходимость ряда $Z = \bigoplus_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ по метрике Хаусдорфа равносильна сходимости ряда $\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k|$ из длин отрезков $[a_k, b_k]$ в обычном смысле.

Отсюда (учитывая, что $\Gamma_k \sim k$ при $k \rightarrow \infty$ п.н. и $0 < \alpha < 1$) следует корректность определения случайного счётного зонотопа Z_α .

1.4. Устойчивые элементы абстрактных конусов. Прежде чем перейти к изучению геометрической структуры границы Z_α , мы объясним особую роль данного объекта с точки зрения теории α -устойчивых элементов в (неевклидовых) конусах.

Определение 1.4.1. *Случайная величина $X \in \mathbb{R}$ называется устойчивой, если для любых констант $k_1, k_2 > 0$ существуют такие константы $k_3 > 0$ и $k_4 \in \mathbb{R}$, что*

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 \stackrel{d}{=} k_3 X_3 + k_4,$$

где X_1, X_2, X_3 суть независимые копии случайной величины X , а символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению.

Если же для любых $k_1, k_2 > 0$ это выполняется при $k_4 = 0$, случайная величина X называется строго устойчивой.

Замечание 1.4.1. Можно показать, что для (строго) устойчивой случайной величины X константы k_1, k_2, k_3 должны удовлетворять равенству

$$k_3 = (k_1^\alpha + k_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

для некоторого $\alpha \in (0, 2]$, называемого *индексом устойчивости*.

Таким образом, условие строгой α -устойчивости можно переписать так: для любых чисел $a, b > 0$

$$a^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + b^{\frac{1}{\alpha}} X_2 \stackrel{d}{=} (a + b)^{\frac{1}{\alpha}} X_3.$$

Известно, что на вещественной прямой не бывает α -устойчивых случайных величин с индексом устойчивости $\alpha > 2$.

Кроме того, распределение любой устойчивой случайной величины с индексом устойчивости $\alpha = 2$ обязательно лежит в семействе нормальных распределений $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Устойчивые распределения замечательны тем, что они и только они выступают в качестве аттракторов в *обобщённой центральной предельной теореме* (ОЦПТ, о которой можно прочесть, например, в книге [6]).

Теорема 1.4.1 (ОЦПТ). *Невырожденная случайная величина Z является α -устойчивой для некоторого $0 < \alpha \leq 2$, если и только если существует последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ и констант $a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$, таких что*

$$b_n^{-1}(X_1 + \dots + X_n) - a_n \Rightarrow Z,$$

где $\text{pod} \Rightarrow$ подразумевается слабая сходимость распределёний случайных величин.

Говорят ещё, что X в этом случае лежит в области притяжения Z и пишут $X \in \text{DA}(Z)$.

Наконец существует полное описание устойчивых случайных величин [9].

Теорема 1.4.2. Случайная величина X является α -устойчивой, если и только если её характеристическая функция имеет вид

$$f_X(t) = f_X(t; \alpha, \beta, c, \mu) = \exp\{it\mu - c|t|^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sign}(t)\Phi(t, \alpha))\},$$

где

$$\Phi(\alpha, t) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}), & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \log |t|, & \alpha = 1, \end{cases}$$

и $\mu \in \mathbb{R}$, $\beta \in [-1, 1]$, $c > 0$ суть параметры сдвига, асимметрии и разброса.

Понятие устойчивости можно разумным образом обобщить для случайных элементов подходящих пространств, т.е. таких пространств, элементы которых можно складывать и умножать на неотрицательные скаляры.

Определение 1.4.2 (см. [4]). Будем называть топологическое пространство $\mathbb{K}$ вместе с введёнными на нём операциями

$$\begin{aligned} +: \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K}, \\ \cdot: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K}, \end{aligned}$$

абстрактным конусом, если

- (1) Операции $+$, $\cdot$ непрерывны,
- (2) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ для любых $x, y \in \mathbb{K}$ и любого $a \geq 0$,
- (3) $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ для любого $x \in \mathbb{K}$ и любых $a, b \geq 0$,
- (4) $\exists 0 \in \mathbb{K}: \forall x \in \mathbb{K}: x + 0 = x = 0 + x$ и $\forall a \geq 0: a \cdot 0 = 0$.

Пример 1.4.1. Пространство всех компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, с топологией, индуцированной метрикой Хаусдорфа d_H , и естественными операциями суммирования (по Минковскому) и умножения на неотрицательные скаляры (гомотетии с центром в нуле) является абстрактным конусом.

Нетрудно видеть, что нулевым элементом конуса $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ является множество $\{0\}$.

Абстрактный конус $\mathbb{K}$ вместе с борелевской сигма-алгеброй (т.е. минимальной сигма-алгеброй, содержащей все открытые множества $\mathbb{K}$) является измеримым пространством. Измеримые относительно данной структуры отображения X из вероятностной тройки в конус $\mathbb{K}$ называются его *случайными элементами*.

Определение 1.4.3. *Случайный элемент $X \in \mathbb{K}$ называется α -строго устойчивым с индексом устойчивости $\alpha > 0$, если*

$$a^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + b^{\frac{1}{\alpha}} X_2 \stackrel{d}{=} (a+b)^{\frac{1}{\alpha}} X_3$$

для любых $a, b \geq 0$ и независимых копий X_1, X_2, X_3 случайного элемента X .

Замечание 1.4.2. Отныне мы будем работать только со *строго* устойчивыми случайными элементами и величинами, опуская иногда для краткости слово “*строго*”.

Мы сконцентрируем свои усилия лишь на одном конкретном конусе, $\mathbb{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$. При этом наша цель состоит в том, чтобы дать полную характеристику его строго устойчивых случайных элементов. Для этого нам понадобятся следующие понятия.

Определение 1.4.4. *Для произвольного элемента $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ положим $|A| \stackrel{\text{def}}{=} d_H(A, \{0\})$. Единичной сферой в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ будем называть множество*

$$S_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) : |A| = 1\}.$$

Тогда конус $\mathbb{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ можно представить как $S_{\mathcal{K}} \times (0, +\infty)$.

Определение 1.4.5. *Опорной функцией произвольного выпуклого компакта $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ будем называть отображение s_A ,*

$$s_A(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle,$$

где $p \in S^{d-1}$ или $p \in \mathbb{R}^d$, а под $\langle \cdot, \cdot \rangle$ подразумевается стандартное скалярное произведение.

Замечание 1.4.3. Опорная функция обладает рядом крайне полезных свойств. Среди прочего,

- $s_{\lambda A}(p) = \lambda s_A(p)$ для любого $\lambda \geq 0$,
- $s_{A+B}(p) = s_A(p) + s_B(p)$.

Итак, пусть Y – устойчивый случайный элемент пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ с индексом устойчивости $\alpha > 0$.

