

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

**ОДНА ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ
ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА С
СИНГУЛЯРНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВЕТВЛЕНИЯ
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

§1. ВВЕДЕНИЕ.

Пусть $w(t)$, $t \geq 0$, $w(0) = 0$ – стандартный одномерный винеровский процесс. Положим $w_x(t) = x + w(t)$. Рассмотрим ветвящуюся версию этого процесса в предположении, что параметры ветвления зависят от точки, в которой процесс находится в момент ветвления. Ветвящийся процесс может быть описан следующим образом. Частица стартует из точки $x \in \mathbb{R}$ и экспоненциальное время (с параметром единица) движется вдоль траектории винеровского процесса $w_x(t)$. В экспоненциальный момент времени частица исчезает и вместо нее в этой же точке возникает случайное число новых частиц, которые, следуя тому же правилу, движутся по траекториям независимых винеровских процессов и снова ветвятся в не зависящие друг от друга экспоненциальные моменты времени. Количество k появившихся новых частиц при каждом ветвлении является случайной величиной с распределением, зависящим от точки, в которой произошло ветвление. Через $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим вероятность того, что частица разделилась на k частиц, при условии, что ветвление произошло в точке $x \in \mathbb{R}$.

Такой ветвящийся процесс можно рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве конечных конфигураций $\mathcal{X}(\mathbb{R})$, каждый элемент X которого представляет из себя конечное подмножество $\mathbb{R}$. В этом конечном подмножестве мы будем допускать наличие кратных точек (конечной кратности), что соответствует тому, что в данной точке находится несколько частиц.

Далее, через $X_x(t)$ обозначим ветвящийся винеровский процесс, удовлетворяющий начальному условию $X_x(0) = \{x\}$, то есть в начальный момент времени у нас имеется единственная частица, находящаяся в

Ключевые слова: Винеровский процесс, ветвящиеся процессы, предельные теоремы.

точке $x \in \mathbb{R}$. В рамках настоящей работы мы ограничимся только нахождением математических ожиданий функционалов $I_{t,x}(\varphi)$ от процесса $X_x(t)$, задаваемых как

$$I_{t,x}(\varphi) = \sum_{y \in X_x(t)} \varphi(y), \quad (1)$$

где $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция. Это соответствует тому, что мы изучаем не весь ветвящийся процесс, а только его ”линейную” часть. Действительно, каждой конфигурации $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ мы можем сопоставить дискретную меру μ_X вида

$$\mu_X = \sum_{y \in X} \delta_y,$$

где δ_y – единичная масса, находящаяся в точке $y \in X \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$. В этих обозначениях (1) может быть переписана как

$$I_{t,x}(\varphi) = \int \varphi d\mu_X.$$

В случае, когда $I_{t,x}(\varphi)$ при всех $t > 0$ имеет конечное математическое ожидание, семейство операторов

$$[P^t \varphi](x) = \mathbb{E} I_{t,x}(\varphi) \quad (2)$$

образует полугруппу, т.е. $P^{t+s} = P^t P^s$ для всех $t, s \geq 0$, а функция $u(t, x) = \mathbb{E} I_{t,x}(\varphi)$ решает задачу Коши

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + \beta(x)u, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (3)$$

где

$$\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(x) - 1.$$

Величину $\beta(x)$ называют интенсивностью ветвления в точке x . Из (3) в частности следует, что в рамках нашего подхода все схемы ветвления с одной и той же интенсивностью ветвления $\beta(x)$ для нас являются неразличимыми. Как и в [6], условимся называть класс эквивалентности таких процессов *ветвящимся процессом в широком смысле*.

На уравнение (3) естественно смотреть как на аналог обратного уравнения Колмогорова, описывающий эволюцию функций $\varphi \mapsto P^t \varphi$.

Отметим важное отличие семейств операторов P^t от аналогичных семейств, отвечающих марковским процессам. В отличие от марковских процессов на конечномерном или конечном фазовом пространстве, операторы P^t не определяют весь ветвящийся процесс, а только ветвящийся процесс в широком смысле.

В §2 настоящей работы мы выпишем аналог прямого уравнения Колмогорова, описывающего эволюцию мер.

