Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

Я. С. Зонова, А. И. Назаров

О ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ L_2-МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ПРОЦЕССОВ ДУРБИНА

§1. Введение

Процессы Дурбина ([3]; см. также [5] и [6]), играющие большую роль в математической статистике, возникают как предельные процессы для критериев согласия, в случае когда некоторые параметры распределения оцениваются по выборке. Эти гауссовские процессы являются конечномерными (m-мерными, где m – число оцениваемых параметров) возмущениями броуновского моста.

В работе [16] показано, что эти возмущения всегда являются *критическими* (в смысле статьи [11]). Это означает, что точная асимптотика малых уклонений в метрике L_2 для возмущенного процесса существенно отличается от асимптотики для исходного процесса. Более того, если функции ψ_i, $i = 1, \ldots, m$, задающие возмущения, не удовлетворяют условию $\psi_i'' \in L_2(0,1)$, то общие теоремы о точной асимптотике L_2-малых уклонений конечномерных возмущений гауссовских процессов (см. [11, теоремы 1, 2] и [16, теоремы 1, 2]) оказываются неприменимы, и соответствующие задачи приходится решать индивидуально.

Для нескольких процессов Дурбина, порождаемых проверкой выборки на некоторые популярные распределения, эти задачи были решены в работах [13] и [15]. В настоящей статье мы рассмотрим семейство процессов Дурбина, порождаемых проверкой на p-гауссовское распределение (см., например, [1, 7]) с плотностью $\frac{1}{\beta} f_p(\frac{x-\alpha}{\beta})$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр сдвига, $\beta > 0$ – параметр масштаба, и

$$f_p(x) = C_p \, e^{-\frac{|x|^p}{p}}.$$

Ключевые слова: малые уклонения, гауссовские процессы, спектральные асимптотики.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение No. 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском ММИ им. Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

Здесь $p \geqslant 1$ – фиксированное число, а $C_p = \frac{1}{2p^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}$ – нормирующая константа. Соответствующая функция распределения имеет вид:

$$\Phi_p(x) = \frac{1}{2} + C_p \int\limits_0^x e^{-\frac{|r|^p}{p}}\, dr.$$

Для $p = 1$ (распределение Лапласа) и $p = 2$ (нормальное распределение) точные асимптотики L_2-малых уклонений порождаемых процессов Дурбина были выведены в [15] и [13] соответственно.

Напомним[1], что задачу об асимптотике малых уклонений в L_2-норме для гауссовского случайного процесса $X(x)$, $x \in [0,1]$, с нулевым средним, используя разложение Кархунена–Лоэва (см., например, [10, глава 2]), можно переписать в виде

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim ?, \quad \varepsilon \to 0,$$

где ξ_k – независимые стандартные гауссовские с.в., а λ_k – собственные числа[2] интегрального оператора

$$\int\limits_0^1 G_X(x,y)\, u_k(y)\, dy = \lambda_k\, u_k(x) \tag{1}$$

(здесь u_k – соответствующие собственные функции) с ядром, равным ковариации процесса $G_X(x,y) = \mathbb{E}\, X(x)\, X(y)$.

Мы рассмотрим (для каждого p) три процесса Дурбина, соответствующие трем случаям:

1) Параметр α оценивается по выборке, а параметр β известен;
2) Параметр α известен, а параметр β оценивается по выборке;
3) Оба параметра α и β оцениваются по выборке.

Общая формула Дурбина ([3]; см. также [16]), примененная к нашей задаче, дает следующие формулы для ковариаций:

1) $G_1(x,y) = G_0(x,y) - K_1\, \psi_1(x)\, \psi_1(y)$;
2) $G_2(x,y) = G_0(x,y) - K_2\, \psi_2(x)\, \psi_2(y)$;
3) $G_3(x,y) = G_0(x,y) - K_1\, \psi_1(x)\, \psi_1(y) - K_2\, \psi_2(x)\, \psi_2(y)$.

---

[1] Подробный обзор этой задачи и имеющихся результатов, а также обширную библиографию можно найти в [14].

[2] Мы будем считать $\lambda_k > 0$ занумерованными по убыванию с учетом кратности.

Здесь $G_0(x,y)=\min\{x,y\}-xy$ – функция ковариации стандартного броуновского моста, а возмущения ψ_i и коэффициенты K_i, $i=1,2$, задаются формулами

$$\psi_1(x)=f_p(\Phi_p^{-1}(x)), \qquad\qquad K_1=\frac{\Gamma\big(1+\frac{1}{p}\big)}{p^{\frac{p-2}{p}}\,\Gamma\big(2-\frac{1}{p}\big)}\,;$$
$$\psi_2(x)=\Phi_p^{-1}(x)\,f_p(\Phi_p^{-1}(x)), \qquad K_2=\frac{1}{p}.$$

В дальнейшем мы считаем, что $p>1$ (напомним, что случай $p=1$ был разобран в [15]).