Зафиксируем какую-нибудь точку $p \in S^{d-1}$ и заметим, что случайная величина $s_Y(p)$ является α -устойчивой (благодаря положительной однородности и аддитивности по множеству опорной функции).

Поскольку устойчивых случайных величин с индексом устойчивости $\alpha > 2$ не существует, то не бывает и α -устойчивых случайных элементов пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ с индексом устойчивости $\alpha > 2$.

Мы установили, что следует ограничиться значениями $\alpha \in (0, 2]$. Оказывается, однако, что случай $\alpha \in [1, 2]$ является *вырожденным*.

Теорема 1.4.3 (см. [1]). Пусть Y – устойчивый случайный элемент пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ с индексом устойчивости $\alpha \in [1, 2]$. Тогда $Y \stackrel{d}{=} \{\xi\}$ для некоторого α -устойчивого случайного вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Замечание 1.4.4. Разумеется, обратное тоже верно: если $\xi \in \mathbb{R}^d$ – α -устойчивый случайный вектор, то $\{\xi\}$ – α -устойчивый случайный элемент пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$.

Смысл данного результата состоит в том, что *содержательная* теория устойчивости в конусе выпуклых компактов относится к случаю $\alpha < 1$.

Теорема 1.4.4 (см. [2]). Пусть Y – устойчивый случайный элемент пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ с индексом устойчивости $\alpha \in (0, 1)$.

Тогда существует такая вероятностная мера $\tilde{\sigma}$ (называемая *спектральной*), сосредоточенная на единичной сфере $S_{\mathcal{K}}$, что для любой положительной случайной величины η с конечным α -моментом (т.е. с $\|\eta\|_{\alpha}^{\alpha} = \mathbb{E}|\eta|^{\alpha} < \infty$) ряд

$$\tilde{Z}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} c_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{\alpha}^{-1} \cdot \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}} \eta_k \tilde{\varepsilon}_k, \quad (1)$$

где $\tilde{\varepsilon}_k$ суть н.о.р. случайные элементы $S_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ с общим распределением $\tilde{\sigma}$, сходится почти наверное в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ и совпадает по распределению с исходным случайным элементом Y , т.е. $\tilde{Z}_{\alpha} \stackrel{d}{=} Y$.

Замечание 1.4.5. Разумеется, обратное тоже верно: для любого индекса $\alpha \in (0, 1)$ и для произвольной спектральной меры $\tilde{\sigma}$ ряд вида $\tilde{Z}_{\alpha}$ сходится почти наверное и является α -устойчивым случайным элементом пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$.

Метрическое пространство $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), d_H)$ является польским. Поэтому обычная теория сходимости вероятностных мер в слабом смысле [10] применима к нему без всяких дополнений.

Определение 1.4.6. Пусть даны случайные элементы $X_n, X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$. Говорят, что последовательность X_n слабо сходится к X и пишут $X_n \Rightarrow X$, если для любой непрерывной (по метрике Хаусдорфа) ограниченной функции $f: \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)].$$

Особая роль α -устойчивых элементов $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ вообще и счётных зонотопов в частности подчёркивается следующим предложением.

Теорема 1.4.5 (см. [3]). Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ – н.о.р. случайные векторы в $\mathbb{R}^d$, а $[0, \xi_k] \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ – натянутые на них отрезки.

Определим частичные суммы $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ и $Z_n = \bigoplus_{k=1}^n [0, \xi_k]$. Зафиксируем произвольное $\alpha \in (0, 1)$ и монотонно возрастающую последовательность $b_n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим предельные соотношения вида

$$b_n^{-1} Z_n \Rightarrow Y_\alpha, \quad (2)$$

$$b_n^{-1} S_n \Rightarrow \eta_\alpha, \quad (3)$$

где Y_α – α -устойчивый случайный элемент пространства $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, а η_α – α -устойчивая случайная величина на прямой.

Предельные соотношения (2) и (3) эквивалентны друг другу (первое влечёт второе и второе влечёт первое).

Более того, если выполнено любое из данных соотношений, то

$$Y_\alpha \stackrel{d}{=} \widehat{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^\infty [0, \widehat{\varepsilon}_k],$$

где $\widehat{\varepsilon}_k$ суть некоторые случайные векторы в $\mathbb{R}^d$.

Иными словами, пределом (нормированных) случайных зонотопов вида $b_n^{-1} Z_n$ является случайный счётный зонотоп.

Представление в виде ряда (1) гарантирует, что любой счётный зонотоп $\widehat{Z}$, возникающий в пределе выше, может (с точностью до мультипликативной константы) быть записан как

$$Z_\alpha = \bigoplus_{k=1}^\infty \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}} [0, \varepsilon_k],$$

где ε_k — н.о.р. случайные векторы в $\mathbb{R}^d$ с общим вероятностным распределением σ , сосредоточенным на единичной сфере $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ (также называемым *спектральным*).

1.5. Постановка задачи. Наибольший интерес для нашего изучения представляет множество $F_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \text{ext } Z_\alpha$, а точнее его размерность Хаусдорфа, $\dim_H F_\alpha$.

Как мы уже установили, с вероятностью единица множество F_α пренебрежимо мало, то есть $\mathcal{H}^{d-1}(F_\alpha) = 0$ и $\dim_H(\text{ext } Z) < d - 1$. Наша цель состоит в поиске и доказательстве более точной оценки.

Эта задача была решена ранее на плоскости. В работе [5] доказано, что $\dim_H F_\alpha \leq \alpha$ при $d = 2$ (для произвольной спектральной меры σ на $S^1 \subset \mathbb{R}^2$). Там же показано, что если σ есть *равномерное* распределение на окружности, то $\dim_H F_\alpha = \alpha$.

Однако уже при $d = 3$ и в больших размерностях вопрос не только о нижней, но и о верхней оценке оставался без ответа. Нам же удалось получить нетривиальную верхнюю оценку для произвольного $d \geq 2$.

Теорема 1.5.1 (Ключевой результат). *Для любого $0 < \alpha < 1$ и для любого $d \geq 2$ с вероятностью единица выполнено $\dim_H(F_\alpha) \leq \alpha + d - 2$.*

Доказательство теоремы представлено ниже и разбито на два блока: случай $d = 3$ и случай произвольной размерности $d \geq 2$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ТРЁХМЕРИИ

2.1. Общие замечания. Зафиксируем индекс $0 < \alpha < 1$ и рассмотрим $Z_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^{\infty} [0, \varepsilon_k] \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Определение 2.1.1. *Обозначим через $l_k \stackrel{\text{def}}{=} [0, \varepsilon_k] \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}$ отрезок с индексом k в нашей бесконечной сумме.*

Через l_k мы будем обозначать также аффинный сдвиг данного отрезка, составляющий часть границы Z_α , и длину этого отрезка.

Ясно, что $l_i \geq l_j$ для любых $1 \leq i < j$ по монотонности последовательности Γ_k .