В нашей работе [6] рассматривался случай, когда интенсивность ветвления $\beta(x)$ имела вид

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta(x - x_j) - d, \quad (4)$$

то есть являлась обобщенной функцией, именно, линейной комбинацией дельта-функций, сосредоточенных в точках $x_1, \dots, x_N$ минус некоторая константа $d \geq 0$. Отметим, что ветвящиеся процессы, соответствующие случаю $N = 1$, подробно рассматривались в [1, 2, 3]. Сложность изучения таких процессов состоит в том, что описанный выше способ построения процесса, при котором ветвление происходит через экспоненциальный момент времени, заведомо непригоден, равно как непригоден способ, при котором деление происходит при каждом попадании траектории в одну из точек x_j .

В [6] был представлен возможный способ генерации траекторий ветвящихся процессов рассматриваемого вида (способ заведомо не единственный, так как, как было отмечено выше, мы рассматриваем ветвящийся процесс в широком смысле).

Кроме того, рассматривалось прямое уравнение Колмогорова и было показано, что эволюция мер устроена так же, как и для обычного марковского процесса. Именно, было приведено необходимое и достаточное условие существования абсолютно непрерывного инвариантного распределения, показана положительность плотности и выписан явный вид инвариантной плотности. Также была доказана предельная теорема об экспоненциально быстрой сходимости при $t \rightarrow \infty$ произвольного начального распределения с квадратично интегрируемой плотностью в $L_2(\mathbb{R})$ к инвариантному распределению.

В настоящей работе будут получены аналогичные результаты для случая, когда интенсивность ветвления есть обобщенная функция β^α , зависящая от параметра $\alpha \in (0, 1/2)$. По определению (см., например, [10]), обобщенная функция β^α на основную функцию φ действует

как

$$(\beta^\alpha, \varphi) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{1+\alpha}} dx. \quad (5)$$

Будет доказано существование абсолютно непрерывного инвариантного распределения с квадратично интегрируемой плотностью, получена асимптотика его плотности в нуле и на бесконечности и доказана предельная теорема о сходимости в $L_2(\mathbb{R})$ к этому инвариантному распределению. Существенным отличием от [6] является то, что процесс с интенсивностью вида (5) исходно будет определен только в слабом смысле (без алгоритма генерации траекторий). Именно, он будет определяться как предел обычных ветвящихся процессов с регулярной интенсивностью ветвления, но предельный процесс будет задан только своей эволюцией мер. Причина состоит в том, что в правой части (5) невозможно заменить на сумму интегралов. Грубо говоря, в начале координат находится дельта-функция с коэффициентом равным бесконечности, но зависящим еще и от α , а вне нуля находится сильный «убивающий» потенциал, стремящийся к бесконечности при приближении к началу координат. Такому объекту можно придать смысл явным указанием регуляризации, что соответствует тому, что мы его рассматриваем только как предельный, т.е. только в слабом смысле.

По умолчанию все обобщенные функции мы далее будем рассматривать как линейные непрерывные функционалы на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всех вещественных (основных) функций ψ , каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна. Последовательность $\{\psi_n\}$ основных функций стремится к нулю в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R})$, если все эти функции обращаются в нуль вне одного и того же интервала и равномерно сходятся к нулю также как и их производные любого порядка (подробнее см. [10]).

Каждая функция $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ определяет линейный функционал (обобщенную функцию), действующую на $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ как

$$(f, \psi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \psi(y) dy. \quad (6)$$

Линейные функционалы (обобщенные функции) вида (6) называют регулярными функционалами, все остальные – сингулярными. Последовательность обобщенных функций $\{h_n\}$ сходится к обобщенной

функции h , если для любого $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n, \psi) = (h, \psi). \quad (7)$$

Если все обобщенные функции h_n являются регулярными функционалами (т.е. функциями класса $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$), то говорят, что последовательность $\{h_n\}$ сходится в смысле обобщенных функций. Предельная обобщенная функция h уже не обязана быть регулярным функционалом.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА.

