Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

Д. Н. Запорожец, Е. Н. Симарова

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ МНОГОГРАННИКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ

§1. Введение

Изучение случайных многогранников, порожденных выпуклыми оболочками случайных точек, является классической темой в стохастической геометрии. Особый интерес представляют предельные теоремы для различных функционалов случайных многогранников, таких как число граней, объем и внутренние объемы, когда количество точек неограниченно растет. В настоящей работе исследуются свойства случайных многогранников, порожденных одинаково распределенными независимыми векторами с правильно меняющимся распределением. Такие распределения также называют распределениями с тяжелыми хвостами.

Пусть дан случайный вектор $U \in \mathbb{R}^d$. Распределение U называется правильно меняющимся с параметром $\alpha > 0$ и спектральной вероятностной мерой μ на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, если существует последовательность $b_n \to \infty$ и константа $c > 0$, такие что при $n \to \infty$

$$n\,\mathbb{P}\{b_n^{-1}|U| > r, U/|U| \in B\} \to cr^{-\alpha}\mu(B) \tag{1}$$

для всех борелевских множеств $B \subset \mathbb{S}^{d-1}$, таких что $\mu(\partial B) = 0$. Здесь полагается $0/0 = 0$ и, во избежание технических сложностей, предполагается отсутствие атомов в нуле. При этом предположении соотношение (1) означает, что последовательность мер $n\mathbb{P}\{b_n^{-1}U \in \cdot\}$ *ослабленно* (*vague*) сходится к предельной мере $cr^{-\alpha}\mathrm{d}r \times \mu$ в пространстве локально конечных мер на $E = [-\infty, \infty]^d \setminus \{0\}$ при $n \to \infty$:

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1}U \in \cdot\} \xrightarrow{v} \nu, \quad \text{где} \quad \nu = cr^{-\alpha}\mathrm{d}r \times \mu. \tag{2}$$

Ключевые слова: случайные многогранники, выпуклая оболочка, правильно меняющееся распределение, тяжелые хвосты, пуассоновский точечный процесс, внутренние объемы, валюации, U-max статистики, f-вектор.

Работа поддержана грантом РНФ 19-71-30002.

Такой подход к многомерным распределениям с тяжелыми хвостами был введен Резником [13] и с тех пор стал общепринятым. Одним из представителей данного семейства распределений является β'-распределение (см., например, [10]).

Преимуществом данного подхода является наличие предельной теоремы, связывающей случайные величины с правильно меняющимся на бесконечности хвостом с пуассоновским точечным процессом. Этот результат формулируется следующим образом (см. [15]).

Если $\{U_n, n \geqslant 1\}$ являются независимыми копиями вектора U, то (2) эквивалентно

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i/b_n} \Rightarrow N_\nu, \tag{3}$$

где $\delta_{\mathbf{x}}$ обозначает дельта-меру в точке $\mathbf{x}$, N_ν – пуассоновский точечный процесс на E с мерой интенсивности ν, а значок "$\Rightarrow$" обозначает слабую сходимость в пространстве мер $\mathcal{M}([-\infty, \infty]^d \setminus \{0\})$.

Данная теорема служит мощным инструментом для анализа асимптотики геометрических структур, порожденных выборкой. В частности, с ее помощью в работе Ю. А. Давыдова и К. Домбры [2] было установлено, что условие (1) влечет сходимость замыканий выпуклых оболочек:

$$\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i/b_n}\right) \Rightarrow \overline{\operatorname{conv}(N_\nu)} \text{ в } \mathcal{K}^d, \tag{4}$$

где пространство $\mathcal{K}^d$ — это пространство компактов в $\mathbb{R}^d$ с метрикой Хаусдорфа.

В работе [4] при дополнительных условиях на меру ν установлена аналогичная сходимость выпуклых оболочек в пространстве мер на $[-\infty, \infty]^d \setminus \{0\}$. В частности, требовалось, чтобы $\nu(E \setminus \mathbb{R}^d) = 0$, а также было выполнено одно из следующих условий: $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\nu)))$ или $\nu(H) = 0$ для любой линейной гиперплоскости H. В этих же условиях была доказана сходимость некоторых свойств выпуклых оболочек (например, слабая сходимость количества k-мерных граней, объема, средней ширины и др.).

В настоящей работе исследование свойств выпуклых многогранников с тяжелыми хвостами продолжается. Рассматриваются два основных вопроса из данной области: сходимость внутренних объемов, а также сходимость моментов количества k-мерных граней.

Структура статьи следующая. В §2 приведены необходимые определения и предварительные сведения. В §3 содержатся формулировки основных результатов. В частности, раздел 3.1 посвящен вопросам, связанным с внутренними объемами случайных многогранников, а в разделе 3.3 рассматриваются вопросы, связанные с моментами количества k-мерных граней. Доказательства отнесены в §4.

§2. Предварительные базовые сведения

2.1. Слабая сходимость. Пусть дана последовательность случайных элементов $\{X_n, n \geqslant 0\}$, принадлежащих некоторому полному сепарабельному метрическому пространству (S, d). Говорят, что X_n *слабо сходится* к X_0 (обозначается $X_n \Rightarrow X_0$), если для любой непрерывной ограниченной функции $f : S \to \mathbb{R}^1$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, f(X_n) = \mathbb{E}\, f(X_0).$$

Важным свойством слабой сходимости, позволяющим переносить слабую сходимость из одного пространства в другое, является следующая теорема о непрерывном отображении (см. [1, теорема 5.1]). Пусть $(S_i, d_i), i = 1, 2,$ — два полных сепарабельных метрических пространства. Предположим, что $\{X_n, n \geqslant 0\}$ – случайные элементы в (S_1, d_1) и $X_n \Rightarrow X_0$. Пусть функция $h\colon S_1 \to S_2$ такова, что

$$\mathbb{P}\{X_0 \in \{s_1 \in S_1\colon h \text{ разрывна в точке } s_1\}\} = 0.$$

Тогда

$$h(X_n) \Rightarrow h(X_0) \text{ в } S_2. \tag{5}$$

Таким образом, одна слабая сходимость может быть выведена из другой.

Альтернативный способ реализации этой идеи состоит в том, что если последовательность мер может быть аппроксимирована слабо сходящейся последовательностью, то исходная последовательность также должна сходиться. Следующее утверждение называется теоремой о совместной сходимости (см., например, [1, теорема 4.1]).