Определение 2.1.2. *Для каждой пары индексов $1 \leq i < j$ обозначим через $\Delta_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} l_i \oplus l_j$ параллелограмм, натянутый на отрезки (l_i, l_j) .*

Замечание 2.1.1. Граница исследуемого зонотопа, ∂Z_α , состоит из элементов четырёх типов: 0-границ, 1-границ, 2-границ и, наконец, *нетривиальные экстремальные точки* (возникающие как раз при предельном переходе в бесконечной сумме).

Каждая 2-грань получается подходящим параллельным переносом параллелограмма $\Delta_{i,j}$ для некоторых $1 \leq i < j$, каждая 1-грань – переносом какого-то отрезка l_i (и является общей стороной двух 2-граней), а 0-границ (вершины) суть просто концы 1-граней.

С другой стороны, каждому $\Delta_{i,j}$ соответствует *пара* параллельных граней. В дальнейшем мы будем пренебрегать подобными повторами (на плоскости это означало бы, что мы учитываем лишь *правую* половину зонотопа, беря каждую 1-грань границы единожды, а не дважды). Ясно, что это никак не влияет на размерность экстремальных точек F_α .

Кроме того, каждая из граней появляется в Z_α на определённом *конечном* шаге суммирования K , сама по себе является выпуклым множеством и экстремальных точек не содержит, за исключением вершин.

Определение 2.1.3. Множество всех 0-граней обозначим через E .

Поскольку их в точности счётное число, $\dim_H(F_\alpha) = \dim_H(F_\alpha \setminus E)$.

Замечание 2.1.2. Для оценки размерности Хаусдорфа сверху нам необходимо придумать подходящее покрытие множества $F_\alpha \setminus E$. Мы попытаемся перейти к *хвостам* ряда из определения счётного зонотопа и сделать предельный переход.

Зафиксируем для этого $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим *псевдопокрытие* множества $F_\alpha \setminus E$, построенное отбрасыванием всех параллелограммов, содержащих в качестве одной из сторон какой-либо отрезок от l_1 до l_n включительно:

$$\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \bigcup_{j=i+1}^{\infty} \Delta_{i,j}.$$

К сожалению, оно не является настоящим покрытием (иначе все экстремальные точки содержались бы в множестве вершин параллелограммов $\Delta_{i,j}$, и значит, было бы выполнено равенство $\dim_H(F_\alpha) = 0$, что, очевидно, неверно для нетривиальной меры σ).

Интуитивно понятно, однако, что предъявленному *псевдопокрытию* не хватает совсем немногого, чтобы стать настоящим *покрытием*.

Трансформации *псевдопокрытия* в *покрытие* посвящён §4, а пока мы будем работать с предложенным *псевдопокрытием*.

Замечание 2.1.3. Итак, нам необходимо зафиксировать произвольное $\beta > 0$, оценить сверху выражение вида

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} (\text{diam}(\Delta_{i,j}))^{\beta}$$

и понять, при каком β полученная оценка будет стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Диаметр параллелограмма $\Delta_{i,j}$ равен длине его главной диагонали и плохо контролируется одними лишь длинами сторон l_i, l_j .

Тривиальная оценка, использующая лишь большую из сторон l_i , приведёт к бесконечному суммированию по j положительной константы.

2.2. Ключевая идея. Для каждой пары $1 \leq i < j$ имеем $l_i \geq l_j$. Разрежем параллелограмм $\Delta_{i,j}$ вдоль большей стороны l_i на ромбы с длиной ребра l_j .

Получим разбиение параллелограмма $\Delta_{i,j}$ на $[l_i/l_j]$ ромбов с длиной ребра l_j и, возможно, маленьким остатком:

$$\Delta_{i,j} = \delta_{i,j}^1 \cup \dots \cup \delta_{i,j}^{[l_i/l_j]} \cup \delta_{i,j}^+.$$

Про остаток $\delta_{i,j}^+$ можно забыть (достаточно сделать грубую оценку, умножив следующее выражение на 2).

Проведя операцию *разрезания на ромбы* с каждым $\Delta_{i,j}$ из нашего *псевдопокрытия*, получим его (псевдопокрытия) подразбиение и придём к выражению вида

$$H(n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^{[l_i/l_j]} (\text{diam}(\delta_{i,j}^h))^{\beta} \right). \quad (4)$$

Диаметр *ромба*, в свою очередь, оценивается по неравенству треугольника:

$$\text{diam} \delta_{i,j}^h \leq 2l_j.$$

Замечание 2.2.1. Для последующих выкладок зафиксируем удобное обозначение.

Всякий раз, когда для некоторой положительной константы C (не обязательно одной и той же в разных местах), не зависящей от параметров выражений A и B , верно неравенство $A \leq C \cdot B$, будем писать $A \lesssim B$.

2.3. Аналитические выкладки. Разрезание параллелограммов на ромбы производилось ради следующей замечательной оценки:

$$\begin{aligned} H(n) &\lesssim \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^{\lfloor l_i/l_j \rfloor} (2l_j)^\beta \right) \lesssim \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} l_j^\beta \cdot \frac{l_i}{l_j} \\ &= \sum_{j=n+2}^{\infty} l_j^{\beta-1} \sum_{i=n+1}^{j-1} l_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=n+2}^{\infty} l_j^{\beta-1} C(j, n). \end{aligned}$$

По усиленному закону больших чисел $\frac{\Gamma_i}{i} = \frac{\sum_{q=1}^i \tau_q}{i} \rightarrow \mathbb{E} \tau_1 = 1$ п.н., т.е. $\Gamma_i \sim i$ при $i \rightarrow \infty$, а значит $l_i = \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sim i^{-\frac{1}{\alpha}}$ при $i \rightarrow \infty$.

Пользуясь данной асимптотикой, теоремой Штольца и оценкой через интеграл, оценим теперь для каждого j величину $C(j, n)$:

$$C(j, n) = \sum_{i=n+1}^{j-1} l_i \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} l_i \sim \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\alpha}} \lesssim \int_n^{\infty} x^{-\frac{1}{\alpha}} dx \lesssim n^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Подставим полученное в оценку для $H(n)$:

$$H(n) \lesssim \sum_{j=n+2}^{\infty} l_j^{\beta-1} C(j, n) \lesssim n^{1-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=n+2}^{\infty} l_j^{\beta-1} \stackrel{\text{def}}{=} n^{1-\frac{1}{\alpha}} D(n).$$

Чтобы оценить $D(n) = \sum_{j=n+2}^{\infty} l_j^{\beta-1}$ сверху, воспользуемся асимптотикой $l_j^{\beta-1} \sim j^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}$ при $j \rightarrow \infty$ и вновь применим теорему Штольца.