Следуя [6], выпишем сначала аналог прямого уравнения Колмогорова, описывающего эволюцию мер. Для этого заметим, что если $\varphi = \mathbf{1}_\Gamma$, где Γ – борелевское подмножество вещественной прямой, то величину $[P^t \mathbf{1}_\Gamma](x)$ можно интерпретировать как среднее число частиц в множестве Γ в момент времени t при условии, что в начальный момент времени у нас имелась единственная частица, находящаяся в точке x . Будем предполагать, что величина $[P^t \mathbf{1}_\Gamma](x)$ конечна при всех $t > 0$.

Далее, пусть ν – мера конечной полной вариации на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для $t > 0$ определим меру νP^t , полагая для $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$[\nu P^t](\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int [P^t \mathbf{1}_\Gamma](x) \nu(dx). \quad (8)$$

В случае, когда ν неотрицательна, меру νP^t в терминах ветвящегося случайного блуждания можно интерпретировать следующим образом. Пусть в начальный момент времени у нас имеется случайная конфигурация частиц, причем среднее число частиц в любом борелевском множестве Γ есть $\nu(\Gamma)$. Далее, отталкиваясь от этой конфигурации (напомним, что ветвящееся случайное блуждание мы рассматриваем как марковский процесс со значениями в пространстве конфигураций $\mathcal{X}(\mathbb{R})$), запустим ветвящееся случайное блуждание и посмотрим на него в момент времени $t > 0$. Для каждого борелевского Γ величина $\nu P^t(\Gamma)$ есть среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в момент времени t в множестве Γ . При этом усреднение производится как по начальным конфигурациям, так и по траекториям ветвящегося процесса.

Заметим теперь, что на множестве кусочно-постоянных функций вида

$$\varphi = \sum_{k=1}^K a_k \mathbf{1}_{\Gamma_k},$$

оператор P^t , действующий на функции и оператор P^t , действующий на меры, являются формально сопряженными. Действительно,

$$\begin{aligned} (\nu, P^t \varphi) &= (\nu, P^t \sum_{k=1}^K a_k \mathbf{1}_{\Gamma_k}) = \sum_{k=1}^K a_k (\nu, P^t \mathbf{1}_{\Gamma_k}) \\ &= \sum_{k=1}^K a_k \int [P^t \mathbf{1}_{\Gamma_k}](x) \nu(dx) = \sum_{k=1}^K a_k (\nu P^t)(\Gamma_k) = (\nu P^t, \varphi). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интересующий нас случай, когда интенсивность $\beta(x)$ есть обобщенная функция β^α , определяемая в (5).

Неформально говоря, в начале координат находится единственный источник, в котором частица делится (причем с бесконечной интенсивностью), но как только новая частица смещается, она с вероятностью, близкой к единице, погибает. Не вполне понятно, как можно напрямую генерировать траектории такого ветвящегося процесса, так как упомянутая бесконечная интенсивность на самом деле, как показывает формула (5), зависит от α . Как уже было указано во введении, проблема состоит в том, что в (5) интеграл от разности не может быть заменен на разность интегралов.

Для того чтобы придать смысл такому ветвящемуся процессу, мы применим подход, близкий к используемому в [8]. Процесс с интенсивностью β^α мы построим как предельный для некоторого другого семейства обычных ветвящихся процессов. Для этого для всякого $\varepsilon > 0$ определим функцию $\beta_\varepsilon^\alpha(x)$, полагая

$$\beta_\varepsilon^\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{1}{|x|^{1+\alpha}} & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ \frac{1}{\alpha \varepsilon^{1+\alpha}} & \text{при } |x| \in [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

Заметим, что $\beta_\varepsilon^\alpha \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} \beta_\varepsilon^\alpha(x) dx = 0.$$

Далее, покажем, что предел $\beta_\varepsilon^\alpha(x)$ в смысле обобщенных функций есть обобщенная функция $\beta^\alpha(x)$, определяемая в (5). Действительно,

для любой основной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ мы имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \beta_\varepsilon^\alpha(x) \varphi(x) dx = - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - (\varphi, \delta_\varepsilon)}{|x|^{1+\alpha}} dx, \quad (9)$$

где через δ_ε обозначена функция $\frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$. Как легко видеть, правая часть (9) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к величине

$$- \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{1+\alpha}} dx = (\beta^\alpha, \varphi).$$

С функцией $\beta_\varepsilon^\alpha(x)$ свяжем самосопряженный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon) = W_2^2(\mathbb{R})$ и действующий на этой области определения как

$$\mathcal{A}_\varepsilon \varphi(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) - \beta_\varepsilon^\alpha(x) \varphi(x).$$

Следующим шагом покажем, как можно смоделировать процесс интенсивностью ветвления $\beta_\varepsilon^\alpha(x)$. Пусть частица стартует из точки $x \in \mathbb{R}$ и движется вдоль траектории винеровского процесса $w_x(t)$, $w_x(0) = x$.