Пусть $\{X_n, Y_n, X\}$ являются случайными элементами в полном сепарабельном метрическом пространстве (S, ρ), заданными на одном вероятностном пространстве. Предположим, что $X_n \Rightarrow X$ при $n \to \infty$ и $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость

$$Y_n \Rightarrow X \text{ при } n \to \infty. \tag{6}$$

2.2. Пространство мер и ослабленная сходимость. Рассмотрим некоторое локально компактное топологическое пространство E со счетной базой. Обозначим через $\mathcal{M}(E)$ пространство локально конечных мер на E (мер, принимающих конечные значения на компактах), а также через $C_K^+(E)$ множество непрерывных функций $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ с компактным носителем. Зададим на $\mathcal{M}(E)$ ослабленную топологию (vague topology), генерируемую отображениями

$$\mu \mapsto \int\limits_E f \mathrm{d}\mu \quad \text{для всех} \quad f \in C_K^+(E).$$

Существует метрика, порождающая ослабленную топологию и превращающая $\mathcal{M}(E)$ в полное сепарабельное метрическое пространство.

2.3. Обратные к монотонным функциям и регулярно меняющиеся функции. В теории экстремальных статистик особую роль играют функции, обратные к монотонным. Если H – неубывающая функция на $\mathbb{R}$, то обратная к H функция определяется как

$$H^{\leftarrow}(y) = \inf\{s : H(s) \geqslant y\}.$$

Подробнее о данных функциях см., например, [15, §0.2]. Помимо определения нам потребуется следующее простое свойство: если H – непрерывна справа, то $H(H^{\leftarrow}(y)) \geqslant y$.

Кроме того, напомним, что измеримая функция $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *регулярно меняется* на бесконечности с параметром $\rho \in \mathbb{R}$ (обозначается как $U \in RV_\rho$), если для любого $x > 0$ выполнено

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho.$$

Сформулируем утверждение, связывающее теорию экстремальных значений и теорию регулярных функций.

Предложение 1 ([14, теорема 3.6])**.** *Предположим, что X – неотрицательная случайная величина с функцией распределения F. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) $1 - F \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$.
(2) *Существует такая последовательность $\{b_n\}$, стремящаяся к бесконечности, что*

$$n\,\mathbb{P}\left[\frac{X}{b_n} \in \cdot\,\right] \xrightarrow{v} \nu_\alpha(\,\cdot\,),$$

где $\nu_\alpha(x,\infty] = x^{-\alpha}$.

Согласно [15, предложение 1.11], первое условие эквивалентно соотношению

$$F(b_n x)^n \to \Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}} \text{ при } n\to\infty.$$

Данное соотношение возникает в теории экстремальных значений и означает, что нормированный максимум независимых случайных величин с функцией распределения F слабо сходится к случайной величине с распределением Фреше.

Кроме того, нам потребуется предложение о поведении хвостов функций распределения с одинаковыми нормировочными константами.

Предложение 2 ([15, предложение 1.19])**.** *Предположим, что*

$$F^n(b_n x + a_n) \to H_1(x)$$

для некоторых констант $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, *где* H_1 – *невырожденное распределение. Тогда если* $G^n(b_n x + a_n) \to H_2(x)$, *то* $H_2(x) = H_1(ax+b)$. *В случае если* $H_1 = \Phi_\alpha$, *выполнено соотношение*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{1-G(x)} = a^\alpha.$$

Также сформулируем предложение о поведении регулярно меняющихся функций:

Предложение 3 ([15, предложение 0.8 (ii)])**.** *Пусть* $U \in RV_\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $t_0 = t_0(\varepsilon)$, *такое что для любых* $x \geqslant 1$, $t \geqslant t_0$ *выполнено*

$$(1-\varepsilon)x^{\rho-\varepsilon} < \frac{U(tx)}{U(t)} < (1+\varepsilon)x^{\rho+\varepsilon}.$$

Теперь мы готовы сформулировать наши основные результаты.

§3. Основные результаты

3.1. Внутренние объемы. Пусть K – выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим множество $K+B_r(0) = \{a+b, a\in K,\ b\in B_r(0)\}$, где $B_r(0)$ – это d-мерный шар радиуса r. Согласно формуле Штейнера, объем множества $K+B_r(0)$ – это полином степени не более чем d от переменной r. Его можно записать в виде

$$\lambda_d\left(K+B_r(0)\right) = \sum_{i=0}^{d} r^{d-i}\kappa_{d-i}V_i(K),$$

где λ_d означает меру Лебега в $\mathbb{R}^d$, а κ_i – объем i-мерного единичного шара. Определяемые таким образом $V_i(K)$ называют внутренними объемами. Нетрудно показать, что $V_d(\,\cdot\,)$ – это d-мерный объем, $V_{d-1}(\,\cdot\,)$ – половина площади поверхности для d-мерных выпуклых компактов, $V_1(\,\cdot\,)$ – средняя ширина с точностью до постоянного множителя и $V_0(\,\cdot\,) \equiv 1$.

Внутренние объемы играют важную роль в выпуклой геометрии. Для иллюстрации этого факта рассмотрим более общий класс функций, определенных на пространстве выпуклых компактов, называемых валюациями или аддитивными функциями (см. [17]). Функция φ называется валюацией, если

$$\varphi(K \cup L) + \varphi(K \cap L) = \varphi(K) + \varphi(L) \tag{7}$$

для всех выпуклых компактов K, L, таких что $K \cup L$ также является выпуклым компактом. Теорема Хадвигера (см. [17, теорема 14.4.6]) утверждает, что любая непрерывная в метрике Хаусдорфа валюация, инвариантная относительно сдвигов и поворотов, может быть представлена единственным образом в виде

$$\varphi(\,\cdot\,) = \sum_{j=0}^{d} c_j V_j(\,\cdot\,). \tag{8}$$

Таким образом, внутренние объемы являются базисными функциями в пространстве непрерывных валюаций.

Наш первый результат касается асимптотического поведения валюаций выпуклой оболочки случайных точек с правильно меняющимся распределением. Мы показываем, что после надлежащей нормировки валюация сходится по распределению к валюации выпуклой оболочки соответствующего пуассоновского процесса.

