Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

Д. Н. Запорожец, Т. Д. Мосеева

МОНОТОННОСТЬ СРЕДНИХ ОБЪЕМОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛИТОПОВ

§1. Введение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные векторы в $\mathbb{R}^d$, где $2 \leqslant n \leqslant d+1$. Для фиксированного целого $k \in \{0, \dots, n\}$ предполагается, что $X_1, \dots, X_k$ равномерно распределены внутри единичного шара, а $X_{k+1}, \dots, X_n$ – равномерно распределены на единичной сфере. Тогда выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(X_1, \dots, X_n)$ почти наверное является $(n-1)$-мерным симплексом.

Классический результат Майлза [4] дает явное выражение для математического ожидания объема этого симплекса:

$$\mathbb{E}\operatorname{Vol}_{n-1}(\operatorname{conv}(X_1,\dots,X_n)) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{d+1}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n(d-1)+k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}nd+k\right)} \times \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}d)}{\Gamma(\frac{1}{2}(d+1))}\right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(d-n+j+2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(d-n+j+1)\right)}.$$

В работе [4] также приведены численные значения математического ожидания объема описанного симплекса для размерностей $d = 2, 3, 4$, см. [4, теорема 2].

Позднее Аффентрангер [1] обобщил результат Майлза на случай случайных политопов. Анализируя численные значения первого момента объема, он отметил, что средний объем возрастает по числу вершин, лежащих на границе шара, и предположил, что аналогичная монотонность имеет место для любого выпуклого тела.

Рубен и Майлз [5] рассмотрели более широкий класс распределений в $\mathbb{R}^d$, а именно бета-распределения с плотностями

$$f_{d,\beta}(x) = c_{d,\beta}\,\left(1-|x|^2\right)^{\beta}, \quad |x| \leqslant 1,$$

Ключевые слова: бета-политопы, ожидаемый объем, бета-распределение, случайные симплексы, выпуклая оболочка, стохастическое доминирование, внутренние объемы, геометрическая вероятность, стохастическая геометрия.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

где $\beta > -1$, а нормировочная константа $c_{d,\beta}$ определяется равенством

$$c_{d,\beta} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + \beta + 1)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\beta + 1)}.$$

При $\beta = 0$ распределение $f_{d,\beta}$ совпадает с равномерным распределением внутри единичного шара, а равномерное распределение на единичной сфере получается как слабый предел при $\beta \downarrow -1$. Пусть X_i, $i = 1, \ldots, n$, – независимые случайные векторы с плотностями f_{d,β_i}. В работе [5] показано, что для любого целого $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_n)))^k \\ &\quad = ((n-1)!)^{-k} \frac{\Gamma\left(\frac{n(n-1+k)}{2} + \sum_{i=1}^n \beta_i + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{(n-1)(n+k)}{2} + \sum_{i=1}^n \beta_i + 1\right)} \\ &\qquad \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{j+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \beta_i + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+k}{2} + \beta_i + 1\right)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если отказаться от условия $n \leqslant d+1$, то выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_n)$, вообще говоря, уже не является симплексом. Зафиксируем набор параметров $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где $\beta_i > -1$, и рассмотрим независимые случайные векторы $X_1, \ldots, X_n$ в $\mathbb{R}^d$, такие что X_i имеет плотность f_{d,β_i}. Обозначим

$$\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}} = \mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_n)$$

и будем называть многогранник $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}$ бета-политопом.

Каблучко, Темешвари и Теле [3] получили формулу для среднего объема $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}$ в случае одинаковых параметров $\beta_1 = \ldots = \beta_n = \beta$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(\mathrm{conv}(X_1, \ldots, X_n)) \\ &\quad = \frac{(d+1)\kappa_d}{\pi^{\frac{d+1}{2}} 2^d} \cdot \binom{n}{d+1} \left(\frac{(d+1)}{2} + \beta\right) \left(\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2} + \beta)}{\Gamma(\frac{d+3}{2} + \beta)}\right)^{d+1} \\ &\qquad \times \int_{-1}^{1} (1-h^2)^{(d+1)\beta + \frac{d^2+2d-1}{2}} \cdot \left(F_{\beta + \frac{d-1}{2}}(h)\right)^{n-d-1} \mathrm{d}h, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$F_\beta(h) = c_{1,\beta} \int\limits_{-1}^{h} (1-x^2)^\beta \, \mathrm{d}x, \quad h \in [-1,1],$$

– функция распределения меры с плотностью $f_{1,\beta}$.