Опишем структуру нашей статьи. Параграф 2 посвящен выводу уравнений для собственных чисел $\lambda_k^{(i)}$. В §3 выписываются асимптотики интегралов, входящих в эти уравнения, а в §4 – двучленные асимптотики собственных чисел с оценкой остатка. Наконец, §5 содержит основные результаты работы – точные асимптотики L_2-малых уклонений для процессов **1)**–**3)**, см. (20), (21) и (25).

§2. Уравнения для собственных чисел

Хорошо известно, что функция $G_0(x,y)$ является функцией Грина краевой задачи

$$-\lambda u''=u, \quad u(0)=u(1)=0. \tag{2}$$

Поэтому двукратное дифференцирование уравнения (1) дает для трех рассматриваемых процессов следующие задачи на собственные значения:

$$-\lambda\, u''(x)=u(x)-K_1\,\varphi_1(x)\int\limits_0^1 u(y)\,\psi_1(y)\,dy, \quad u(0)=u(1)=0; \tag{3}$$

$$-\lambda\, u''(x)=u(x)-K_2\,\varphi_2(x)\int\limits_0^1 u(y)\,\psi_2(y)\,dy, \quad u(0)=u(1)=0; \tag{4}$$

$$-\lambda\, u''(x) = u(x) - K_1\, \varphi_1(x) \int\limits_0^1 u(y)\, \psi_1(y)\, dy -$$
$$- K_2\, \varphi_2(x) \int\limits_0^1 u(y)\, \psi_2(y)\, dy, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Здесь

$$\varphi_1(x) = -\psi_1''(x) = (p-1)\, \frac{|\Phi_p^{-1}(x)|^{p-2}}{f_p(\Phi_p^{-1}(x))};$$

$$\varphi_2(x) = -\psi_2''(x) = p\, \frac{|\Phi_p^{-1}(x)|^{p-2}\Phi_p^{-1}(x)}{f_p(\Phi_p^{-1}(x))}.$$

Несложно видеть (соответствующие вычисления приведены ниже), что $\varphi_i \notin L_2(0,1)$, $i = 1, 2$.

Замечание 1. Пусть $\lambda_k^{(i)}$ — собственные числа интегральных операторов с ядрами $G_i(s,t)$, $i = 1,2,3$; $k \in \mathbb{N}$. Ядра $G_1(x,y)$ и $G_2(x,y)$ – одномерные возмущения ядра $G_0(s,t)$, поэтому согласно минимаксимальному принципу [2, §9.2] собственные числа возмущенного и невозмущенного операторов перемежаются.

Замечание 2. Собственные функции $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\pi k x)$ краевой задачи (2) являются либо четными (при нечетных k), либо нечетными (при четных k) относительно точки $x = \frac{1}{2}$. Поскольку функция ψ_1 четна относительно $\frac{1}{2}$, соответствующее возмущение не меняет собственные функции $u_{2k}(x)$ и собственные числа $\lambda_{2k} = (2k\pi)^{-2}$. Для простоты мы будем обозначать их $\lambda_{2k}^{(1)} = \lambda_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, несмотря на то, что при этом нумерация в порядке убывания может быть нарушена. Аналогично, функция ψ_2 нечетна относительно $\frac{1}{2}$, поэтому соответствующее возмущение не меняет собственные функции $u_{2k-1}(x)$ и собственные числа $\lambda_{2k-1} = ((2k-1)\pi)^{-2}$, будем обозначать их $\lambda_{2k-1}^{(2)} = \lambda_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, легко видеть, что $\lambda_{2k-1}^{(3)} = \lambda_{2k-1}^{(1)}$ и $\lambda_{2k}^{(3)} = \lambda_{2k}^{(2)}$. Отметим еще, что квадратичная форма возмущенных операторов не превосходит квадратичной формы исходного оператора. В силу минимаксимального принципа это дает неравенства $\lambda_{2k-1}^{(1)} \leqslant \lambda_{2k-1}$ и $\lambda_{2k}^{(2)} \leqslant \lambda_{2k}$.