Теорема 1. *Пусть $U_1, U_2, U_3, \ldots$ – независимые векторы из $\mathbb{R}^d$ с правильно меняющимся общим распределением U, т.е.*

$$n\mathbb{P}\left[b_n^{-1}U \in \cdot\right] \xrightarrow{v} \nu \ \text{в}\ \mathcal{M}(E).$$

Пусть φ – некоторая непрерывная валюация, инвариантная относительно поворотов и сдвигов. Тогда при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\frac{\varphi\left(\operatorname{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{U_i}\right)\right)}{b_n^m} \Rightarrow c_m \cdot V_m(\operatorname{conv}(N_\nu)) \ \text{в}\ \mathbb{R},$$

где m – это максимальный индекс в разложении функции φ в виде (8)*, такой что коэффициент $c_m \neq 0$, а N_ν – это пуассоновский точечный процесс на E с мерой интенсивности ν.*

В частности,

$$\frac{V_j\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i}\right)\right)}{b_n^j} \Rightarrow V_j(\operatorname{conv}(N_\nu)) \quad \textit{в} \ \mathbb{R}.$$

3.2. U-max статистики. Также представляет интерес изучение других статистик, порожденных внутренними объемами и валюациями. В настоящей работе рассматриваются U-max статистики. Относительно недавно они были введены Лао и Майером [11] в качестве экстремальных аналогов обычных U-статистик. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. U-max статистика порядка k, построенная с помощью внутреннего объема V_j и набора векторов $U_1, \ldots, U_n$, определяется по формуле

$$M_n(V_j) = \max_J V_j(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}), \tag{9}$$

где $n \geqslant k$, а множество J определяется как

$$J = \big\{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n\big\}. \tag{10}$$

В общем случае вместо V_j используется ядро f, по которому строится соответствующая U-max статистика. Отметим, что U-max статистика, построенная с помощью ядра $f(x, y) = \|x - y\|$, представляет собой диаметр случайного множества точек. Для таких статистик также установлено предельное поведение, описанное в нашей следующей теореме.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1*. Тогда при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\frac{M_n(V_j)}{b_n^j} \Rightarrow M_\nu^j \quad \textit{в} \ \mathbb{R}, \tag{11}$$

где M_ν^j – это U-max статистика, порожденная ядром V_j и пуассоновским точечным процессом N_ν:

$$M_\nu^j = \max_{x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{F}_0(\operatorname{conv}(N_\nu))} V_j\left(\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)\right). \tag{12}$$

Здесь $\mathcal{F}_0(\operatorname{conv}(N_\nu))$ обозначает множество точек пуассоновского точечного процесса, лежащих на границе его выпуклой оболочки.

Замечание 1. В работе [8] было доказано соотношение (11) для диаметра выпуклой оболочки в случае центрально симметричного распределения с регулярно меняющимся хвостом.

Замечание 2. Формулировка теоремы 2 существенно отличается от формулировок теорем, полученных в работах [3, 11, 12, 19].

В качестве следствия получается аналогичное утверждение для некоторого класса непрерывных валюаций.

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Пусть* φ *– некоторая непрерывная положительная валюация, инвариантная относительно поворотов и сдвигов. Определим U-max статистику* $M_n(\varphi)$ *с ядром* φ *аналогично* (9). *Тогда имеет место сходимость*

$$\frac{M_n(\varphi)}{b_n^m} \Rightarrow c_m \cdot M_\nu^m \ \text{в}\ \mathbb{R}.$$

Здесь m *– это максимальный индекс в разложении функции* φ *в виде* (8), *такой что коэффициент* $c_m \neq 0$, *а* M_ν^m *определена в* (12).

3.3. Сходимость моментов f-вектора. Во второй части настоящей работы рассматриваются f-векторы случайного многогранника, порожденного случайными точками с правильно меняющимся распределением. В работе [4] для распределений с тяжелыми хвостами, удовлетворяющих (2), при некоторых условиях была установлена слабая сходимость

$$f_k\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i}\right)\right) \Rightarrow f_k(\operatorname{conv}(N_\nu)) \text{ в } \mathbb{R},$$

где $f_k(M)$ – это количество k-мерных граней многогранника M. Условия были аналогичны условиям, возникающим для сходимости точечных мер, и включали в себя $\nu(E\setminus\mathbb{R}^d)=0$, а также $0\in\operatorname{int}(\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\nu)))$.

После получения слабой сходимости случайных величин естественным образом возникает вопрос: выполняется ли сходимость математических ожиданий и других моментов этих величин? Хорошо известно, что слабая сходимость вообще говоря не влечет сходимость моментов, однако в некоторых случаях последняя также имеет место. В работе [9] была доказана сходимость моментов f-векторов случайных многогранников, порожденных распределением Коши. Данное доказательство может быть проведено для произвольного β'-распределения при

$\beta > \frac{d}{2}$, что было осуществлено в [21]. Как уже отмечалось, β'-распределения относятся к классу распределений с правильно меняющимися хвостами в $\mathbb{R}^d$. В настоящей работе установлена сходимость моментов f-векторов для более общего класса случайных многогранников, порожденных векторами с регулярно меняющимися хвостами.

Теорема 3. *Предположим, что U имеет правильно меняющееся распределение: существуют мера $\nu \in \mathcal{M}(E)$ и стремящаяся к бесконечности последовательность b_n, такие что при $n \to \infty$*

$$n\mathbb{P}\left[b_n^{-1}U \in \cdot\right] \xrightarrow{v} \nu \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(E), \tag{13}$$

где мера ν удовлетворяет условию $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\nu)))$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\mathbb{E}\, f_k^m\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i}\right)\right) \to \mathbb{E}\, f_k^m(\operatorname{conv}(N_\nu)), \tag{14}$$

где $f_k(P)$ – это количество k-мерных граней многогранника P.

Замечание 3. В некоторых случаях правая часть (14) может быть вычислена явно. Так, для пуассоновского точечного процесса с плотностью $\frac{1}{\|x\|^{d+\gamma}}$ правая часть при $m = 1$ имеет следующий вид (см. [21]):

$$\mathbb{E}\, f_k(\operatorname{conv}(N_\nu)) = \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{w_\gamma}{w_{d+\gamma}}\right)^{k+1}$$
$$\times \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{k+1}} \mathbb{P}\left[(\operatorname{conv}(N_\nu) \cap \operatorname{aff}(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}) = \varnothing)\right] \prod_{i=1}^{k+1} \frac{dx_i}{\|x_i\|^{d+\gamma}}.$$

Здесь $w_k = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ – это $(k-1)$-мерная площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^k$. В случае если $k = d-1$, правая часть может быть записана в более компактном виде (см. [9, следствие 2.13]):

$$\mathbb{E}\, f_{d-1}(\operatorname{conv}(N_\nu)) = \frac{2}{d}\gamma^{d-1}\pi^{\frac{d-1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\gamma d+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma d}{2})}.$$

Также с помощью соотношения Дена–Соммервилля может быть получено соотношение

$$df_{d-1}\left(\operatorname{conv}(N_\nu)\right) = 2f_{d-2}\left(\operatorname{conv}(N_\nu)\right),$$

что позволяет вычислить математическое ожидание числа $(d-2)$-мерных граней:

$$\mathbb{E}\, f_{d-2}(\operatorname{conv}(N_\nu)) = \gamma^{d-1}\pi^{\frac{d-1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\gamma d+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma d}{2})}.$$

§4. Доказательства

4.1. Доказательство теоремы 1. Доказательство естественным образом вытекает из результата Ю. А. Давыдова и К. Домбры [2]. Сначала установим данное утверждение для внутренних объемов. Напомним, что j-й внутренний объем является непрерывным отображением из пространства компактов в $\mathbb{R}$. Применяя функцию V_j к соотношению (4), по теореме о непрерывном отображении (5) получаем, что

$$V_j\left(\operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{U_i/b_n}\right)\right) \Rightarrow V_j\left(\operatorname{conv}(N_\nu)\right) \text{ в } \mathcal{K}^d. \tag{15}$$

Кроме того, внутренние объемы V_j обладают свойством однородности и удовлетворяют соотношению

$$V_j(tx_1,\ldots,tx_k) = t^j V_j(x_1,\ldots,x_k),$$

поэтому подстановка данного соотношения в правую часть полученной сходимости (15) дает требуемое утверждение.