В случае неодинаковых параметров β_i явное выражение для среднего объема бета-политопа получено в работе [8].

Естественным является вопрос о монотонности математического ожидания объема бета-политопа по параметрам β_i. Убывание среднего объема при увеличении параметров β_i согласуется с замечанием Аффентрангера, основанным на численных данных для симплексов с вершинами, равномерно распределенными внутри единичного шара или на его границе.

Цель настоящей работы – доказать монотонность по параметрам β моментов объема бета-симплекса и первого момента объема бета-политопа и получить соответствующие результаты для более широкого класса распределений.

§2. Основные результаты

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ наборы независимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$, со следующими свойствами:

- распределения $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$ центрально симметричны;
- для любого индекса i случайные величины $\frac{X_i}{|X_i|}$ и $\frac{Y_i}{|Y_i|}$ одинаково распределены;
- для любых $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ и $r > 0$ выполнено неравенство

$$\mathbb{P}\left(|X_i| > r \;\middle|\; \frac{X_i}{|X_i|} = u\right) \geqslant \mathbb{P}\left(|Y_i| > r \;\middle|\; \frac{Y_i}{|Y_i|} = u\right),$$

  т.е. для любого фиксированного направления $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ $|X_i|$ стохастически мажорирует $|Y_i|$ в этом направлении: $|X_i| \succeq |Y_i|$.

Рассмотрим случайные политопы $P_X = \operatorname{conv}(X_1, \dots, X_n)$ и $P_Y = \operatorname{conv}(Y_1, \dots, Y_n)$.

Основной результат данной работы – соотношение на произвольные моменты объемов P_X и P_Y в случае, когда данные многогранники являются симплексами (или политопами размерности, меньшей $n-1$) и соотношение на средние объемы в случае, когда P_X и P_Y – произвольные многогранники.

Теорема 1. *Если $n \leqslant d+1$, для любого $k \geqslant 1$, имеем*

$$\mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_{n-1}(P_X))^k \geqslant \mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_{n-1}(P_Y))^k.$$

Теорема 2. *В случае $n \geqslant d+2$ имеем $\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(P_X) \geqslant \mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(P_Y)$.*

В качестве следствия из теоремы 2 получены соотношения на математические ожидания всех внутренних объемов $V_1, \dots, V_d$ политопов P_X и P_Y. Напомним, что внутренние объемы (intrinsic volumes) $V_0(K), V_1(K), \dots, V_d(K)$ выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^d$ определяются через формулу Штейнера для объема ε-окрестности:

$$\mathrm{Vol}_d(K + \varepsilon B^d) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} V_i(K) \varepsilon^{d-i}, \quad \varepsilon \geqslant 0,$$

где B^d – единичный шар в $\mathbb{R}^d$. В частности, $V_d(K) = \mathrm{Vol}_d(K)$, $V_1(K)$ пропорционально средней ширине, а $V_0(K) = 1$ (см., например, [6]).

Следствие 1. *Для любого $m \leqslant d$ и произвольного n имеем*

$$\mathbb{E}\, V_m(P_X) \geqslant \mathbb{E}\, V_m(P_Y).$$

Заметим, что если рассмотреть описанный многогранник, точка, равномерно распределенная на его границе, будет иметь такое же распределение радиус-вектора, как и точка, равномерно выбранная внутри. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть P – центрально-симметричный описанный многогранник в $\mathbb{R}^d$. Пусть точки $X_1, \dots, X_n$ выбраны независимо и равномерно на границе P, а точки $Y_1, \dots, Y_n$ – независимо и равномерно внутри P, $n \leqslant d+1$. Рассмотрим случайные политопы $P_X = \mathrm{conv}(X_1, \dots, X_n)$ и $P_Y = \mathrm{conv}(Y_1, \dots, Y_n)$. Тогда $\mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_{n-1}(P_X))^k \geqslant \mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_{n-1}(P_Y))^k$. Кроме того, если $n \geqslant d+2$, имеем $\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(P_X) \geqslant \mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(P_Y)$.*

В случае размерности $d = 1$ политопы P_X и P_Y – отрезки, и неравенство для моментов удается доказать для любого количества точек.

Теорема 3. *Если $d = 1$, для любого $k \geqslant 1$ и произвольного n имеем $\mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_1(P_X))^k \geqslant \mathbb{E}\,(\mathrm{Vol}_1(P_Y))^k$.*

§3. Следствие для бета-политопов

Покажем, что основные результаты применимы для исследования поведения среднего объема политопов $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}$. Напрямую из определения следует сферическая симметричность бета-распределений, которая гарантирует выполнение первых двух свойств. Следующее свойство бета-распределений, вероятно, хорошо известно, но для удобства читателя мы приводим его с подробным доказательством.