Для нахождения асимптотики собственных чисел первого из рассматриваемых процессов обозначим $\omega^2 = \lambda^{-1}$ и выпишем общее решение уравнения (3):

$$u(x) = c_0 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\sin(\omega(y-x))}{\omega}\, \varphi_1(y)\, dy + c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x).$$

Подставляя его в граничные условия из (3), получим два линейных однородных уравнения на коэффициенты c_j, $j = 1, 2, 3$. Третье уравнение получается, если приравнять коэффициенты при φ_1 в (3), а уравнение на собственные числа – из условия вырожденности получающейся матрицы:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} \varphi_1(y) \sin(\omega y)\, dy & 1 & 0 \\ \frac{1}{\omega} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi_1(y) \sin(\omega(y-1))\, dy & \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ \frac{1}{\omega^2 K_1} + \int\limits_0^1 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\sin(\omega(y-x))}{\omega}\, \psi_1(x)\varphi_1(y)\, dy\, dx & \int\limits_0^1 \psi_1(y) \cos(\omega y)\, dy & \int\limits_0^1 \psi_1(y) \sin(\omega y)\, dy \end{bmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель и интегрируя по частям с учетом равенств

$$\psi_1'(x) = -|\Phi_p^{-1}(x)|^{p-2} \Phi_p^{-1}(x), \qquad \psi_1(0) = \psi_1(1) = 0,$$

получим уравнение

$$\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}\, \mathcal{D}_1(\omega) \equiv \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} \times \Big(2 \sin(\tfrac{\omega}{2})\, \mathcal{C}_1^2(\omega) + \frac{\cos(\frac{\omega}{2})}{\omega K_1} - 4 \cos(\tfrac{\omega}{2})\, \mathcal{I}_1(\omega)\Big) = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(\omega) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |\Phi_p^{-1}(y)|^{p-1} \cos(\omega y)\, dy, \\ \mathcal{I}_1(\omega) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{y} |\Phi_p^{-1}(x)|^{p-1} |\Phi_p^{-1}(y)|^{p-1} \sin(\omega y) \cos(\omega x)\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что множитель $\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$ в (5) соответствует не меняющимся при нашем возмущении собственным числам λ_{2k}, поэтому нас будет интересовать асимптотика корней уравнения $\mathcal{D}_1(\omega) = 0$.

Аналогично, подставляя общее решение уравнения (4) в граничные условия и приравнивая коэффициенты при φ_2 в (4), получим уравнение для собственных чисел второго процесса, которое с учетом равенств

$$\psi_2'(x) = 1 - |\Phi_p^{-1}(x)|^p, \qquad \psi_2(0) = \psi_2(1) = 0$$

преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{\omega}{2})\,\mathcal{D}_2(\omega) &\equiv \cos(\tfrac{\omega}{2})\\ &\times \Big(-\cos(\tfrac{\omega}{2})\,\mathcal{C}_2^2(\omega) + \frac{(p+1)\sin(\frac{\omega}{2})}{2\omega} - 2\sin(\tfrac{\omega}{2})\,\mathcal{I}_2(\omega)\Big) = 0, \qquad (7)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2(\omega) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |\Phi_p^{-1}(y)|^p \cos(\omega y)\, dy,\\ \mathcal{I}_2(\omega) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{y} |\Phi_p^{-1}(x)|^p\, |\Phi_p^{-1}(y)|^p \sin(\omega y)\, \cos(\omega x)\, dx\, dy.\end{aligned} \qquad (8)$$

Множитель $\cos(\frac{\omega}{2})$ в (7) соответствует не меняющимся при нашем возмущении собственным числам λ_{2k-1}, поэтому нас будет интересовать асимптотика корней уравнения $\mathcal{D}_2(\omega) = 0$.

§3. Асимптотики интегралов (6) и (8)

В уравнения (5) и (7) входят интегралы от быстро осциллирующих (при больших значениях параметра ω) функций. В работе [13] были получены асимптотики таких интегралов в случае, если их амплитуды и логарифмические производные нескольких порядков этих амплитуд – функции, медленно меняющиеся в нуле. Напомним (см., например, [17]), что это означает

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1,$$

где $c > 0$ – произвольная константа. В частности, этим свойством обладают любые степени логарифма $f(x) = \ln^\sigma(x^{-1})$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Для начала выпишем первые члены асимптотического разложения функции

$$\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{|r|^p}{p}}\,dr$$

при $t \to -\infty$. Взяв за первое приближение $\frac{e^{-\frac{|t|^p}{p}}}{|t|^{p-1}}$, рекуррентно получаем

$$\Phi(t) = \tfrac{e^{-\frac{|t|^p}{p}}}{|t|^{p-1}} \Big[1 - \tfrac{p-1}{|t|^p} + \tfrac{(p-1)(2p-1)}{|t|^{2p}} - \tfrac{(p-1)(2p-1)(3p-1)}{|t|^{3p}} + O\Big(\tfrac{1}{|t|^{4p}}\Big)\Big]. \quad (9)$$