Для доказательства теоремы в общем случае воспользуемся разложением Хадвигера (8), а также гомотетичностью внутренних объемов. Получаем соотношение

$$\begin{aligned}\frac{\varphi\left(\operatorname{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{U_i}\right)\right)}{b_n^m} &= \sum_{j=0}^{m}\frac{c_jV_j\left(\operatorname{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{U_i}\right)\right)}{b_n^m}\\ &= \sum_{j=0}^{m}\frac{c_jV_j\left(\operatorname{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{U_i/b_n}\right)\right)}{b_n^{m-j}}.\end{aligned}$$

Заметим, что $b_n\to\infty$ при $n\to\infty$, поэтому, совместно с соотношениями (15), это означает, что все слагаемые за исключением последнего стремятся по вероятности к 0, а последнее слагаемое стремится к $c_mV_m(\operatorname{conv}(N_\nu))$. Применяя теорему о совместной сходимости (6), получаем требуемое утверждение.

4.2. Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы основано на следующей геометрической лемме.

Лемма 1. *Для любого выпуклого многогранника P с вершинами z_1, $\dots, z_n$, для каждого $j = 0, \dots, d$ и $m \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$\max_{x_1,\dots,x_m\in P} V_j\big(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_m)\big) = \max_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_m\leqslant n} V_j\big(\mathrm{conv}(z_{i_1},\dots,z_{i_m})\big). \tag{16}$$

Иными словами, максимум j-го внутреннего объема выпуклой оболочки произвольного набора из m точек многогранника достигается на некотором наборе его вершин.

Доказательство этой леммы будет приведено ниже. Сначала покажем, как из нее следует утверждение теоремы.

Напомним, что $V_j(\,\cdot\,)$ – это непрерывная функция в пространстве выпуклых компактов $\mathcal{K}^d \to \mathbb{R}^1$. Нетрудно видеть, что функция

$$g(K) = \max_{x_1,\dots,x_k\in K} V_j\left(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k)\right)$$

также является непрерывной функцией в $\mathcal{K}^d$. Тогда согласно (4) и теореме о непрерывном отображении (см. §2.1) выполнено

$$g\left(\mathrm{conv}\left(\sum_{i=1}^n \delta_{U_i/b_n}\right)\right) \Rightarrow g\big(\overline{\mathrm{conv}(N_\nu)}\big) \text{ в } \mathbb{R}^1. \tag{17}$$

Согласно (16), максимум левой части (17) может быть взят только по вершинам выпуклой оболочки. Что касается правой части, то для любых точек $x_1, \dots, x_k \in \overline{\mathrm{conv}(N_\nu)}$ существуют такие $s \geqslant k$ и $y_1, \dots, y_s$ из $\mathcal{F}_0(\mathrm{conv}(N_\nu))$, что точки $x_1, \dots, x_k$ лежат в выпуклой оболочке y_1, $\dots, y_s$. В силу леммы 1,

$$V_j\left(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k)\right) \leqslant \max_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant s} V_j\left(\mathrm{conv}(y_{i_1}\dots,y_{i_k})\right),$$

следовательно, максимум в правой части (17) достигается в $\mathcal{F}_0(\mathrm{conv}(N_\nu))$. Получаем, что имеет место сходимость

$$\max_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n} V_j\left(\mathrm{conv}\left(\frac{U_{i_1}}{b_n},\dots,\frac{U_{i_k}}{b_n}\right)\right) \Rightarrow \max_{x_1,\dots,x_n\in\mathcal{F}_0(\mathrm{conv}(N_\nu))} V_j\left(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_n)\right) \text{ в } \mathbb{R}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться однородностью $V_j(\,\cdot\,)$ порядка j.

Отметим, что если $0 \in \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(\nu))$, то с вероятностью 1 $\mathrm{conv}\,(N_\nu)$ является выпуклым многогранником, следовательно, максимум справа также может быть взят только по вершинам выпуклой оболочки. Если $0 \notin \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(\nu))$, то с вероятностью 1 N_ν представляет собой множество точек с единственной точкой сгущения 0, удовлетворяющее условию, что вне любого шара с центром в 0 содержится лишь конечное число точек. Тогда если рассмотреть некоторое множество точек $x_1, \ldots, x_m \in \mathrm{conv}(N_\nu)$, то существуют такие $s \in \mathbb{N}$ и $y_1, \ldots, y_s$ из $\mathcal{F}_0(\mathrm{conv}(N_\nu))$, что точки $x_1, \ldots, x_m$ лежат в выпуклой оболочке $y_1, \ldots, y_s$. В силу (16), на точках $y_1, \ldots, y_s$ максимум $V_j(\mathrm{conv}(\,\cdot\,))$ будет не меньше, чем на точках $x_1, \ldots, x_m$, следовательно, общий максимум достигается в $\mathcal{F}_0(\mathrm{conv}(N_\nu))$. Получаем, что имеет место сходимость

$$\max_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_m\leqslant n} V_j\left(\mathrm{conv}\left(\frac{U_{i_1}}{b_n}, \ldots, \frac{U_{i_m}}{b_n}\right)\right) \Rightarrow \max_{x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{F}_0(\mathrm{conv}(N_\nu))} V_j\left(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_n)\right) \text{ в } \mathbb{R}.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться однородностью $V_j(\,\cdot\,)$ порядка j.

Доказательство леммы 1. Ключевым ингредиентом доказательства является следующий классический результат Хадвигера [7], Роджерса [16] и Шепарда [20], формулировку которого мы сейчас напомним.

Пусть $T \subset \mathbb{R}^d$ – компактное множество, $v \in \mathbb{R}^d$ – единичный вектор и для каждого $x \in T$ задана “скорость” $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. Соответствующая система теней определяется формулой

$$T_t = \{x + t\varphi(x)v : \ x \in T\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для каждого $j = 0, \ldots, d$ функция

$$t \mapsto V_j(T_t)$$

является выпуклой функцией действительной переменной.