Для этого нужно гарантировать сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}$, так что мы обязаны наложить ограничение $\beta > \alpha + 1$. При данном предположении

$$D(n) = \sum_{j=n+2}^{\infty} l_j^{\beta-1} \sim \sum_{j=n+2}^{\infty} j^{-\frac{\beta-1}{\alpha}} \lesssim \int_n^{\infty} x^{-\frac{\beta-1}{\alpha}} dx \lesssim n^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+1}.$$

Пришло время собирать камни:

$$H(n) \lesssim n^{1-\frac{1}{\alpha}} D(n) \lesssim n^{1-\frac{1}{\alpha}} n^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+1} = n^{2-\frac{\beta}{\alpha}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, как только $\beta > 2\alpha$.

2.4. Заключение для трёхмерия. Из двух условий $\beta > \alpha + 1$ и $\beta > 2\alpha$ достаточно оставить лишь $\beta > \alpha + 1$, так как при $0 < \alpha < 1$ верно $\alpha + 1 > 2\alpha$.

Таким образом, при любом $\beta > \alpha + 1$ выражение $H(n) = H_\beta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь определением меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^\beta$, заключаем, что $\mathcal{H}^\beta(F_\alpha) = 0$.

Отсюда уже по определению размерности Хаусдорфа следует, что $\dim_H(F_\alpha) \leq \alpha + 1$, что и требовалось доказать.

Доказательство для трёхмерия окончено по модулю аккуратного обоснования (найти которое можно в §4), почему легально использовать предложенное *псевдопокрытие* (и, значит, его подразбиение) в качестве настоящего *покрытия* для $F_\alpha \setminus E$.

Обобщим теперь наш подход на высшие размерности.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В МНОГОМЕРИИ

3.1. Общие замечания. Зафиксируем произвольное $d \geq 4$. Будем следовать той же логике, что и в предыдущем разделе, неизбежно применяя более громоздкое индексирование.

Здесь и далее работаем с набором индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} < \infty$ длины $d - 1$. По монотонности $l_{i_1} \geq \dots \geq l_{i_{d-1}}$.

Определение 3.1.1. Через $\Delta_{i_1, \dots, i_{d-1}} \stackrel{\text{def}}{=} l_{i_1} \oplus \dots \oplus l_{i_{d-1}}$ будем обозначать $(d - 1)$ -параллелепипеды, натянутые на соответствующие отрезки.

Теперь граница зонотопа, ∂Z_α , распадается на грани размерностей от 0 до $d - 1$ включительно и нетривиальные экстремальные точки, полученные при предельном переходе в бесконечном суммировании.

Мы вновь сконцентрируемся на гранях старшей размерности, отбросим часть из них, построим *псевдопокрытие* оставшимися $(d - 1)$ -гранями, представим подходящее его (псевдопокрытия) подразбиение и завершим аналитическими выкладками.

Определение 3.1.2. Зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим *псевдопокрытие* множества $F_\alpha \setminus E$, построенное отбрасыванием всех параллелепипедов, содержащих в качестве одной из сторон какой-либо отрезок от l_1 до l_n включительно:

$$\bigcup_{i_1=n+1}^{\infty} \bigcup_{i_2=i_1+1}^{\infty} \cdots \bigcup_{i_{d-1}=i_{d-2}+1}^{\infty} \Delta_{i_1, \dots, i_{d-1}}.$$

Зафиксируем произвольное (пока что) число $\beta > 0$. Вместо того, чтобы оценивать выражение вида

$$\sum_{i_1=n+1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{i_{d-1}=i_{d-2}+1}^{\infty} (\text{diam } \Delta_{i_1, \dots, i_{d-1}})^{\beta},$$

разобьём *каждый* $(d-1)$ -мерный параллелепипед $\Delta_{i_1, \dots, i_{d-1}}$ по аналогии со случаем $d = 3$.

3.2. Ключевая идея. Наименьшая из сторон $\Delta_{i_1, \dots, i_{d-1}}$ имеет длину в точности $l_{i_{d-1}}$.

Посечём параллелепипед гиперплоскостями, которые параллельны его граням, вдоль оставшихся сторон $l_{i_1}, \dots, l_{i_{d-2}}$, разбивая каждую из них на $[l_{i_1}/l_{i_{d-1}}], \dots, [l_{i_{d-2}}/l_{i_{d-1}}]$ частей длины $l_{i_{d-1}}$ соответственно.

В итоге мы получим $h_{\max} = [l_{i_1}/l_{i_{d-1}}] \times \dots \times [l_{i_{d-2}}/l_{i_{d-1}}]$ равносторонних *маленьких параллелепипедов* $\{\delta_{i_1, \dots, i_{d-1}}^h, h = 1, \dots, h_{\max}\}$ (будем называть их также *кусочками*) со сторонами, параллельными сторонам $\Delta_{i_1, \dots, i_{d-1}}$ и длиной в точности $l_{i_{d-1}}$ каждая.

Будут ещё, возможно, и некоторые остатки, но про них можно забыть (как и в трёхмерии), умножив следующее выражение на подходящую положительную константу.

Диаметр каждого из полученных *кусочков* тривиально оценивается по неравенству треугольника,

$$\text{diam } \delta_{i_1, \dots, i_{d-1}}^h \leq (d-1) \times l_{i_{d-1}}.$$

Таким образом, мы должны оценить выражение вида

$$H(n) = \sum_{i_1=n+1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{i_{d-1}=i_{d-2}+1}^{\infty} (l_{i_{d-1}})^{\beta} \times \frac{l_{i_1} \cdots l_{i_{d-2}}}{(l_{i_{d-1}})^{d-2}}. \quad (5)$$

После перестановки знаков суммирования (все величины неотрицательные) получим

$$H(n) = \sum_{i_{d-1}=n+d-1}^{\infty} (l_{i_{d-1}})^{\beta-(d-2)} \left(\sum_{i_{d-2}=n+d-2}^{i_{d-1}-1} \cdots \sum_{i_1=n+1}^{i_2-1} l_{i_1} \cdots l_{i_{d-2}} \right).$$

3.3. Аналитические выкладки. Нетрудно видеть, что внутренняя $(d-2)$ -сумма распадается на $d-2$ множителя, каждый из которых с точностью до положительной мультипликативной константы, не зависящей от n , оценивается в точности так же, как и в трёхмерном случае, через $n^{1-\frac{1}{\alpha}}$.