Утверждение 1. *Пусть случайные векторы Z_1 и Z_2 в $\mathbb{R}^d$ имеют бета-распределения с параметрами $\beta_1 > \beta_2$. Тогда $\forall r > 0$ имеем $\mathbb{P}(|Z_1| > r) \leqslant \mathbb{P}(|Z_2| > r)$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться явным видом плотности f_{d,β_i} и известными свойствами одномерных бета-распределений. Имеем

$$\mathbb{P}(|Z_1| > r) = c_{d,\beta_1} \int\limits_{|x| \geqslant r} (1 - |x|^2)^{\beta_1}\,\mathrm{d}x = c_{d,\beta_1}\omega_d \int\limits_r^1 (1-u^2)^{\beta_1} u^{d-1}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2} c_{d,\beta_1}\omega_d \int\limits_{r^2}^1 v^{\frac{d-2}{2}} (1-v)^{\beta_1}\,\mathrm{d}v = \mathbb{P}(\xi_1 > r^2),$$

где ξ_1 – случайная величина, имеющая распределение $B(\frac{d}{2}, \beta_1 + 1)$,

Аналогично, $\mathbb{P}(|Z_2| > r) = \mathbb{P}(\xi_2 > r^2)$, где ξ_2 – случайная величина, имеющая распределение $B(\frac{d}{2}, \beta_2 + 1)$.

Рассмотрим отношение плотностей f_1 и f_2 случайных величин ξ_1 и ξ_2:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{B(\frac{d}{2}, \beta_2 + 1)}{B(\frac{d}{2}, \beta_1 + 1)} (1-x)^{\beta_1 - \beta_2}.$$

Заметим, что это отношение убывает на отрезке от 0 до 1. Тогда для произвольного $t \in [0,1]$ имеем

$$f_1(t)\,\mathbb{P}(\xi_2 \leqslant t) = \int\limits_0^t f_1(t)\,f_2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_0^t f_1(x)\,f_2(t)\,\mathrm{d}x = f_2(t)\,\mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t)$$

$$\Rightarrow \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \leqslant \frac{\mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t)}{\mathbb{P}(\xi_2 \leqslant t)}$$

и

$$f_1(t)\,\mathbb{P}(\xi_2 > t) = \int\limits_t^1 f_1(t)\,f_2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_t^1 f_1(x)\,f_2(t)\,\mathrm{d}x = f_2(t)\,\mathbb{P}(\xi_1 > t)$$
$$\Rightarrow \frac{f_1(t)}{f_2(t)} \geqslant \frac{1-\mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t)}{1-\mathbb{P}(\xi_2 \leqslant t)}.$$

Из полученных неравенств следует, что $\mathbb{P}(\xi_1 \leqslant t) \geqslant \mathbb{P}(\xi_2 \leqslant t)$ для любого $t \in [0,1]$, что завершает доказательство.

□

Следствие 3. *Рассмотрим случайные политопы $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}}$ и $\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\gamma}}$, такие что $\beta_i \leqslant \gamma_i$ при всех i. Тогда $\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\,\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\beta}} \geqslant \mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d\,\mathcal{P}_{n,d}^{\overline{\gamma}}$.*

§4. Вспомогательные утверждения

Хорошо известно следующее важное свойство: если случайная величина X стохастически мажорирует случайную величину Y, то существуют их копии $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, заданные на одном вероятностном пространстве, такие, что

$$\widetilde{X} = \widetilde{Y} + \delta, \quad \text{где п.н.} \quad \delta \geqslant 0. \tag{3}$$

В самом деле, достаточно положить $\widetilde{X} = F_X^{-1}(U)$ и $\widetilde{Y} = F_Y^{-1}(U)$, где F^{-1} – обобщенная обратная функция распределения (см., например, [2, теорема 2.1]).

Данное представление позволяет нам считать, что почти наверное направления X_i и Y_i совпадают и $|Y_i| \leqslant |X_i|$.

Следующие утверждения имеют чисто геометрическую природу и помогают понять, как меняется объем выпуклой оболочки конечного числа точек при приближении одной из них к началу координат.