Выражая t из формулы

$$x = \Phi(t) = \frac{e^{-\frac{|t|^p}{p}}}{|t|^{p-1}} \left(1 + O(|t|^{-p})\right), \quad t \to -\infty,$$

получим

$$|t|^p = p\ln(x^{-1}) + O(\ln\ln(x^{-1})), \quad x \to 0+,$$

откуда

$$\Phi^{-1}(x) = -(p\ln(x^{-1}))^{\frac{1}{p}} \left(1 + O\left(\frac{\ln\ln(x^{-1})}{\ln(x^{-1})}\right)\right), \quad x \to 0+,$$

т.е. Φ^{-1} – медленно меняющаяся в нуле функция.

Заметим, что функция $\Phi_p(t)$ отличается от $\Phi(t)$ лишь домножением на константу C_p. Отсюда при $x \to 0$ имеем

$$\Phi_p^{-1}(x) = \Phi^{-1}\left(\frac{x}{C_p}\right) = -(p\ln(x^{-1}))^{\frac{1}{p}} \left(1 + O\left(\frac{\ln\ln(x^{-1})}{\ln(x^{-1})}\right)\right).$$

Изучим теперь функции, стоящие под интегралами в (6) и (8), а также их логарифмические производные до третьего порядка:

$$\begin{aligned} &\mathbb{F}_0(x) = |\Phi_p^{-1}(x)|^{p-1}; \qquad &&\mathcal{F}_0(x) = |\Phi_p^{-1}(x)|^{p}; \\ &\mathbb{F}_j(x) = x\,\mathbb{F}'_{j-1}(x); \qquad &&\mathcal{F}_j(x) = x\,\mathcal{F}'_{j-1}(x), \quad j = 1,2,3. \end{aligned}$$

Очевидно, функции $\mathbb{F}_0$ и $\mathcal{F}_0$ являются медленно меняющимися в нуле. Рассмотрим

$$\mathbb{F}_1(x) = -\frac{(p-1)x}{C_p}\,|\Phi_p^{-1}(x)|^{p-2}\,e^{\frac{|\Phi_p^{-1}(x)|^p}{p}}.$$

Обозначив $t = \Phi_p^{-1}(x)$, из формулы (9) получим

$$x = \frac{C_p e^{-\frac{|t|^p}{p}}}{|t|^{p-1}} \Big[1 - \tfrac{p-1}{|t|^p} + \tfrac{(p-1)(2p-1)}{|t|^{2p}} - \tfrac{(p-1)(2p-1)(3p-1)}{|t|^{3p}} + O\Big(\tfrac{1}{|t|^{4p}}\Big)\Big].$$

откуда при $x \to 0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_1(x) &= -(p-1)\,|t|^{-1}\left(1 + O\left(|t|^{-p}\right)\right)\\ &= -(p-1)\,\mathbb{F}_0^{-\frac{1}{p-1}}(x)\left(1 + O\Big(\mathbb{F}_0^{-\frac{p}{p-1}}(x)\Big)\right).\end{aligned}$$

Далее, аналогично получаем при $x \to 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_2(x) &= -(p-1)\,|t|^{-(p+1)}\left(1 + O\left(|t|^{-p}\right)\right)\\ &= -(p-1)\,\mathbb{F}_0^{-\frac{p+1}{p-1}}(x)\left(1 + O\Big(\mathbb{F}_0^{-\frac{p}{p-1}}(x)\Big)\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_3(x) &= -(p-1)(p+1)|t|^{-(2p+1)}\left(1 + O\left(|t|^{-p}\right)\right)\\ &= -(p-1)(p+1)\mathbb{F}_0^{-\frac{2p+1}{p-1}}(x)\left(1 + O\left(\mathbb{F}_0^{-\frac{p}{p-1}}(x)\right)\right);\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_1(x) = -p + O\left(|t|^{-p}\right) = -p + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0(x)}\right);$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(x) &= p^2(p-1)\,|t|^{-2p}\left(1 + O\left(|t|^{-p}\right)\right)\\ &= \frac{p^2(p-1)}{\mathcal{F}_0^2(x)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0(x)}\right)\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3(x) &= 2p^3(p-1)\,|t|^{-3p}\left(1 + O\left(|t|^{-p}\right)\right)\\ &= \frac{2p^3(p-1)}{\mathcal{F}_0^3(x)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0(x)}\right)\right).\end{aligned}$$

Таким образом, все функции $\mathbb{F}_1$–$\mathbb{F}_3$ и $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_3$ также являются медленно меняющимися в нуле.