Далее, пусть Π — пуассоновское поле на $[0, \infty)$ с интенсивностью $|\beta_\varepsilon^\alpha(w_x(t))|$. В момент появления первой точки s этого пуассоновского поля если $\beta_\varepsilon^\alpha(w_x(s)) > 0$, то исходная частица исчезает, а вместо нее в той же точке появляются две новые частицы, движущиеся независимо друг от друга по тому же закону, что и исходная частица. В противном случае (когда $\beta_\varepsilon^\alpha(w_x(s)) < 0$) исходная частица исчезает, не оставляя потомства.

Покажем теперь, что для описанного ветвящегося случайного блуждания генератор полугруппы P_ε^t , задаваемой (2), равен $-\mathcal{A}_\varepsilon$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Генератор полугруппы P_ε^t есть оператор*

$$-\mathcal{A}_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \beta_\varepsilon^\alpha(x),$$

то есть для всех $\varphi \in W_2^2(\mathbb{R})$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{[P_\varepsilon^t \varphi](x) - \varphi(x)}{t} = \frac{\varphi''(x)}{2} + \beta_\varepsilon^\alpha(x) \varphi(x). \quad (10)$$

(предел в (10) понимается в смысле $L_2(\mathbb{R})$).

Доказательство. Через β_ε^+ обозначим функцию (зависимость от α будем в обозначениях опускать)

$$\beta_\varepsilon^+(x) = \max(\beta_\varepsilon^\alpha(x), 0).$$

При $t \rightarrow 0+$ имеем

$$\begin{aligned} [P_\varepsilon^t \varphi](x) - \varphi(x) &= \mathbb{E} I_{t,x}(\varphi) - \varphi(x) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t |\beta_\varepsilon^\alpha(w_x(\tau))| d\tau} \varphi(w_x(t)) - \varphi(x) + 2 \int_0^t \beta_\varepsilon^+(w_x(\tau)) \varphi(w_x(\tau)) d\tau \right] + o(t) \\ &= \mathbb{E} [\varphi(w_x(t)) - \varphi(x)] - \mathbb{E} \varphi(w_x(t)) \int_0^t |\beta_\varepsilon^\alpha(w_x(\tau))| d\tau \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \int_0^t \beta_\varepsilon^+(w_x(\tau)) \varphi(w_x(\tau)) d\tau + o(t) \\ &= \mathbb{E} [\varphi(w_x(t)) - \varphi(x)] - \mathbb{E} \int_0^t (\varphi(w_x(t)) - \varphi(w_x(\tau))) |\beta_\varepsilon^\alpha(w_x(\tau))| d\tau \\ &\quad + \mathbb{E} \int_0^t \beta_\varepsilon^\alpha(w_x(\tau)) \varphi(w_x(\tau)) d\tau + o(t) \\ &= t \frac{\varphi''(x)}{2} + t \beta_\varepsilon^\alpha(x) \varphi(x) + o(t). \end{aligned}$$

Так как для любого фиксированного ε функция β_ε^α ограничена, то нетрудно показать, что сходимость имеет место не только поточечная, но и в смысле $L_2(\mathbb{R})$. $\square$

Из теоремы 1 вытекает, что полугруппа P_ε^t представляется в виде

$$P_\varepsilon^t = e^{-t\mathcal{A}_\varepsilon}.$$

Итак, мы знаем, что при фиксированном ε генератором полугруппы P_ε^t ветвящегося винеровского процесса с интенсивностью β_ε^α является оператор $-\mathcal{A}_\varepsilon$. Далее, мы знаем, что в смысле сходимости обобщенных функций интенсивность β_ε^α сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к β^α . Покажем теперь, что семейство операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ сходится (в каком смысле, будет объяснено ниже) к самосопряженному оператору $\mathcal{A}$, который определяется

как

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \beta^\alpha(x). \quad (11)$$

Сложность в данном случае состоит в том, что в (11) потенциал $\beta^\alpha(x)$ является не функцией, а обобщенной функцией. Теория таких операторов была построена в работе [8]. В этой работе рассматривались операторы вида $-\frac{d^2}{dx^2} + v'(x)$ с потенциалом, который является производной (в смысле обобщенных функций) функции $v \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R})$. Мы будем использовать общие результаты [8] для исследования оператора (11).