Иными словами,

$$H(n) \lesssim n^{(d-2)(1-\frac{1}{\alpha})} \times \sum_{i_{d-1}=n+d-1}^{\infty} l_{i_{d-1}}^{\beta-(d-2)} \stackrel{\text{def}}{=} n^{(d-2)(1-\frac{1}{\alpha})} \times D(n).$$

Оценим теперь сверху выражение $D(n) = \sum_{i_{d-1}=n+d-1}^{\infty} l_{i_{d-1}}^{\beta-(d-2)}$, используя асимптотику

$$l_{i_{d-1}}^{\beta-(d-2)} \sim i_{d-1}^{-\frac{\beta-(d-2)}{\alpha}}$$

при $i_{d-1} \rightarrow \infty$, а затем, в предположении $\beta > \alpha + (d-2)$, теорему Штольца и оценку через интеграл,

$$\begin{aligned} D(n) &= \sum_{i_{d-1}=n+d-1}^{\infty} l_{i_{d-1}}^{\beta-(d-2)} \sim \sum_{i_{d-1}=n+d-1}^{\infty} i_{d-1}^{\beta-(d-2)} \\ &\lesssim \int_n^{\infty} x^{-\frac{\beta-(d-2)}{\alpha}} dx \lesssim n^{-\frac{\beta-(d-2)}{\alpha}+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H(n) \lesssim n^{(d-2)(1-\frac{1}{\alpha})} \times D(n) \lesssim n^{(d-2)(1-\frac{1}{\alpha})} \times n^{-\frac{\beta-(d-2)}{\alpha}+1} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, как только $(d-2)(1-\frac{1}{\alpha}) - \frac{\beta-(d-2)}{\alpha} + 1 < 0$, что эквивалентно условию $\beta > (d-1)\alpha$.

3.4. Заключение для многомерия. Из двух условий $\beta > \alpha + (d-2)$ и $\beta > (d-1)\alpha$ достаточно оставить лишь $\beta > \alpha + (d-2)$, так как при $0 < \alpha < 1$ верно $d-2 > (d-2)\alpha$.

Таким образом, при любом $\beta > \alpha + d-2$ выражение $H(n) = H_{\beta}(n)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь определением меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^{\beta}$, заключаем, что $\mathcal{H}^{\beta}(F_{\alpha}) = 0$.

Отсюда уже по определению размерности Хаусдорфа следует, что $\dim_H(F_{\alpha}) \leq \alpha + d-2$, что и требовалось доказать.

Доказательство для многомерия окончено по модулю аккуратного обоснования, почему легально использовать предложенное *псевдопокрытие* (и, значит, его подразбиение) в качестве настоящего *покрытия* для $F_\alpha \setminus E$.

Именно этим мы сейчас и займёмся.

§4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ПСЕВДОПОКРЫТИЯ

4.1. Основная идея доказательства. Нам необходимо построить *настоящее покрытие* множества $F_\alpha \setminus E$ и свести его к представленному *псевдопокрытию* (или, скорее, к его *подразбиению на кусочки*).

Граница зонотопа криволинейна, но на ней есть счётное множество прямолинейных участков, т.е. $(d-1)$ -мерных параллелепипедов. Ясно, что прямолинейные участки *сами по себе* экстремальные точки не покрывают.

Чтобы справиться с данной проблемой, мы проведём процедуру *расширения* прямолинейных участков. В этом нам поможет следующее наблюдение.

Замечание 4.1.1. Рассмотрим случайный счётный зонотоп Z_α . Это — непустое компактное выпуклое тело в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.

Значит, для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует единственная точка $z_x \in Z_\alpha$, такая что $\|x - z_x\| = \inf\{\|x - z\| : z \in Z_\alpha\}$. Как следствие, корректно определено отображение *проекции* на ближайшую точку Z_α , которое мы обозначим через $p: \mathbb{R}^d \mapsto Z_\alpha$, $p(x) = z_x \in Z_\alpha$.

Нетрудно видеть, что отображение p (его ещё называют *метрической проекцией*) является *сжимающим*, т.е. $\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$ для любых точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$.

Подробнее об этом и о других свойствах *метрической проекции* можно почитать в книге [11].

4.2. Решение на плоскости. Для иллюстрации идеи доказательства рассмотрим сначала более простой двумерный случай, $d = 2$.

Зафиксируем произвольное $N \in \mathbb{N}$ и “отбросим” первые N отрезков $l_1, \dots, l_N$, т.е. те отрезки границы зонотопа, которые соответствуют первым N слагаемым вида $[0, \varepsilon_n] \Gamma_n^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Выразим для удобства направления $\varepsilon_j \in S^1$ отрезков l_j через углы как $\varepsilon_j = e^{i\theta_j}$, где $0 \leq \theta_j \leq \pi$ (в силу симметричности зонотопа мы рассматриваем лишь правую его половину: для оценки размерности Хаусдорфа множества его экстремальных точек этого достаточно).

Через $(l_{(1)}, \dots, l_{(N)})$ обозначим упорядочение набора $(l_1, \dots, l_N)$, так что $l_{(n)}$ соответствует слагаемому $[0, \varepsilon_{(n)}] \Gamma_{(n)}^{-\frac{1}{\alpha}}$, где $\varepsilon_{(n)} = e^{i\theta_{(n)}}$ и, в свою очередь, $0 \leq \theta_{(1)} \leq \theta_{(2)} \leq \dots \leq \theta_{(N)} \leq \pi$.

Рассмотрим множество индексов

$$Z(n, N) \stackrel{\text{def}}{=} \{j \geq N+1 : \theta_{(n)} \leq \theta_j \leq \theta_{(n+1)}\},$$

которое отвечает номерам в точности тех отрезков l_j (из всей счётной последовательности), которые попали в промежуток между отрезками $l_{(n)}$ и $l_{(n+1)}$.

Обозначим через $L(n, N) \subset \partial Z_\alpha$ (от лат. ласина) и будем называть *криволинейной лакуной*, или просто *лакуной*, весь участок границы между $l_{(n)}$ и $l_{(n+1)}$.

Обозначим через $D(n, N) \subset \partial Z_\alpha$ и будем называть *линейной дыркой*, или просто *дыркой*, участок границы, состоящий в точности из тех отрезков l_j , что лежат между $l_{(n)}$ и $l_{(n+1)}$.

Чуть более формально,

$$D(n, N) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{l_j : j \in Z(n, N)\}.$$

Тогда *лакуна* $L(n, N) \subset \partial Z_\alpha$ состоит в точности из точек $D(n, N)$ и нетривиальных (т.е. не являющихся вершинами отрезков l_j) экстремальных точек (получающихся в результате предельного перехода при бесконечном суммировании по Минковскому).

Таким образом,

$$F_\alpha \setminus E \not\subset \bigcup_{n=1}^N D(n, N),$$

но

$$F_\alpha \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^N L(n, N).$$

Зафиксируем произвольное $K \in \mathbb{N}$ и для каждого $n = 1, \dots, N$ рассмотрим множество

$$A(n, N, K) \stackrel{\text{def}}{=} \{j_1^n, \dots, j_K^n\}$$

наименьших таких индексов $N+1 \leq j_1^n \leq \dots \leq j_K^n$, для которых верно $\theta_{(n)} \leq \theta_{j_K^n} \leq \theta_{(n+1)}$.

Множество $A(n, N, K)$ отвечает номерам первых (по порядку в сумме по Минковскому, не по углу) K отрезков $l_{j_1^n}, \dots, l_{j_K^n}$, попавших в дырку $D(n, N)$.