Теперь мы можем применить результаты из §2 [13]. Теорема 1 [13] дает при $\omega \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1(\omega) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{F}_0(x)\cos(\omega x)\,dx \\ &= -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \cdot \frac{\mathbb{F}_1(\frac{1}{\omega})}{\omega} - \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ln(x)\,dx \cdot \frac{\mathbb{F}_2(\frac{1}{\omega})}{\omega} + O\Big(\frac{\mathbb{F}_3(\frac{1}{\omega})}{\omega}\Big) \\ &= -\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathbb{F}_1(\frac{1}{\omega})}{\omega} + \frac{\gamma\pi}{2}\,\frac{\mathbb{F}_2(\frac{1}{\omega})}{\omega} + O\Big(\frac{\mathbb{F}_3(\frac{1}{\omega})}{\omega}\Big) \qquad (10)\end{aligned}$$

(здесь γ – константа Эйлера), и аналогично,

$$\mathcal{C}_2(\omega) = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathcal{F}_1(\frac{1}{\omega})}{\omega} + \frac{\gamma\pi}{2}\,\frac{\mathcal{F}_2(\frac{1}{\omega})}{\omega} + O\Big(\frac{\mathcal{F}_3(\frac{1}{\omega})}{\omega}\Big). \qquad (11)$$

Далее, теорема 3 [13] дает при $\omega \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(\omega) &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{x} \mathbb{F}_0(x)\,\mathbb{F}_0(y)\sin(\omega x)\cos(\omega y)\,dy\,dx = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \mathbb{F}_0^2(x)\,dx \\ &+ \sum_{\substack{m+n=2\\ m,n\geqslant 1}}^{3} a_{k,m}\frac{\mathbb{F}_m(\frac{1}{\omega})\,\mathbb{F}_n(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + O\Bigg(\sum_{\substack{m+n=4\\ m,n\geqslant 1}} \frac{|\mathbb{F}_m(\frac{1}{\omega})\,\mathbb{F}_n(\frac{1}{\omega})|}{\omega^2}\Bigg), \qquad (12)\end{aligned}$$

где

$$a_{k,m} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\int\limits_x^{\infty} \frac{\cos(y)}{y}\,\frac{\ln^{m-1}(y)}{(m-1)!}\,dy\,dx.$$

Несложно видеть, что $a_{1,1} = 0$. Более утомительные, хотя и элементарные вычисления показывают, что $a_{1,2}+a_{2,1} = \frac{\pi^3}{8}$. Наконец, подставляя $\varkappa = 2p-2$ в формулу

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |\Phi_p^{-1}(x)|^{\varkappa}\,dx = C_p\int\limits_0^{\infty} t^{\varkappa} e^{-\frac{t^p}{p}}\,dt = \frac{p^{\frac{\varkappa}{p}-1}\Gamma\big(\frac{\varkappa+1}{p}\big)}{2\,\Gamma\big(1+\frac{1}{p}\big)}, \qquad (13)$$

видим, что первый интеграл в (12) равен $\frac{1}{2K_1}$. В результате приходим к формуле

$$\mathcal{I}_1(\omega) = \frac{1}{4\,K_1\omega} + \frac{\pi^3}{8}\frac{\mathbb{F}_1(\frac{1}{\omega})\,\mathbb{F}_2(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + O\Big(\frac{|\mathbb{F}_1(\frac{1}{\omega})\,\mathbb{F}_3(\frac{1}{\omega})| + \mathbb{F}_2^2(\frac{1}{\omega})}{\omega^2}\Big). \quad (14)$$

Аналогично, подставляя в (13) $\varkappa = 2p$, получаем

$$\mathcal{I}_2(\omega) = \frac{p+1}{4\omega} + \frac{\pi^3}{8}\frac{\mathcal{F}_1(\frac{1}{\omega})\,\mathcal{F}_2(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + O\Big(\frac{|\mathcal{F}_1(\frac{1}{\omega})\,\mathcal{F}_3(\frac{1}{\omega})| + \mathcal{F}_2^2(\frac{1}{\omega})}{\omega^2}\Big). \quad (15)$$

§4. Асимптотики собственных чисел

Рассуждения этого параграфа вполне аналогичны §3 [13] и приводятся для удобства читателя.