Сформулируем используемые в дальнейшем утверждения.

Напомним (подробнее см. [4], глава 10), что полуограниченная полуторалинейная эрмитова форма $a : \mathcal{D}[a] \times \mathcal{D}[a] \rightarrow \mathbb{C}$ (через $\mathcal{D}[a]$ обозначена область определения формы) называется замкнутой, если ее область определения полна по норме

$$\|f\|_a^2 = C\|f\|^2 + a[f, f],$$

константа C здесь выбирается удовлетворяющей условию $C > m_a$, где m_a — точная нижняя граница формы a .

Самосопряженный оператор A соответствует форме a тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}[a] \quad \text{и} \quad (Af, \varphi) = a[f, \varphi]$$

для любых $f \in \mathcal{D}(A)$, $\varphi \in \mathcal{D}[a]$.

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ форму a , заданную на $\mathcal{D}[a] = W_2^1(\mathbb{R})$ по правилу

$$a[f, \varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f'(x) \overline{\varphi'(x)} dx + \int_{\mathbb{R}} [f(x) \overline{\varphi(x)} - f(0) \overline{\varphi(0)}] \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (12)$$

Заметим еще, что правая часть (12) корректно определена, так как функции класса $W_2^1(\mathbb{R})$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}$.

Следующая лемма показывает, как устроен оператор $\mathcal{A}$, соответствующий форме a . Через $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$ будем обозначать множества $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ соответственно.

Лемма 1. 1. Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, соответствующего форме (12), имеет вид

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ f \in W_2^1(\mathbb{R}) : f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm), f'(\varepsilon) - f'(-\varepsilon) + \frac{4f(0)}{\alpha} \varepsilon^{-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0 \right\}.$$

2. На $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператор $\mathcal{A}$ действует как ($x \neq 0$)

$$\mathcal{A}f(x) = -\frac{1}{2}f''(x) + \frac{f(x)}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (13)$$

3. В смысле теории обобщенных функций (см. [10])

$$\mathcal{A}f = -\frac{1}{2}f'' - \beta^\alpha f, \quad (14)$$

где β^α – обобщенная функция (5).

Доказательство этой леммы можно найти в [7].

Следующим шагом мы покажем, что для любого $t > 0$ оператор P^t есть сильный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ операторов P_ε^t . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|P_\varepsilon^t f - P^t f\|_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|e^{-t\mathcal{A}_\varepsilon} f - e^{-t\mathcal{A}} f\|_2 = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в смысле дифференцирования обобщенных функций

$$\beta^\alpha = (v^\alpha)', \quad \text{где } v^\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} |x|^{-\alpha} \operatorname{sgn}(x),$$

а $\beta_\varepsilon^\alpha = (v_\varepsilon^\alpha)'$, где

$$v_\varepsilon^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} |x|^{-\alpha} \operatorname{sgn}(x) & \text{при } |x| > \varepsilon, \\ \frac{x}{\alpha \varepsilon^{1+\alpha}} & \text{при } |x| \in [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

Заметим, что функция $v_\varepsilon^\alpha(x)$ является абсолютно непрерывной, поэтому в данном случае речь идет об обычном дифференцировании.