Лемма 1. *Пусть L – аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$. Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ и любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполнено неравенство:*

$$\mathrm{dist}(x,L) + \mathrm{dist}(-x,L) \geqslant \mathrm{dist}(\alpha x,L) + \mathrm{dist}(-\alpha x,L).$$

Доказательство. Обозначим через $P : \mathbb{R}^d \to L^\perp$ ортогональную проекцию на ортогональное дополнение L, кроме того обозначим $y_0 = PL$

и $x_0 = Px$ образы L и x под действием данной проекции. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x, L) + \operatorname{dist}(-x, L) &= \operatorname{dist}(Px, PL) + \operatorname{dist}(P(-x), PL)\\ &= \operatorname{dist}(x_0, y_0) + \operatorname{dist}(-x_0, y_0)\end{aligned}$$

и

$$\operatorname{dist}(\alpha x, L) + \operatorname{dist}(-\alpha x, L) = \operatorname{dist}(\alpha x_0, y_0) + \operatorname{dist}(-\alpha x_0, y_0).$$

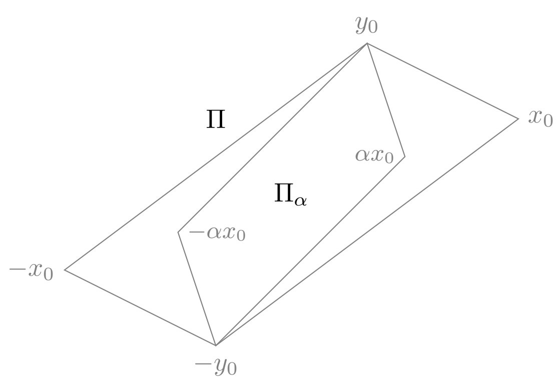
Рассмотрим параллелограммы $\Pi = \operatorname{conv}(x_0, -x_0, y_0, -y_0)$ и $\Pi_\alpha = \operatorname{conv}(\alpha x_0, -\alpha x_0, y_0, -y_0)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}(x_0, y_0) + \operatorname{dist}(-x_0, y_0)\\ &\quad= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{dist}(x_0, y_0) + \operatorname{dist}(-x_0, y_0) + \operatorname{dist}(x_0, -y_0) + \operatorname{dist}(-x_0, -y_0)\Big)\\ &\quad= \frac{1}{2}|\partial\Pi|.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\operatorname{dist}(\alpha x_0, y_0) + \operatorname{dist}(-\alpha x_0, y_0) = \frac{1}{2}|\partial\Pi_\alpha|.$$



В силу того, что $\Pi_\alpha \subset \Pi$, периметр Π_α не превосходит периметра Π, что и требовалось. □

Замечание 1. Заметим, что

$$\max\left(\operatorname{dist}(x_0, y_0),\ \operatorname{dist}(-x_0, y_0)\right) \geqslant \max\left(\operatorname{dist}(\alpha x_0, y_0),\ \operatorname{dist}(-\alpha x_0, y_0)\right),$$

так как отрезки $[y_0, \alpha x_0]$ и $[y_0, -\alpha x_0]$ являются чевианами в треугольнике с вершинами y_0, x_0, $-x_0$.

Таким образом,

$$\max\left(\operatorname{dist}(x, L),\, \operatorname{dist}(-x, L)\right) \geqslant \max\left(\operatorname{dist}(\alpha x, L),\, \operatorname{dist}(-\alpha x, L)\right). \qquad (4)$$

Лемма 2. *Для любых точек $x, z_1 \ldots, z_n \in \mathbb{R}^d$, где $n \leqslant d$, и любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ имеем*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Vol}_n\left(\operatorname{conv}(x, z_1, \ldots, z_n)\right) + \operatorname{Vol}_n\left(\operatorname{conv}(-x, z_1, \ldots, z_n)\right)\\&\qquad \geqslant \operatorname{Vol}_n\left(\operatorname{conv}(\alpha x, z_1, \ldots, z_n)\right) + \operatorname{Vol}_n\left(\operatorname{conv}(-\alpha x, z_1, \ldots, z_n)\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}&\operatorname{Vol}_n\left(\operatorname{conv}(x, z_1, \ldots, z_n)\right)\\&\qquad = \frac{1}{n}\operatorname{dist}(x, \operatorname{aff}(z_1, \ldots, z_n)) \cdot \operatorname{Vol}_{n-1}\left(\operatorname{conv}(z_1, \ldots, z_n)\right). \qquad (5)\end{aligned}$$

Если точки $x, z_1, \ldots, z_n$ находятся в общем положении, то их выпуклая оболочка является n-мерным симплексом, для которого равенство выше – стандартная формула для объема. Если же размерность выпуклой оболочки окажется меньше n, то как левая, так и правая части равенства окажутся равны 0.