Для получения асимптотики $\omega_{2k-1}^{(1)} = (\lambda_{2k-1}^{(1)})^{-\frac{1}{2}}$ подставим разложения (10), (14) в уравнение $\mathcal{D}_1(\omega) = 0$ (см. (5)):

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\gamma\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathbb{F}_2}{\mathbb{F}_1} - \pi\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathbb{F}_2}{\mathbb{F}_1} + O\left(\frac{|\mathbb{F}_1\mathbb{F}_3| + \mathbb{F}_2^2}{\mathbb{F}_1^2}\right) = 0,$$

где аргументы всех функций $\mathbb{F}_m$ равны $\frac{1}{\omega}$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pi\,\frac{\mathbb{F}_2}{\mathbb{F}_1} + O\left(\frac{|\mathbb{F}_1\mathbb{F}_3| + \mathbb{F}_2^2}{\mathbb{F}_1^2}\right) \quad (16)$$

Поскольку правая часть стремится к нулю при $\omega \to \infty$, в окрестности точки $2\pi k$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения.

Как указано в замечании 2, $\lambda_{2k}^{(1)} = \lambda_{2k}$ и $\lambda_{2k-1}^{(1)} \leqslant \lambda_{2k-1}$. Поэтому $\omega_{2k}^{(1)} = 2\pi k$ и $\omega_{2k-1}^{(1)} \geqslant \pi(2k-1)$. Из этих фактов и перемежаемости собственных чисел следует, что на промежутке $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ располагаются $\omega_{2k-1}^{(1)}$ и $\omega_{2k}^{(1)}$. Значит, в окрестности $2\pi k$ лежит корень $\omega_{2k-1}^{(1)}$ уравнения (16).

Стандартными методами из (16) получаем асимптотику $\omega_{2k-1}^{(1)}$ при $k \to \infty$:

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + 2\pi\,\frac{\mathbb{F}_2}{\mathbb{F}_1} + O\left(\frac{|\mathbb{F}_1\mathbb{F}_3| + \mathbb{F}_2^2}{\mathbb{F}_1^2}\right),$$

где аргументы всех $\mathbb{F}_n$ равны $\frac{1}{2\pi k}$. Выражая асимптотики $\mathbb{F}_n$ через $\mathbb{F}_0$ по формулам из предыдущего параграфа, получим

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + 2\pi\,\mathbb{F}_0^{-\frac{p}{p-1}} + O\Big(\mathbb{F}_0^{-\frac{2p}{p-1}}\Big).$$

Наконец, подставляя сюда асимптотику $\mathbb{F}_0$, выводим

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{2\pi}{p\ln(k)} + O\left(\frac{\ln\ln(k)}{\ln^2(k)}\right), \qquad k\to\infty. \tag{17}$$

Аналогично, для нахождения асимптотики $\omega_{2k}^{(2)} = (\lambda_{2k}^{(2)})^{-\frac{1}{2}}$ подставим асимптотические разложения (11), (15) в уравнение $\mathcal{D}_2(\omega) = 0$ (см. (7)). Получим

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\gamma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + \pi\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right) = 0,$$

где аргументы всех функций $\mathcal{F}_m$ равны $\frac{1}{\omega}$. Отсюда

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\pi\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right).$$

Рассуждая, как в предыдущем случае, заключаем, что в окрестности точки $2\pi k+\pi$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения, а именно $\omega_{2k}^{(2)}$. Его асимптотика:

$$\omega_{2k}^{(2)} = 2\pi k + \pi + 2\pi\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргументы всех функций равны $\frac{1}{\pi(2k+1)}$. По формулам из предыдущего параграфа получим

$$\omega_{2k}^{(2)} = 2\pi k + \pi + O(\mathcal{F}_0^{-2}) = \pi(2k+1) + O\left(\frac{1}{\ln^2(k)}\right), \qquad k\to\infty. \tag{18}$$

§5. Асимптотика малых уклонений

5.1. Процессы 1) и 3). Для вычисления асимптотик малых уклонений воспользуемся принципом сравнения Венбо Ли [9, 4]: если бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{\lambda_k}$ сходится, то при $\varepsilon\to 0$ справедливо соотношение

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\right\}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

В случае **1)** в качестве последовательности Λ_k возьмем

$$\Lambda_k = \left[\pi\left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{p\ln(k+1)}\right)\right]^{-2}.$$