Далее, имеем

$$\|v_\varepsilon^\alpha - v^\alpha\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} \left(\int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^{2\alpha}} + \frac{\varepsilon^{1-2\alpha}}{3} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (15)$$

Так как $\|v_\varepsilon^\alpha - v^\alpha\|_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то согласно теореме 6 работы [8], $\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}$ в смысле равномерной резольвентной сходимости и $\sigma(\mathcal{A}_\varepsilon) \rightarrow \sigma(\mathcal{A})$. Тем самым, в силу теоремы VIII.20 книги [9], для любого $t > 0$ имеет место сильная сходимость

$$e^{-t\mathcal{A}_\varepsilon} \rightarrow e^{-t\mathcal{A}},$$

что эквивалентно утверждению теоремы. $\square$

Итак, доказали, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ полугруппа P_ε^t сильно сходится к полугруппе $P^t = e^{-tA}$. Важно отметить, что предельный объект порождает только ветвящийся процесс в слабом смысле, т.е. порождает эволюцию как функций, так и мер. Есть ли принципиальная возможность генерировать траектории такого процесса, это вопрос открытый, и, судя по всему, ответ на него отрицательный.

В следующем параграфе мы будем изучать асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ предельной полугруппы, как полугруппы операторов, описывающих эволюцию мер. Для этого нам необходимо исследовать спектр оператора $\mathcal{A}$.

§3. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА.

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ линейное подмножество функций $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$. Ясно, что

$$\mathcal{D}_0 = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}.$$

Выберем и зафиксируем финитную функцию $g(x)$, дважды непрерывно дифференцируемую вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, а на интервале $[-1, 1]$ задаваемую формулой

$$g(x) = 1 - \frac{2}{\alpha(1-\alpha)}|x|^{1-\alpha} - \frac{2}{\alpha(1-\alpha)^2(1-2\alpha)}|x|^{2-2\alpha}.$$

Как легко видеть, выполнено $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, и для любой функции $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ функция $f(x) - f(0)g(x)$ принадлежит $\mathcal{D}_0$. Таким образом,

$$\dim(\mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda)/\mathcal{D}_0) = 1. \quad (16)$$

Обозначим через $\mathcal{A}_0$ симметричный оператор, определяемый как сужение оператора $\mathcal{A}$ на $\mathcal{D}_0$. Из (16) вытекает, что $n_\pm(\mathcal{A}_0) = 1$, где через $n_\pm(\mathcal{A}_0)$ обозначены индексы дефекта (см. [4], глава 4, §4.1) оператора $\mathcal{A}_0$ в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости.

Так как квадратичная форма оператора $\mathcal{A}_0$ неотрицательна, то отрицательный спектр оператора $\mathcal{A}$ может состоять не более чем из одного собственного значения. Для того чтобы показать, что отрицательное собственное значение в спектре $\mathcal{A}$ действительно имеется, достаточно показать, что квадратичная форма (12) принимает отрицательные значения.

Для того чтобы убедиться в том, что квадратичная форма $a[f, f]$ принимает отрицательные значения, рассмотрим функцию

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2t^2}},$$

где значение параметра $t > 0$ выберем позднее. Имеем

$$\begin{aligned} a[f, f] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} [|f(x)|^2 - |f(0)|^2] \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \\ &= \frac{1}{2t^4} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{t^2}} dx + \int_{\mathbb{R}} [e^{-\frac{x^2}{t^2}} - 1] \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy - t^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} [1 - e^{-y^2}] \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что выбирая значение параметра t достаточно большим, мы можем сделать последнее выражение отрицательным.

Итак, мы показали, что отрицательный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из единственного простого собственного значения, которое далее мы будем обозначать через $-\mu$. Соответствующую нормированную собственную функцию будем обозначать через φ , $\|\varphi\|_2 = 1$. Функция $u = \varphi$ есть единственное (с точностью до умножения на константу) принадлежащее $W_2^1(\mathbb{R})$ решение уравнения ($x \neq 0$)

$$-\frac{1}{2}u''(x) + \frac{u(x)}{|x|^{1+\alpha}} + \mu u(x) = 0. \quad (17)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. 1. Собственная функция φ четная и может быть выбрана строго положительной.

2. При $|x| \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$\varphi(x) = 1 - \frac{2}{\alpha(1-\alpha)}|x|^{1-\alpha} - \frac{2}{\alpha(1-\alpha)^2(1-2\alpha)}|x|^{2(1-\alpha)} + O(|x|^{3(1-\alpha)}).$$

3. При $|x| \rightarrow \infty$ для некоторой константы $C > 0$ справедливо соотношение

$$\varphi(x) \sim Ce^{-\sqrt{2\mu}|x|}. \quad (18)$$

Доказательство этой леммы можно найти в [7].