Применение леммы 1 завершает доказательство. □

Лемма 3. *Рассмотрим точки $x, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^d$, такие что*

$$\dim(\operatorname{aff}(z_1, \ldots, z_n)) = d.$$

Обозначим через P_x политоп $\operatorname{conv}(x, z_1, \ldots, z_n)$
и через P_z – политоп $\operatorname{conv}(z_1, \ldots, z_n)$. *Тогда*

$$2\operatorname{Vol}_d(P_x) = \operatorname{Vol}_d(P_z) + \sum_{F-\text{гипергрань } P_z} \operatorname{Vol}_d(\operatorname{conv}(x, F)).$$

Доказательство. Рассмотрим точки $w^\varepsilon, w_1, \ldots, w_n$ в $\mathbb{R}^{d+1}$, заданные равенствами

$$w^\varepsilon = (x, \varepsilon),\; w_i = (z_i, 0).$$

Рассмотрим политоп $Q^\varepsilon = \operatorname{conv}(w^\varepsilon, w_1, \ldots, w_n)$. В метрике Хаусдорфа $Q^\varepsilon \to P_x$ при $\varepsilon \to 0$, а значит и

$$\operatorname{Vol}_d(\partial Q^\varepsilon) = 2\, V_d(Q^\varepsilon) \to 2\, V_d(P_x) = 2\operatorname{Vol}_d(P_x).$$

Множество гиперграней многогранника Q^ε состоит в точности из гиперграни $\mathrm{conv}(w_1,\dots,w_n)=\mathrm{conv}(z_1,\dots,z_n)=P_z$ и гиперграней вида $\mathrm{conv}(w^\varepsilon,F)$, где F пробегает все гиперграни многогранника P_z. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_d(\partial Q^\varepsilon)&=\mathrm{Vol}_d(P_z)+\sum_{F\text{ – гипергрань }P_z}\mathrm{Vol}_d(\mathrm{conv}(w^\varepsilon,F))\\&\to\mathrm{Vol}_d(P_z)+\sum_{F\text{ – гипергрань }P_z}\mathrm{Vol}_d(\mathrm{conv}(x,F)),\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Следующий результат обобщает результат леммы 2 на случай большего количества точек.

Лемма 4. *Для любых точек $x,z_1\dots,z_n\in\mathbb{R}^d$, где $n\geqslant d+1$, и любого $0\leqslant\alpha\leqslant1$ имеем*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(x,z_1,\dots,z_n)\right)+\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(-x,z_1,\dots,z_n)\right)\\&\quad\geqslant\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(\alpha x,z_1,\dots,z_n)\right)+\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(-\alpha x,z_1,\dots,z_n)\right).\end{aligned}\tag{6}$$

Доказательство. Обозначим P_z выпуклую оболочку $\mathrm{conv}(z_1,\dots,z_n)$. Если $\dim(\mathrm{aff}(P_z))<d$, то

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(x,z_1,\dots,z_n)\right)\\&\qquad=\frac{1}{d}\mathrm{dist}(x,\mathrm{aff}(z_1,\dots,z_n))\cdot\mathrm{Vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}(z_1,\dots,z_n)\right),\end{aligned}$$

и утверждение следует из леммы 1.

В случае $\dim(\mathrm{aff}(P_z))=d$ мы можем воспользоваться результатом леммы 3 и свести требуемое утверждение к неравенствам

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(x,F)\right)+\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(-x,F)\right)\\&\qquad\geqslant\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(\alpha x,F)\right)+\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(-\alpha x,F)\right),\end{aligned}$$

для всех гиперграней F политопа P_z. Заметим, что неравенства выше выполнены в силу леммы 1 и равенства

$$\mathrm{Vol}_d\left(\mathrm{conv}(x,F)\right)=\frac{1}{d}\,\mathrm{dist}(x,F)\cdot\mathrm{Vol}_{d-1}\left(F\right).$$

□

§5. Доказательства теорем 1 и 2

Заметим, что для доказательства теоремы 1 достаточно для любого $n \leqslant d$ доказать неравенство

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_n(Q_X)\right)^k \geqslant \mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_n(Q_Y)\right)^k, \tag{7}$$

где

$$Q_X = \mathrm{conv}(X, Z_1, \dots, Z_n),$$
$$Q_Y = \mathrm{conv}(Y, Z_1, \dots, Z_n),$$

центрально-симметричные случайные векторы X и Y не зависят от $Z_1, \dots, Z_n$, и про X и Y известно, что почти наверное

$$\frac{Y}{|Y|} = \frac{X}{|X|}, \quad |X| \geqslant |Y|. \tag{8}$$

Выполнение соотношений выше следует из (3), а последовательная замена всех X_i на Y_i, в ходе каждой из которых моменты объема не увеличиваются, влечет утверждение теоремы 1.