Для каждого такого отрезка $l_{j_k}^n$ построим его *расширение* $\tilde{l}_{j_k}^n$ по следующей *процедуре*.

- (1) Для любых $n = 1, \dots, N$ и $k = 1, \dots, K$ рассмотрим множество индексов

$$\begin{aligned} I(j_k^n) &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : l_i \text{ попадает между } l_{j_{k-1}}^n \text{ и } l_{j_k}^n\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : \theta_i \in [\theta_{j_{k-1}}^n, \theta_{j_k}^n]\}. \end{aligned}$$

- (2) Обозначим сумму длин соответствующих отрезков через

$$s_{j_k}^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum \{l_i : i \in I(j_k^n)\}.$$

- (3) Определим $\hat{l}_{j_k}^n \subset \mathbb{R}^2$ как отрезок длины $l_{j_k}^n + s_{j_k}^n$, получаемый *удлинением* исходного отрезка $l_{j_k}^n$ по прямой вдоль его направления на ∂Z_α на длину $s_{j_k}^n$.
- (4) Часть *удлинённого отрезка* $\hat{l}_{j_k}^n$, равная старому отрезку $l_{j_k}^n$, будет лежать на границе зонотопа. Прибавленная же часть будет касаться ∂Z_α с внешней стороны.
- (5) Наконец, спроецируем *удлинённый отрезок* $\hat{l}_{j_k}^n$ обратно на границу зонотопа с помощью *метрической проекции* на Z_α , т.е. положим

$$\tilde{l}_{j_k}^n \stackrel{\text{def}}{=} p(\hat{l}_{j_k}^n).$$

Из построения видно, что при достаточно больших N и K для каждого $n = 1, \dots, N$ *лакуна* $L(n, N)$ покрывается множеством *расширений* $\tilde{l}_{j_k}^n$ по $k = 1, \dots, K$, т.е.

$$L(n, N) \subset \bigcup_{k=1}^K \tilde{l}_{j_k}^n.$$

Ключевой момент доказательства состоит в следующем: *сжимающее* свойство метрической проекции p обеспечивает нам контроль над диаметрами *расширений* через диаметры *удлинённых отрезков*, т.е. позволяет писать оценки вида

$$\text{diam } \tilde{l}_{j_k}^n = \text{diam } p(\hat{l}_{j_k}^n) \leq \text{diam } \hat{l}_{j_k}^n.$$

Замечание 4.2.1. В высших размерностях, т.е. при $d \geq 3$, мы проделаем всё то же самое с точностью до одной детали.

Отрезки, т.е. 1-границы, на границе заменятся на $(d-1)$ -мерные параллелепипеды, т.е. $(d-1)$ -границы. Поэтому и *расширять* мы будем уже

$(d-1)$ -границ (вдоль всех их сторон). И если $\text{diam } \widehat{l}_{j_k^n}$ есть просто сумма длин всех входящих в него отрезочков (чем мы сейчас и воспользуемся), то диаметр параллелепипедов оценивать сложнее (к счастью, в предыдущей части доказательства мы уже поняли, как это делать).

Итак, мы построили настоящее покрытие множества экстремальных точек вида

$$F_\alpha \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^N L(n, N) \subset \bigcup_{n=1}^N \bigcup_{k=1}^K \widetilde{l}_{j_k^n}.$$

Зафиксируем теперь $1 > \beta > \alpha > 0$ и оценим сумму, соответствующую данному покрытию, пользуясь нашими определениями и замечаниями:

$$\begin{aligned} Q(N, K) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (\text{diam } \widetilde{l}_{j_k^n})^\beta \leq \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (\text{diam } \widehat{l}_{j_k^n})^\beta \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (l_{j_k^n} + s_{j_k^n})^\beta = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \left(l_{j_k^n} + \sum \{l_i : i \in I(j_k^n)\} \right)^\beta \\ &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K (l_{j_k^n})^\beta + \sum \{l_i^\beta : i \in I(j_k^n)\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^N S(n, N, K). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любого параметра $0 < \beta < 1$ и для произвольных чисел $x, y > 0$ верно $(x + y)^\beta \leq x^\beta + y^\beta$.

Видно, что в итоговой сумме участвуют в точности все l_j , кроме первых N штук. Чтобы понять это чуть более формально, нужно рассмотреть индексные множества

$$J(n, N, K) \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{k=1}^K I(j_k^n),$$

$$\widetilde{J}(n, N, K) = J(n, N, K) \sqcup \{j_k^n\}_{k=1}^K$$

и аккуратно расписать

$$S(n, N, K) = \sum_{k=1}^K (l_{j_k^n})^\beta + \sum \{l_i^\beta : i \in I(j_k^n)\} = \sum \{l_i^\beta : i \in \widetilde{J}(n, N, K)\},$$

чтобы получить

$$Q(N, K) \leq \sum_{n=1}^N S(n, N, K) = \sum_{n=1}^N \sum \{l_i^\beta : i \in \tilde{J}(n, N, K)\} = \sum_{j=N+1}^{\infty} l_j^\beta.$$

А с последним выражением мы уже научились справляться в предыдущей части (с помощью оценки через интеграл).

4.3. Решение в общем случае. Пусть теперь $d \geq 3$. Будем действовать в том же стиле, что и для $d = 2$.

Замечание 4.3.1. Ради ясности и с целью избежать излишнего нагромождения символов мы проведём доказательство для $d = 3$.

Дальнейший перенос рассуждений на случай $d \geq 4$ производится напрямую заменой 2-граней на $(d - 1)$ -границ и увеличением числа индексов с двух до $d - 1$.

Зафиксируем произвольное $N \in \mathbb{N}$ и “отбросим” первые N отрезков $l_1, \dots, l_N$. Чуть формальнее, мы *отбрасываем* все параллелограммы, кроме $\{\Delta_{h,m}\}_{h=N+1, m=h+1}^{\infty}$.

Замечание 4.3.2. Напомним, что по определению $\Delta_{h,m} = l_h \oplus l_m$ есть параллелограмм, натянутый на отрезки l_h, l_m и лежащий на границе зонотопа.

С отрезками l_h и l_m можно ассоциировать их направления ε_h и ε_m , лежащие на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

В свою очередь, каждое направление $\varepsilon_j \in S^2$ можно записать в сферических координатах, которые мы обозначим через $\theta_j = (\theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)})$.

Договоримся также, что под записью $[\theta_t, \theta_u]$ мы будем иметь в виду сечение сферы S^2 плоскостью $\Pi_{tu} = (\varepsilon_t, 0, \varepsilon_u)$, т.е. плоскостью, проходящей через точки $\varepsilon_t, 0, \varepsilon_u$.

Наконец, запись $\theta_h \in [\theta_t, \theta_u]$ будет означать, что точка $\theta_h \in S^2$ лежит на дуге $[\theta_t, \theta_u]$.