Рассмотрим теперь для предельного ветвящегося случайного блуждания, понимаемого в слабом смысле, действующий на меры оператор P^t вида (8). Так как генератор полугруппы является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, то, как уже отмечалось, на множестве абсолютно непрерывных знакопеременных мер с квадратично суммируемой плотностью действие этого оператора совпадает с действием сопряженного оператора, действующего на плотность меры. Если знакопеременная мера является неотрицательной, то, как было отмечено в §2, эволюцию меры можно интерпретировать как эволюцию плотности частиц.

Как мы показали, оператор P^t может быть представлен как

$$P^t = e^{-tA}.$$

Следовательно, для собственной функции φ мы имеем

$$P^t \varphi = e^{-tA} \varphi = e^{t\mu} \varphi,$$

или

$$e^{-t\mu} P^t \varphi = \varphi.$$

Последнее равенство означает, что с точностью до нормирующего множителя $e^{-t\mu}$ абсолютно непрерывная мера с плотностью φ является инвариантным распределением. Следующая теорема показывает, что при $t \rightarrow \infty$ плотность произвольного распределения, умноженная на $e^{-t\mu}$ экспоненциально быстро сближается с инвариантной.

Теорема 3. Пусть $X_x(t)$ – ветвящийся винеровский процесс, понимаемый в слабом смысле, порождающий полугруппу P^t с генератором $-A$, определяемым (13). Пусть ν – абсолютно непрерывная мера с плотностью $q \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $t > 0$ мера νP^t абсолютно непрерывна, а ее плотность q_t удовлетворяет неравенству

$$\|e^{-t\mu} q_t - (q, \varphi) \varphi\|_2 \leq e^{-t\mu} \|q - (q, \varphi) \varphi\|_2 \leq e^{-t\mu} \|q\|_2.$$

Доказательство. Разложим функцию q в $L_2(\mathbb{R})$ на ее проекцию на φ плюс проекция на ортогональное дополнение к φ :

$$q = (q, \varphi) \varphi + g,$$

где $g = q - (q, \varphi) \varphi$.

Далее имеем

$$q_t = e^{-tA} q = e^{t\mu} (q, \varphi) \varphi + e^{-tA} g.$$

Так как g лежит в ортогональном дополнении к φ , а интервал $(-\mu, 0)$ является спектральной лакуной оператора $\mathcal{A}$, то справедливо неравенство

$$\|e^{-t\mathcal{A}}g\|_2 \leq \|g\|_2 \leq \|q\|_2. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Bocharov, S. C. Harris, *Branching Brownian motion with catalytic branching at the origin*. — Acta Appl. Math. **134**, No. 1 (2014), 201–228.
2. S. Bocharov, S. C. Harris, *Limiting distribution of the rightmost particle in catalytic branching Brownian motion*. — Electron. Commun. Probab. **21**, No. 70 (2016), 1–12.
3. L. Wang, G. W. Zong, *Supercritical branching Brownian motion with catalytic branching at the origin*. — Sci. China Math. **63**, No. 3 (2020), 595–616.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, Лань, 2010.
5. D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1994.
6. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема для одномерных ветвящихся винеровских процессов с точечными источниками ветвления*. — Теория вероятн. и ее примен. **70**, No. 3 (2025), 419–436.
7. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *О некоторых свойствах дробной производной броуновского локального времени*. — Труды МИАН **324** (2024), 109–123.
8. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*. — Матем. заметки, **66**, No. 6 (1999), 897–912.
9. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. 1, М., Мир 1977.
10. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, М., Наука, 1958.

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. A limit theorem for a branching Wiener process with a singular branching intensity of a special type.

We consider a one-dimensional branching Wiener process whose branching rate is a generalized function $-|x|^{-1-\alpha}$, where $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. A semi-group of operators corresponding to this process is constructed and analogs of the direct and inverse Kolmogorov equations are written out. A limit

theorem on convergence to an invariant distribution is proved.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург, Россия, 191023;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: `ibr32@pdmi.ras.ru`

Поступило 30 сентября 2025 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург, Россия, 191023;
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
Москва, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: `smorodina@pdmi.ras.ru`

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб., д. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: `m.faddeev@spbu.ru`