Обозначим

$$F(x_1, \ldots, x_m) = V_j\big(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_m)\big), \qquad (x_1, \ldots, x_m) \in P^m.$$

Функция F непрерывна, а множество P^m компактно, поэтому максимум в левой части (16) достигается в некоторой точке

$$(x_1^*, \ldots, x_m^*) \in P^m.$$

Сначала покажем, что при фиксированных остальных переменных функция

$$g_k(x) = F(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x, x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*), \qquad x \in P,$$

является выпуклой на многограннике P для каждого $k = 1, \ldots, m$.

Возьмем произвольные точки $a, b \in P$ и положим

$$y(t) = (1-t)a + tb, \qquad t \in [0,1].$$

Рассмотрим конечное множество

$$T = \{x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, a, x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Выберем единичный вектор

$$v = \frac{b-a}{\|b-a\|}$$

и зададим функцию скоростей $\varphi : T \to \mathbb{R}$ равенством

$$\varphi(a) = \|b-a\|, \qquad \varphi(x) = 0 \text{ при } x \in T,\ x \neq a.$$

Тогда соответствующая система теней имеет вид

$$\begin{aligned} T_t &= \{x + t\varphi(x)v :\ x \in T\} \\ &= \{x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*,\ a + t(b-a),\ x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*\} \\ &= \{x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*,\ y(t),\ x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$K_t = \operatorname{conv}(T_t) = \operatorname{conv}\bigl(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, y(t), x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*\bigr).$$

По теореме Хадвигера–Роджерса–Шепарда функция

$$h(t) = V_j(K_t) = F(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, y(t), x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*)$$

выпукла на $[0,1]$. Это означает, что для всех $t \in [0,1]$

$$h(t) \leqslant (1-t)h(0) + t\,h(1). \tag{18}$$

Подставляя сюда выражение для $h(t)$ и используя равенства $y(0) = a$, $y(1) = b$, получаем

$$\begin{aligned} g_k\bigl((1-t)a + tb\bigr) &= F(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, y(t), x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*) \\ &\leqslant (1-t)F(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, a, x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*) \\ &\quad + tF(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, b, x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*) \\ &= (1-t)g_k(a) + t\,g_k(b) \end{aligned}$$

для всех $t \in [0,1]$ и любых $a, b \in P$, то есть g_k – выпуклая функция на P. Следовательно, максимум функции g_k на P достигается в одной из вершин P:

$$\max_{x \in P} F(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x, x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*) \\ = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} F(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, z_i, x_{k+1}^*, \ldots, x_m^*).$$

Так как $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ – точка глобального максимума F на P^m, то

$$F(x_1^*, \ldots, x_m^*) = \max_{x \in P} F(x, x_2^*, \ldots, x_m^*).$$

Поэтому существует индекс i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant n$, такой что

$$F(z_{i_1}, x_2^*, \ldots, x_m^*) = F(x_1^*, \ldots, x_m^*).$$

Заменим первую точку x_1^* на вершину z_{i_1}; полученный набор по-прежнему дает максимальное значение функции F.

Далее фиксируем первую точку и повторяем рассуждение для второй переменной. Поскольку функция

$$x \mapsto F(z_{i_1}, x, x_3^*, \ldots, x_m^*)$$

выпукла на P, ее максимум на P достигается в вершине. Снова используя тот факт, что $(z_{i_1}, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ дает глобальный максимум, получаем вершину z_{i_2}, такую что

$$F(z_{i_1}, z_{i_2}, x_3^*, \ldots, x_m^*) = F(z_{i_1}, x_2^*, \ldots, x_m^*) = F(x_1^*, \ldots, x_m^*).$$

Продолжая этот процесс для $k = 3, \ldots, m$, по индукции строим набор вершин $z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}$, для которого

$$F(z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}) = F(x_1^*, \ldots, x_m^*) = \max_{x_1, \ldots, x_m \in P} F(x_1, \ldots, x_m). \qquad \square$$

4.3. Доказательство следствия 1. Рассмотрим значение функции φ на шаре радиуса r. Имеем

$$\varphi(B_r(0)) = \sum_{j=0}^{d} c_j V_j(B_r(0)) = \sum_{j=0}^{m} c_j r^j V_j(B_1(0)),$$

где $c_m > 0$.

Теперь представим $M_n(\varphi)$ в виде

$$M_n(\varphi) = \max_J \left(\sum_{i=0}^{m} c_i V_i(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}) \right),$$

где J определено в (10).

Условие $c_m > 0$, а также положительность функций V_i означают, что

$$\frac{M_n(\varphi)}{b_n^m} \in \left[\frac{c_m M_n(V_m)}{b_n^m} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{|c_i| M_n(V_i)}{b_n^i} \cdot \frac{1}{b_n^{m-i}}, \right.$$
$$\left. \frac{c_m M_n(V_m)}{b_n^m} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{|c_i| M_n(V_i)}{b_n^i} \cdot \frac{1}{b_n^{m-i}}\right].$$

По теореме 2 случайные величины $\frac{M_n(V_i)}{b_n^i}$ слабо сходятся к некоторому пределу, кроме того, $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому, аналогично теореме 1, можно заключить, что

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_i M_n(V_i)}{b_n^i} \cdot \frac{1}{b_n^{m-i}} \overset{P}{\Rightarrow} 0.$$

Применяя теорему о совместной сходимости (6), получаем требуемое утверждение.

4.4. Доказательство теоремы 3. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4 из работы [9]. Для краткости обозначим рассматриваемые многогранники через

$$D_n = \operatorname{conv}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i/b_n}\right), \qquad D = \operatorname{conv}(N_\nu). \tag{19}$$

В работе [4] в условиях настоящей теоремы была установлена слабая сходимость

$$f_k(D_n) \Rightarrow f_k(D) \text{ в } \mathbb{R}.$$

Для сходимости (14) достаточно показать, что последовательность $(f_k^m(D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно интегрируема (см., например, [6]). Для этого достаточно проверить, что

$$\sup \mathbb{E}\,|f_k^m(D_n)| < \infty \quad \text{для} \quad k = 0, \dots, d, \ m \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

так как выполнение этого неравенства для фиксированного m влечет равномерную интегрируемость $(f_k^l(D_n))_{n\in\mathbb{N}}$ при $0 \leqslant l < m$. Также отметим, что для произвольного многогранника P_n выполнено неравенство

$$f_k(P_n) \leqslant \binom{f_0(P_n)}{k+1} \leqslant f_0^{k+1}(P_n),$$

поэтому формулу (20) можно доказывать только для случая $k = 0$. Заметим, что

$$\mathbb{E}\, f_0^m(D_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_i \notin \mathrm{conv}\{U_j, j\neq i, j=1,\ldots,n\}\}}\right)^m \tag{21}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \mathbb{P}\left[U_{i_k} \notin \mathrm{conv}\{U_j, j \neq i_k\}, k = 1, \ldots, n\right]$$

$$\leqslant \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \mathbb{P}\left[U_{i_1}, \ldots, U_{i_m} \notin \mathrm{conv}\left(U_j, j \neq i_1, \ldots, j \neq i_m, j = 1, \ldots, n\right)\right].$$