Поскольку параллелограммы – выпуклые множества, они не содержат нетривиальных экстремальных точек (вершины мы игнорируем). И значит, все нетривиальные экстремальные точки содержатся в дополнении к отброшенным 2-граням.

Для каждой четвёрки *отброшенных* параллелограммов вида

$$(\Delta_{r,u}, \Delta_{u,s}, \Delta_{s,t}, \Delta_{t,r})$$

определим множество пар индексов

$$Z(t, s, r, u; N) \stackrel{\text{def}}{=} \{(h, m) : m \geq h + 1, h \geq N + 1, \\ \theta_h \in [\theta_t, \theta_u], \theta_m \in [\theta_r, \theta_s]\},$$

отвечающее номерам в точности тех из оставшихся параллелограммов $\Delta_{h,m}$, которые попали в промежуток между $\Delta_{r,u}, \Delta_{u,s}, \Delta_{s,t}, \Delta_{t,r}$.

Этот промежуток, то есть весь участок границы между 2-гранями $\Delta_{r,u}, \Delta_{u,s}, \Delta_{s,t}, \Delta_{t,r}$, мы обозначим через $L(t, s, r, u; N) \subset \partial Z_\alpha$ и будем называть *криволинейной лакуной*, или просто *лакуной*.

Обозначим через $D(t, s, r, u; N) \subset \partial Z_\alpha$ и будем называть *линейной дыркой*, или просто *дыркой*, участок границы, состоящий в точности из тех параллелограммов $\Delta_{h,m}$, которые попали в промежуток между $\Delta_{r,u}, \Delta_{u,s}, \Delta_{s,t}, \Delta_{t,r}$. Точнее,

$$D(t, s, r, u; N) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\Delta_{h,m} : (h, m) \in Z(t, s, r, u; N)\}.$$

Тогда лакуна $L(t, s, r, u; N) \subset \partial Z_\alpha$ состоит в точности из попавших в неё нетривиальных экстремальных точек и точек *дырки* $D(t, s, r, u; N)$.

Наконец, именно в этих лакунах и содержатся все интересные нас экстремальные точки.

Таким образом,

$$F_\alpha \setminus E \not\subset \bigcup_{t,s,r,u} D(t, s, r, u; N),$$

но

$$F_\alpha \setminus E \subset \bigcup_{t,s,r,u} L(t, s, r, u; N).$$

В фиксированной лакуне $L(t, s, r, u)$ есть два главных направления движения: от θ_t к θ_u и от θ_r к θ_s .

Множество всевозможных пар $(\theta_h, \theta_m) \in [\theta_t, \theta_u] \times [\theta_r, \theta_s]$, воспринимаемых как сферические координаты точек на S^2 , застилает *сферический четырёхугольник*.

Зафиксируем произвольные $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ и для всех t, s, r, u рассмотрим множества

$$A_1(t, s, r, u; N, K_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{h(k_1; t, s, r, u; N, K_1)\}_{k_1=1}^{K_1}$$

наименьших индексов $h \geq N + 1$, таких что $\theta_h \in [\theta_t, \theta_u]$, и

$$A_2(t, s, r, u; N, K_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{m(k_2; t, s, r, u; N, K_1)\}_{k_2=1}^{K_2}$$

наименьших индексов $m \geq h + 1$, таких что $\theta_m \in [\theta_r, \theta_s]$.

На каждую пару отрезков (l_h, l_m) , таких что $(h, m) \in A_1 \times A_2$, натянем 2-грань $\Delta_{h,m}$. Полученные параллелограммы будем называть *опорными* для данной *лакуны*. Сами индексы h и m будем писать как $h(k_1)$ и $m(k_2)$ или как h_{k_1} и m_{k_2} в зависимости от удобства.

Замечание 4.3.3. Получившееся семейство из $K_1 \times K_2$ параллелограммов образует *сетку* внутри соответствующей *дырки*.

Она имеет ширину в K_1 штук 2-граней и длину в K_2 штук 2-граней, причём любая пара соседних “по строке” или “по столбцу” 2-граней “стыкуется” по отрезку одной и той же длины и одного и того же направления.

Для каждой 2-граны $\Delta_{h(k_1), m(k_2)}$ из *сетки* построим её *расширение* $\tilde{\Delta}_{h(k_1), m(k_2)}$ по следующей *процедуре*.

- (1) Рассмотрим множество индексов

$$\begin{aligned} I_1(h_{k_1}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : l_i \text{ попадает между } l_{h(k_1-1)} \text{ и } l_{h(k_1)}\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : \theta_i \in [\theta_{h(k_1-1)}, \theta_{h(k_1)}]\}. \end{aligned}$$

- (2) Обозначим сумму длин соответствующих отрезков через

$$s_{h(k_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum \{l_i : i \in I_1(h_{k_1})\}.$$

- (3) Рассмотрим множество индексов

$$\begin{aligned} I_2(m_{k_2}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : l_i \text{ попадает между } l_{m(k_2-1)} \text{ и } l_{m(k_2)}\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : \theta_i \in [\theta_{m(k_2-1)}, \theta_{m(k_2)}]\}. \end{aligned}$$

- (4) Обозначим сумму длин соответствующих отрезков через

$$s_{m(k_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum \{l_i : i \in I_2(m_{k_2})\}.$$

- (5) Определим $\hat{\Delta}_{h,m} \subset \mathbb{R}^3$ как параллелограмм, полученный из исходного параллелограмма $\Delta_{h,m}$ удлинением (в нужных направлениях) образующих его отрезков l_h и l_m до отрезков длины $l_h + s_h$ и $l_m + s_m$ соответственно.

- (6) Часть *удлинённого параллелограмма* $\hat{\Delta}_{h,m}$, которая равна старому $\Delta_{h,m}$, будет лежать на границе зонотопа. Прибавленная же часть будет касаться ∂Z_α с внешней стороны.

- (7) Наконец спроецируем *удлинённый параллелограмм* $\widehat{\Delta}_{h,m}$ обратно на границу зонотопа с помощью *метрической проекции* на Z_α , т.е. положим

$$\widetilde{\Delta}_{h,m} \stackrel{\text{def}}{=} p(\widehat{\Delta}_{h,m}).$$

Из построения видно, что при достаточно больших N , K_1 и K_2 для каждой t, s, r, u лагуна $L(t, s, r, u; N)$ покрывается множеством *расширений* $\widetilde{\Delta}_{h,m}$ по $(h, m) \in A_1 \times A_2$, т.е.

$$L(t, s, r, u; N) \subset \bigcup_{(h,m) \in A_1 \times A_2} \widetilde{\Delta}_{h,m}.$$

Кроме того, сжатие при проекции p гарантирует нам контроль над диаметрами *расширений* через диаметры *удлинённых параллелограммов*. Иными словами,

$$\text{diam } \widetilde{\Delta}_{h,m} = \text{diam } p(\widehat{\Delta}_{h,m}) \leq \text{diam } \widehat{\Delta}_{h,m}.$$

Замечание 4.3.4. Из первой части доказательства мы помним, что оценивать диаметры *произвольных* параллелограммов довольно затруднительно. Поэтому мы поступим иначе.