Применяя теорему 4 из [13], получим

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\xi_k^2<\varepsilon^2\right\}\sim C\cdot\varepsilon^{-1}\cdot\ln^{\frac{1}{p}}\left(\varepsilon^{-1}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Поскольку эта асимптотика известна лишь с точностью до константы, достаточно убедиться в сходимости произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(1)}}{\Lambda_k}$. Для этого определим вспомогательную последовательность

$$\tau_{2k}=(2\pi k)^{-2},\qquad \tau_{2k-1}=\left[\pi\left(2k+\frac{2}{p\ln(k+1)}\right)\right]^{-2}.$$

Тогда

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(1)}}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(1)}}{\tau_k}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Первое произведение здесь сходится, поскольку в силу (17)

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln(k)}{k\ln^2(k)}\right)\right)<\infty.$$

Второе же произведение перепишем так:

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_{2k}\tau_{2k-1}}{\Lambda_{2k}\Lambda_{2k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}&=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2k+\frac{1}{2}+\frac{1}{p\ln(2k+1)}\right)\left(2k-\frac{1}{2}+\frac{1}{p\ln(2k)}\right)}{2k\left(2k+\frac{2}{p\ln(k+1)}\right)}\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2pk}\left(\frac{1}{\ln(2k)}+\frac{1}{\ln(2k+1)}-\frac{2}{\ln(k+1)}\right)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)\right)<\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, асимптотика малых уклонений для первого процесса дается формулой

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(1)}\xi_k^2<\varepsilon^2\right\}\sim\mathcal{C}_1(p)\cdot\varepsilon^{-1}\cdot\ln^{\frac{1}{p}}\left(\varepsilon^{-1}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right).\qquad(20)$$

В случае **3)** возьмем

$$\Lambda_k = \left[\pi\left(k+1+\frac{1}{p\ln(k+1)}\right)\right]^{-2},$$

$$\tau_{2k} = (\pi(2k+1))^{-2}, \qquad \tau_{2k-1} = \left[\pi\left(2k+\frac{2}{p\ln(k+1)}\right)\right]^{-2},$$

и аналогичным образом получаем асимптотику малых уклонений для третьего процесса

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(3)}\xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \mathcal{C}_2(p)\cdot\varepsilon^{-2}\cdot\ln^{\frac{1}{p}}\left(\varepsilon^{-1}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right). \qquad (21)$$

Замечание 3. Обратите внимание, что асимптотики (20) и (21) монотонно зависят от параметра $p > 1$. В то же время теорема 5 [15] показывает, что при $p = 1$ логарифмический сомножитель в асимптотиках отсутствует, и потому монотонность при $p = 1$ нарушается. Для объяснения этого кажущегося парадокса напомним, что нестандартное (по сравнению с [11, теорема 2]) поведение асимптотики определяется негладкостью возмущающей функции (как указывалось выше, $\varphi_1 = \psi_1'' \notin L_2(0,1)$). Однако если при $p > 1$ эта негладкость порождается поведением φ_1 в окрестности концов интервала $(0,1)$, то при $p = 1$ причина негладкости функции φ_1 другая – излом в точке $\frac{1}{2}$ (см. [15]).

5.2. Процесс 2). В случае **2)** удается найти также константу в асимптотике малых уклонений. В качестве аппроксимирующей последовательности Λ_k возьмем

$$\Lambda_k = \left(\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)^{-2}.$$

Известно ([9, теорема 3.4], см. также [12, теорема 6.2]), что

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-2}\right), \qquad \varepsilon \to 0. \qquad (22)$$

Для того чтобы найти константу из (19), определим

$$\tau_1 = \pi^{-2}, \qquad \tau_{2k} = \tau_{2k+1} = [(2k+1)\pi]^{-2}.$$

Аналогично предыдущему параграфу,

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{\lambda_k^{(2)}}\Bigr)^{\frac12}=\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{\tau_k}\Bigr)^{\frac12}\cdot\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{\lambda_k^{(2)}}\Bigr)^{\frac12}=\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{\tau_k}\Bigr)^{\frac12}\cdot\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}}\Bigr)^{\frac12}.$$

Первое произведение легко считается по формуле Стирлинга:

$$\Bigl(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_k}{\tau_k}\Bigr)^{\frac12}=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi\cdot(3\pi)^2\cdot(5\pi)^2\cdot\ldots\cdot((2k+1)\pi)^2}{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(4k+3)\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt2}. \tag{23}$$

Для того, чтобы вычислить второе произведение, заметим, что $\pm\tau_{2k}^{-\frac12}$ и $\pm\bigl(\lambda_{2k}^{(2)}\bigr)^{-\frac12}=\pm\omega_{2k}^{(2)}$ суть корни целых функций, соответственно,

$$M(\omega):=\frac{\cos(\frac{\omega}{2})}{1-\bigl(\frac{\omega}{\pi}\bigr)^2}\quad\text{и}\quad\mathcal{D}_2(\omega),\quad\omega\in\mathbb{C},$$