Докажем, что для фиксированного k

$$\mathbb{P}\left[U_1, \ldots, U_k, \notin \mathrm{conv}\left(U_{k+1}, \ldots, U_{k+n}\right)\right] = O(n^{-k}),$$

из этого и (21) будет следовать (20). Для краткости обозначим $K_n = \mathrm{conv}\left(U_{k+1}, \ldots, U_{k+n}\right)$. Заметим, что

$$n^k \mathbb{P}\left[U_1, \ldots, U_k \notin K_n\right] \tag{22}$$
$$= n^k \mathbb{P}\left[U_1, \ldots, U_k \notin K_n, 0 \in K_n\right] + n^k \mathbb{P}\left[U_1, \ldots, U_k \notin K_n, 0 \notin K_n\right].$$

Для дальнейших рассуждений потребуется следующее оценочное утверждение, его доказательство является достаточно техническим и отнесено в §4.5. Идейно данное утверждение аналогично лемме 7.5 из [9].

Лемма 2. *Существуют такие константы* $c_1, c_2, c_3 > 0$, *что для любого* $r > 0$ *выполняется неравенство*

$$\mathbb{P}\left[B_r(0) \not\subset \frac{D_n}{b_n}\right] \leqslant c_1 \exp\left(-c_2 n (1 - F(c_3 r b_n))\right),$$

где константы b_n *из* (13), D_n *из* (19), *а функция* F – *это функция распределения* $\|U\|:\ F(r) = \mathbb{P}\left[\|U\| < r\right]$.

Последнее слагаемое в (22) может быть оценено путем перехода к пределу $r \to 0$ в лемме 2:

$$n^k \mathbb{P}\left[U_1, \ldots, U_k \notin K_n, 0 \notin \mathrm{int}(K_n)\right] \leqslant n^k c_1 \exp\left(-c_2 n\right) = o(1),$$

что означает, что это слагаемое равномерно ограничено. Для оценки первого слагаемого введем случайную величину

$$\theta_n = \min_{x \in \partial K_n} (\|x\|).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &n^k\mathbb{P}\left[U_1,\ldots,U_k\notin K_n, 0\in K_n\right]\leqslant n^k\mathbb{P}\left[U_1,\ldots,U_k\in\mathbb{R}^d\setminus B_{\theta_n}(0)\right]\\ &=\mathbb{E}\left(n^k\mathbb{P}\left[U_1\in\mathbb{R}^d\setminus B_{\theta_n}(0)\,|\,\theta_n\right]^k\right)=\mathbb{E}\left(n^k(1-F(\theta_n))^k\right).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(n^k(1-F(\theta_n))^k\right)\\ &\quad=\mathbb{E}\left(n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n<1\}}\right)+\mathbb{E}\left(n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n\geqslant 1\}}\right).\end{aligned}\tag{23}$$

Оценим сверху первое слагаемое:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n<1\}}\right)&\leqslant\mathbb{E}\left(n^k\mathbf{1}_{\{\theta_n<1\}}\right)\\ &=n\mathbb{P}[\theta_n<1]=n\mathbb{P}\left[B_{\frac{1}{b_n}}(0)\not\subset\frac{K_n}{b_n}\right]\\ &\leqslant n^k c_1\exp\left(-c_2 n(1-F(c_3))\right)=o(1).\end{aligned}$$

Последнее неравенство получено из леммы 2. Так как выражение стремится к 0, оно равномерно ограничено.

Теперь оценим второе слагаемое из (23):

$$\mathbb{E}\left(n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n\geqslant 1\}}\right)=\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\left[n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n\geqslant 1\}}\geqslant x\right]dx.\tag{24}$$

Нетрудно видеть, что это выражение равно

$$\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\left[n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n\geqslant 1\}}>x\right]dx+n^k\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\left[(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n\geqslant 1\}}=x\right]dx,$$

а последнее слагаемое равно 0, так как подынтегральное выражение не равно нулю лишь в счетном числе точек. Следовательно, (24) можно продолжить как

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\left[n^k(1-F(\theta_n))^k\mathbf{1}_{\{\theta_n\geqslant 1\}}>x\right]\,dx\\ &=\int\limits_0^\infty\mathbb{P}\left[1\leqslant\theta_n<\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}}\right)\right]\,dx\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^n \mathbb{P}\left[B_{\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}}\right)\cdot\frac{1}{b_n}} \not\subset \frac{K_n}{b_n} \right] dx \tag{25}$$
$$\leqslant \int_0^{n^k} c_1 \exp\left(-c_2 n \left(1 - F\left(c_3 \left(\frac{1}{1-F} \right)^{\leftarrow} \left(\frac{n}{x^{1/k}} \right) \right) \right) \right) dx.$$

Второе неравенство получено из определения обратной функции (см. §2.3), а последнее неравенство – из леммы 2. Более подробная информация о свойствах обратных функций приведена в разделе 2.3. Верхний предел интегрирования во втором неравенстве стал равен n, так как

$$\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}}\right) > 1 \Longleftrightarrow \inf\left\{ s\colon \frac{1}{1-F}(s) \geqslant \frac{n}{x^{1/k}} \right\} \geqslant 1$$
$$\Longleftrightarrow \inf\left\{ s : \frac{x^{1/k}}{n} \geqslant 1 - F(s) \right\} \geqslant 1$$
$$\Longrightarrow \frac{x^{1/k}}{n} \leqslant (1 - F(1)) \leqslant 1 \Longrightarrow x \leqslant n^k.$$

Обозначим
$$H(x) = \frac{1}{1-F}\,(x)\,.$$

Заметим, что функция H регулярно меняется с параметром $\alpha > 0$, поэтому
$$\lim_{y\to\infty} \frac{H(c_3 y)}{H(y)} = c_3^{\alpha}.$$

Следовательно, существует такое t_2, что для любого $y > t_2$ значение функции $H(c_3 y)$ лежит на отрезке с концами $c_3^{\alpha/2} H(y)$ и $c_3^{2\alpha} H(y)$. Функция H возрастает, поэтому при $H^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}}\right) > t_2$ будет выполнено неравенство

$$H\left(c_3 H^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}} \right) \right) \leqslant c_0 \cdot H\left(H^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}} \right) \right), \tag{26}$$

где $c_0 = \max(c_3^{\alpha/2}, c_3^{2\alpha})$. Функция $H(y)$ монотонно стремится к бесконечности при $y \to \infty$, следовательно, $H^{\leftarrow}(y)$ также стремится к бесконечности при $y \to \infty$. Это означает, что найдется такое t_3, что при $\frac{n}{x^{1/k}} > t_3$ неравенство (26) выполнено.