Разрежем предварительно каждый имеющийся *удлинённый параллелограмм* $\widehat{\Delta}_{h,m}$ вдоль каждой из двух его образующих по составляющим её длину отрезкам l_j .

После разрезания мы получим набор параллелограммов Δ_{j_1, j_2} , где $j_1 \in I_1(h) \cup \{h\}$ и $j_2 \in I_2(m) \cup \{m\}$ с длинами сторон равными l_{j_1}, l_{j_2} .

Ровно один из Δ_{j_1, j_2} лежит на границе зонотопа (это исходный $\Delta_{h,m}$ до *удлинения*). Оставшиеся же продолжают его и находятся с внешней стороны от ∂Z_α .

Далее, с каждым параллелограммом Δ_{j_1, j_2} проведём процедуру *разрезания на ромбы* вдоль большей стороны (описанную в первой части доказательства).

В итоге каждый *удлинённый параллелограмм* $\widehat{\Delta}_{h,m}$ окажется представлен в виде объединения маленьких *ромбиков* $\delta_{j_1, j_2}^{(r)}$:

$$\widehat{\Delta}_{h,m} = \bigcup_{j_1, j_2} \Delta_{j_1, j_2} = \bigcup_{j_1, j_2, r} \delta_{j_1, j_2}^{(r)}.$$

И, значит,

$$L(t, s, r, u; N) \subset \bigcup_{(h,m) \in A_1 \times A_2} p(\widehat{\Delta}_{h,m}) = \bigcup_{h,m} \bigcup_{j_1, j_2, r} p(\delta_{j_1, j_2}^{(r)}).$$

В качестве покрытия, сумму диаметров которого в степени $\beta > 0$ мы будем оценивать, мы возьмём построенное выше покрытие множествами $p(\delta_{j_1, j_2}^{(r)})$.

Учитывая, что $\text{diam } p(\delta_{j_1, j_2}^{(r)}) \leq \text{diam } \delta_{j_1, j_2}^{(r)}$, мы приходим к выражению вида

$$Q(N, K_1, K_2) = \sum_{t, s, r, u} \sum_{k_1=1}^{K_1} \sum_{k_2=1}^{K_2} \sum_{j_1 \in I_1(h_{k_1})} \sum_{j_2 \in I_2(h_{k_2})} \sum_r \left(\text{diam } \delta_{j_1, j_2}^{(r)} \right)^\beta.$$

Несложная манипуляция с индексными множествами (аналогичная случаю $d = 2$) приводит рассматриваемую сумму к выражению вида $H(N)$, определённого в (4), чего мы и добивались.

Как уже было сказано ранее, случай размерности $d \geq 4$ формализуется в точности той же процедурой с той лишь разницей, что 2-границы заменяются на $(d - 1)$ -границы и число индексов возрастает в разы. Доказательство окончено.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задаче о зонотопах следующим важным продвижением могла бы стать нетривиальная нижняя оценка в произвольной размерности (или хотя бы в трёхмерии) для случая равномерной спектральной меры σ .

Основная гипотеза состоит в том, что $\dim_H F_\alpha = (d - 1)\alpha$. К сожалению, не представляется до конца понятным, как можно было бы это доказать.

На плоскости нижняя оценка была получена из связи с теорией α -устойчивых субординаторов [7]. К сожалению, пока данный подход не обобщается напрямую на большие размерности.

Один из возможных путей состоит в использовании Леммы Фростмана и характеристики меры Хаусдорфа множества с помощью преобразования Фурье. Для этого необходимо было бы построить на F_α такую вероятностную меру μ , хвосты характеристической функции которой убывали бы достаточно быстро на бесконечности.

Такую меру, разумеется, можно было бы строить с помощью бесконечных свёрток сумм дельта-мер (класть нагрузки в вершины граничных параллелепипедов). Непонятно, однако, как оценивать хвосты получающегося после перехода в Фурье-образ бесконечного произведения косинусов.

Возможно, решение откроется и через иной метод. Во всяком случае, вопрос о нижней оценке оставляет поле для дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Giné, M. Hahn, *Characterization and domains of attraction of p -stable random compact sets*. — Ann. Probab. **13** (1985), 447–468.
2. Y. Davydov, V. Paulauskas, A. Račkauskas, *More on p -stable convex random sets in Banach spaces*. — J. Theor. Probab. **13** (2000), 39–64.
3. Y. Davydov, V. Paulauskas, *Recent results on p -stable convex compact sets with applications*. — Fields Inst. Commun. **44** (2004), 127–139.
4. Y. Davydov, I. Molchanov, S. Zuyev, *On strictly stable laws on convex cones*. — Electron. J. Probab. **13** (2008), 259–321.
5. Y. Davydov, V. Paulauskas, *Remarks on random countable stable zonotopes*. — Statist. Probab. Lett. **153** (2019), 187–191.
6. B. Gnedenko, A. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley Mathematical Series, 1968.
7. J. Bertoin, *Subordinators: Examples and applications*. — Lect. Notes Math. **1717** (1999), 1–91.
8. K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, 2007.
9. J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 2005.
10. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, 1968.
11. J. A. Tropp, *ACM 204: Lectures on Convex Geometry*, California Inst. Technology, 2022.

Kukushkin M. A. Geometrical characteristics of random countable zonotopes.

This note studies *random countable zonotopes* in $\mathbb{R}^d$, i.e., objects of the form $Z_\alpha = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}} [0, \varepsilon_k]$, $0 < \alpha < 1$, where $\Gamma_k = \sum_{j=1}^k \tau_j$, $\{\tau_j, j \geq 1\}$ are i.i.d. random variables with a common standard exponential distribution, and $\{\varepsilon_j, j \geq 1\}$ are i.i.d. random vectors with a common distribution σ concentrated on the unit sphere $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. The sequences $\{\tau_j\}$ and $\{\varepsilon_j\}$ are assumed to be independent.

The boundary of such a centrally symmetric body, ∂Z_α , has a non-trivial Cantor-like structure. Of interest is the estimation of the Hausdorff dimension of the set of its extreme points, $\dim_H(\text{ext } Z_\alpha)$. For dimension $d = 2$, upper and lower bounds were obtained in Davydov and Paulauskas (2019). However, for $d = 3$ and in higher dimensions, the question of both the lower and the upper bound remained open.

Below, we state and prove a new result concerning the upper bound in an arbitrary dimension. Namely, we claim that the inequality $\dim_H(\text{ext } Z_\alpha) \leq \alpha + d - 2$ holds almost surely for any $d \geq 2$ and $0 < \alpha < 1$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7-9
199034, С.-Петербург,
Россия

Поступило 14 октября 2025 г.

E-mail: `mkukushkin2004@gmail.com`