причем ввиду формулы (18) эти корни асимптотически близки. Заметим также, что $M(0)=1$ и[3]

$$\mathcal{D}_2(0)=-\,\mathcal{C}_2^2(0)+\frac{p+1}{4}=\frac{p}{4}$$

(последнее равенство следует из формулы (13) при $\varkappa=p$). Поэтому, согласно лемме 1 из работы [13], справедливо соотношение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}}=\lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{M(\omega)}{\frac4p\,\mathcal{D}_2(\omega)},$$

причем предел можно брать только по положительной вещественной полуоси. Пользуясь формулами (11) и (15), имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}}=\lim_{\substack{\omega=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{\pi^2}{\frac4p\cdot\frac{\pi^2}{4}\,\mathcal{F}_1^2(\frac1\omega)}=\frac1p. \tag{24}$$

В итоге из формул (19)–(24) получаем

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(2)}\xi_k^2\leqslant\varepsilon^2\Bigr\}\sim\frac{2\sqrt2}{\sqrt p\,\pi^{\frac32}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Bigl(-\,\frac18\,\varepsilon^{-2}\Bigr),\qquad\varepsilon\to0. \tag{25}$$

[3]В §4 [13] и в теореме 5 [15] в этом месте имеются арифметические ошибки, в результате которых константы в [13, (29)] и в [15, (23)] содержат лишний множитель $\sqrt2$.

Список литературы

1. F. Barthe, O. Guéydon, S. Mendelson, A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the l_p^n-ball.* — Ann. Probab. **33**, No. 2 2005), 480–513.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, 2-е изд., испр. и доп., СПб, Лань, 2010.
3. J. Durbin, *Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated.* — Ann. Statist. **1**, No. 2 (1973), 279–290.
4. F. Gao, J. Hannig, F. Torcaso, *Comparison theorems for small deviations of random series.* — Electron. J. Probab., **8**, paper No. 21 (2003), 1–17.
5. И. И. Гихман, *О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики.* — Укр. матем. журн. **5**, No. 4 (1953), 413–433.
6. И. И. Гихман, *Процессы Маркова в задачах математической статистики.* — Укр. матем. журн. **6** (1954), 28–36.
7. F. Götze, D. Koleda, D. Zaporozhets, *Joint distribution of conjugate algebraic numbers: A random polynomial approach.* — Adv. Math. **359**, Article ID 106849, 33 p. (2020).
8. M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz, *On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods.* — Ann. Math. Statist. **26**, No. 2 (1955), 189–211.
9. W. V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* — J. Theor. Probab. **5**, No. 1 (1992), 1–31.
10. М. А. Лифшиц, *Лекции по гауссовским процессам,* СПб, Лань, 2016.
11. А. И. Назаров, *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций.* — Теория вероятн. и ее примен. **60**, No. 2 (2009), 209–225.
12. A. Nazarov, Y. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems.* — Probab. Theory Relat. Fields. **129** (2004), 469–494.
13. А. И. Назаров, Ю. П. Петрова, *Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица.* — Теория вероятн. и ее примен. **60**, No. 3 (2015), 482–505.
14. A. I. Nazarov, Yu. P. Petrova, *L_2-small ball asymptotics for Gaussian random functions: a survey.* — Probab. Surv. **20** (2023), 608–663.
15. Ю. П. Петрова, *Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторых процессов Дурбина.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 211–233.
16. Ю. П. Петрова, *Асимптотики L_2-малых уклонений для конечномерных возмущений гауссовских функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 236–258.
17. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции.* Пер. с англ., М., Наука, 1985.

Zonova Ya. S., Nazarov A. I. On sharp L_2-small ball asymptotics for a family of Durbin processes.

In this paper, we calculate sharp asymptotics of small deviations in the L_2 norm for a family of Gaussian random processes that are special finite-dimensional perturbations of the Brownian bridge. These processes arise as

limiting processes in statistics when constructing goodness-of-fit tests for testing a sample for the p-Gaussian (generalized Gaussian) distribution in the case where the shift and/or scale parameters are estimated from the sample. For $p = 1$ (the Laplace distribution) and $p = 2$ (the normal distribution), these results were previously obtained in the works of Yu. P. Petrova (2017) and A. I. Nazarov–Yu. P. Petrova (2015), respectively.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: st098461@student.spbu.ru
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com

Поступило 5 октября 2025 г.