Кроме того, заметим, что если H – это положительная строго возрастающая к ∞ непрерывная справа функция, то если для $y > 0$ существует s, такое что $H(s) = y$, то $H(H^{\leftarrow}(y)) = y$, а если такого s не существует и $\lim_{\hat{s}\to s-0} H(\hat{s}) \leqslant y < H(s)$, то $H^{\leftarrow}(y) = s$ и $H(H^{\leftarrow})(y) = H(s)$.

Покажем, что существует такое $A > 0$, что начиная с некоторого места выполнено неравенство

$$\frac{H(H^{\leftarrow})(y)}{y} < A. \tag{27}$$

Заметим, что достаточно доказать, что начиная с некоторого момента

$$\frac{H(s)}{\lim_{\hat{s}\to s-0} H(\hat{s})} < A$$

в точках разрыва функции H. Воспользуемся предложением 3 (см. раздел 2.3) для $\varepsilon = 0,5$. Существует t_0, такое что для любого $s > 2t_0$ верно, что

$$\frac{H(s)}{\lim_{\hat{s}\to s-0} H(\hat{s})} \leqslant \frac{H(s)}{H(\frac{s}{2})} < 1,5 \cdot 2^{\alpha+0,5} =: A.$$

Так как $H(x) = \frac{1}{1-F}(x) \in RV_\alpha$, то все условия этого предложения выполнены. Следовательно, существует t_4, такое что при $y > t_4$ выполнено неравенство $\frac{H(H^{\leftarrow})(y)}{y} < A$. Возьмем $t_1 = \max(t_3, t_4)$. Тогда интеграл (25) можно оценить сверху как

$$\leqslant \int_0^{\left(\frac{n}{t_1}\right)^k} c_1 \exp\left(\frac{-c_2 n}{c_0 \cdot \frac{1}{1-F}\left(\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}}\right)\right)}\right) dx$$

$$+ \int_{\left(\frac{n}{t_1}\right)^k}^{n^k} c_1 \exp\left(\frac{-c_2 n}{\frac{1}{1-F}\left(c_3 \cdot \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}\left(\frac{n}{x^{1/k}}\right)\right)}\right) dx$$

$$\leqslant \int_0^{\left(\frac{n}{t_1}\right)^k} c_1 \exp\left(\frac{-c_2 n}{\frac{c_0 A n}{x^{1/k}}}\right) dx + \int_{\left(\frac{n^k}{t_1}\right)^k}^{n^k} c_1 \exp\left(\frac{-c_2 n}{\frac{1}{1-F}\left(c_3 \cdot \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t_1)\right)}\right) dx$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} c_1 \exp\left(\frac{-c_2 x^{1/k}}{c_0 A}\right) dx + c_1 n^k \exp\left(\frac{-c_2 n}{\frac{1}{1-F}\left(c_3 \cdot \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t_1)\right)}\right).$$

Первое слагаемое конечно и от n не зависит, второе стремится к 0 при $n \to \infty$, поэтому оно тоже равномерно ограничено. Напомним, что константы $c_0, c_1, c_2, c_3, A, t_1 > 0$ и зависят только от $F(x)$. Таким образом, удалось равномерно оценить сверху (24) и теорема 3 доказана.

4.5. Доказательство леммы 2. Согласно условию,

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(\mu))),$$

где μ из (1), поэтому существует $m \in \mathbb{N}$ и точки общего положения на единичной сфере $W_1, \ldots, W_m \in \operatorname{supp}(\mu)$, такие что

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(W_1, \ldots, W_m)).$$

Определим через T_i минимальный выпуклый конус с вершиной в 0, содержащий замкнутый шар радиуса ε с центром в точке W_i. Параметр ε выберем настолько малым, чтобы эти конусы не пересекались, а также выполнялось следующее условие:

$$\begin{aligned}&\text{для любых наборов } (Z_1, \ldots, Z_m)\colon Z_i \in T_i \cap \mathbb{S}^1, k \in \{1, \ldots, m\},\\ &\text{выполнено } 0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(Z_1, \ldots, Z_m)) \qquad (28)\\ &\text{и } Z_1, \ldots, Z_m\text{– вершины } \operatorname{conv}(Z_1, \ldots, Z_m).\end{aligned}$$

Обозначим через

$$T_k(r) = T_k \setminus B_r(0) \tag{29}$$

пересечение конуса T_k с дополнением шара радиуса r с центром в 0. Докажем следующее утверждение.

Пусть имеется набор точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Тогда существует такое $c_4 > 0$, что если $T_k(c_4 r)$ содержит хотя бы одну точку из набора $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ при всех $k = 1, \ldots, m$, то

$$B_r(0) \in \operatorname{conv}(x_1, x_2, x_3, \ldots). \tag{30}$$

Для начала докажем, что

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(x_1, x_2, x_3, \ldots)). \tag{31}$$

Если это не так, то существует гиперплоскость Q, проходящая через 0, оставляющая все точки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ в одном полупространстве. Обозначим через y_i проекцию x_i на $\mathbb{S}^{d-1}$ (пересечение Ox_i и $\mathbb{S}^{d-1}$). Тогда точки $y_1, y_2, y_3, \ldots$ также находятся по одну сторону от Q, что противоречит условию (28). Следовательно, 0 – это внутренняя точка выпуклой оболочки точек. Предположим, что все $T_k(1)$ содержат хотя бы одну точку из набора $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Удаляя лишние точки, будем считать, что $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ теперь состоит только из тех точек, каждая из которых принадлежит хотя бы одному $T_k(1)$. В этом случае имеем $\|x_i\| \geqslant \|y_i\|$ при всех $i = 1, \ldots, m$, а также выполнено (31), поэтому

$$\operatorname{conv}(y_1, y_2, y_3, \ldots) \subset \operatorname{conv}(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Рассмотрим функцию $h\colon (\mathbb{S}^{d-1})^m \to \mathbb{R}$, сопоставляющую набору точек максимальный радиус окрестности 0, содержащийся в выпуклой оболочке этого набора. Эта функция непрерывна, а значит, достигает минимума на компакте $\prod_{k=1}^{m}(T_k \cap \mathbb{S}^{d-1})$. Этот минимум не равен 0, следовательно, существует $c_5 > 0$, такое что

$$B_{c_5}(0) \subset \operatorname{conv}(y_1, y_2, y_3, \ldots) \subset \operatorname{conv}(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

В силу гомотетичности $c_4 = \frac{1}{c_5}$ удовлетворяет условию. Утверждение доказано.

Рассмотрим U из условия леммы. Для начала докажем, что существует $c_6 > 0$, такое что для любого $k = 1, \ldots, m, r > 0$ выполнено неравенство

$$\mathbb{P}\left[\frac{U}{b_n} \in T_k(r)\right] \geqslant c_6(1 - F(rb_n)), \tag{32}$$

где F – функция распределения $\|U\|$: $F(r) = \mathbb{P}\left[\|U\| < r\right]$, а $T_k(r)$ из (29). Заметим, что

$$\mathbb{P}\left[\frac{U}{b_n} \in T_k(r)\right] = 1 - F_k(rb_n),$$

где функция F_k – функция распределения вектора $\|U\| \cdot \mathbf{1}\{U \in T_k\}$, где T_k из (28).

Функция F_k является функцией распределения случайной величины, удовлетворяющей (13) с той же самой константой b_n, что у U, но другой мерой $\hat{\nu}_k$. Получающаяся мера будет невырожденной, так как $W_k \in \operatorname{supp}(\mu)$, где μ из (1).

Мера ν имеет вид $cr^{-\alpha}\mathrm{d}r \times \mu$, тогда мера $\hat{\nu}_k$ также имеет вид $s_k \cdot r^{-\alpha}\mathrm{d}r$, где $s_k = \frac{\mu(T_k \cap \mathbb{S}_1)}{\mu(\mathbb{S}_1)} \neq 0$, а следовательно $1 - F_k(x) \in RV_{-\alpha}$. Аналогично функция $1 - F(x)$ также принадлежит классу $RV_{-\alpha}$ (см. §2.3).

Функции $F(x), F_k(x)$ удовлетворяют условию предложения 2 из §2.3, значит существует

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F_k(x)}{1-F(x)} = c_7 > 0.$$

Начиная с некоторого x_0 выполнено

$$\frac{1-F_k(x)}{1-F(x)} > \frac{c_7}{2}.$$

При $x \leqslant x_0$ выполнено неравенство

$$\frac{1-F_k(x)}{1-F(x)} \geqslant 1 - F_k(x_0) > 0.$$

Следовательно, в неравенстве (32) можно положить

$$c_6 = \min\left(\frac{c_7}{2}, 1 - F_k(x_0)\right),$$

где минимум взят по $k = 1, \ldots, m$.

Применяя (30) для набора $\left\{\frac{U_1}{b_n}, \ldots, \frac{U_n}{b_n}\right\}$, приходим к

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big[B_r(0) \not\subset \frac{D_n}{b_n}\Big] \\
&\qquad \leqslant \mathbb{P}\Big[\exists k \in \{1, \ldots, m\} \colon T_k(c_4 r) \cap \Big\{\frac{U_1}{b_n}, \ldots, \frac{U_n}{b_n}\Big\} = \varnothing\Big] \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\Big[T_k(c_4 r) \cap \Big\{\frac{U_1}{b_n}, \ldots, \frac{U_n}{b_n}\Big\} = \varnothing\Big] = \sum_{k=1}^{m} F_k(c_4 b_n r)^n \\
&\qquad \leqslant m(1 - c_6(1 - F(c_4 r b_n)))^n \leqslant m \exp(-c_6 n(1 - F(c_4 r b_n))).
\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из (32), а последнее – из неравенства $(1-f)^g \leqslant \exp(-fg)$ при $g > 0, f \in (0,1)$. Подставляя $c_1 = m, c_2 = c_6, c_3 = c_4$, получаем требуемое в лемме 2.

Список литературы

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер,* М., Наука, 1977.
2. Yu. Davydov, C. Dombry, *Convex hulls of regularly varying processes.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **408** (2012), 154–174.
3. Е. Симарова, *Экстремальные случайные бета политопы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **501** (2021), 276–301.
4. Е. Н. Симарова, *Выпуклые оболочки случайных векторов с правильно меняющимся распределением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 225–247.
5. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures,* New York, Wiley, 1968.

6. A. DasGupta, *Moment convergence and uniform integrability.* — In: Asymptotic Theory of Statistics and Probability. Springer Texts in Statistics, New York, Springer, 2008.
7. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Berlin–Göttingen–Heidelberg, Springer, 1957.
8. N. Henze, W. Lao, *The limit distribution of the largest interpoint distance for power-tailed spherically decomposable distributions and their affine images.* Preprint, Karlsruhe Institute of Technology, 2010.
9. Z. Kabluchko, A. Marynych, D. Temesvari, Ch. Thäle, *Cones generated by random points on half-spheres and convex hulls of Poisson point processes.* — Probab. Theory Relat. Fields. **175** (2019), 1021–1061.
10. Z. Kabluchko, Ch. Thäle, D. Zaporozhets, *Beta polytopes and Poisson polyhedra: f-vectors and angles.* — Adv. Math. **374** (2020), Article 107333.
11. W. Lao, M. Mayer, *U-max-statistics.* — J. Multivariate Anal. **99** (2008), 2039–2052.
12. Yu. Nikitin, E. Simarova, *Generalized limit theorems for U-max statistics.* — J. Appl. Probab. **59**, No. 3(2022), 825–848.
13. S. Resnick, *Point processes, regular variation and weak convergence.* — Adv. Appl. Probab. **18**, No. 1 (1986), 66–138.
14. S. I. Resnick, *Heavy-tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling,* New York, Springer, 2007.
15. S. I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes,* New York, Springer, 2008.
16. C. A. Rogers, G. C. Shephard, *Some extremal problems for convex bodies.* — Mathematika **5** (1958), 93–102.
17. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry,* Heidelberg, Springer, 2008.
18. R. Schneider, *Convex Bodies: the Brunn–Minkowski Theory,* Second expanded edition, Cambridge, Cambridge University Press, 2014.
19. M. Schulte, Ch. Thäle, *The scaling limit of Poisson-driven order statistics with applications in geometric probability.* — Stoch. Proc. Appl. **122**, No. 12 (2012), 4096–4120.
20. G. C. Shephard, *Shadow systems of convex bodies.* — Israel J. Math. **2** (1964), 229–236.
21. D. Temesvari, *Discrete stochastic geometry: beta-polytopes, random cones and empty simplices.* PhD thesis, Ruhr University Bochum, Germany, 2019.

Zaporozhets D. N., Simarova E. N. Limit theorems for random polytopes generated by heavy-tailed distributions.

The paper is devoted to the study of asymptotic properties of random polytopes that are convex hulls of independent identically distributed random vectors with a regularly varying (heavy-tailed) distribution. We study the convergence of functionals of these random polytopes, including intrinsic volumes, the induced U-max statistics and the f-vector, to the corresponding functionals of Poisson polytopes. The results obtained extend

known facts for specific distributions to a general class of heavy-tailed distributions.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zap1979@gmail.com

Поступило 17 ноября 2025 г.

Национальный
исследовательский университет
"Высшая школа экономики",
Санкт-Петербург, Россия;
С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: katerina.1.14@mail.ru