Обозначим через Q_{-X} политоп $\mathrm{conv}(-X, Z_1, \dots, Z_n)$ и через Q_{-Y} политоп $\mathrm{conv}(-Y, Z_1, \dots, Z_n)$. Заметим, что в силу центральной симметричности

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_n(Q_X)\right)^k &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_n(Q_X)\right)^k + \mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_n(Q_{-X})\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_n(Q_X)^k + \mathrm{Vol}_n(Q_{-X})^k\right).\end{aligned}$$

Докажем, что неравенство

$$\mathrm{Vol}_n(Q_X)^k + \mathrm{Vol}_n(Q_{-X})^k \geqslant \mathrm{Vol}_n(Q_Y)^k + \mathrm{Vol}_n(Q_{-Y})^k \tag{9}$$

выполнено почти наверное, откуда будет следовать неравенство (7).

Для $k = 1$ неравенство (9) есть результат леммы 2, так как в силу условия (8) можно считать, что $Y = \alpha X$ для некоторого $\alpha \in [0, 1]$.

В силу (5), достаточно доказать, что

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(X, \mathrm{aff}(Z_1, \dots, Z_n))^k + \mathrm{dist}(-X, \mathrm{aff}(Z_1, \dots, Z_n))^k \\ &\qquad \geqslant \mathrm{dist}(Y, \mathrm{aff}(Z_1, \dots, Z_n))^k + \mathrm{dist}(-Y, \mathrm{aff}(Z_1, \dots, Z_n))^k.\end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим через L подпространство $\mathrm{aff}(Z_1, \dots, Z_n)$. В силу леммы 1 и замечания 1 выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(X, L) + \mathrm{dist}(-X, L) \geqslant \mathrm{dist}(Y, L) + \mathrm{dist}(-Y, L)$$

и

$$\max\left(\operatorname{dist}(X,L),\,\operatorname{dist}(-X,L)\right) \geqslant \max\left(\operatorname{dist}(Y,L),\,\operatorname{dist}(-Y,L)\right).$$

Остается заметить, что функция $f(x) = x^k$ при $k \geqslant 1$ монотонно возрастает и выпукла вниз на положительной полуоси, что завершает доказательство (10) и теоремы 1.

Перейдем к доказательству теоремы 2. В силу замечания, сделанного в начале данного раздела, для доказательства достаточно для любого $n \geqslant d+1$ проверить неравенство

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(Q_X) \geqslant \mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_d(Q_Y). \tag{11}$$

Вновь воспользуемся симметрией распределений X и Y относительно начала координат, в силу которой достаточно доказать неравенство

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_d(Q_X) + \mathrm{Vol}_d(Q_{-X})\right) \geqslant \mathbb{E}\left(\mathrm{Vol}_d(Q_Y) + \mathrm{Vol}_d(Q_{-Y})\right).$$

В силу леммы 4 почти наверное выполнено неравенство

$$\mathrm{Vol}_d(Q_X) + \mathrm{Vol}_d(Q_{-X}) \geqslant \mathrm{Vol}_d(Q_Y) + \mathrm{Vol}_d(Q_{-Y}),$$

откуда напрямую следует (11).

§6. Доказательство следствия 1

Хорошо известна формула Куботы (см., например, [7, теорема 6.2.2]), позволяющая выразить внутренний объем выпуклого компакта как средний объем проекции этого компакта на подпространство меньшей размерности:

$$V_m(K) = \binom{d}{m}\frac{\kappa_d}{\kappa_m\kappa_{d-m}}\mathbb{E}_L\mathrm{Vol}_m(K|L),$$

где L – случайное m-мерное линейное подпространство, выбранное согласно вероятностной мере Хаара, инвариантной относительно поворотов, $K|L$ есть ортогональная проекция K на L и $\kappa_k = |\mathbb{B}^k|$ – объем единичного k-мерного шара.

Применим данную формулу к политопам P_X и P_Y:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,V_m(P_X) &= \binom{d}{m}\frac{\kappa_d}{\kappa_m\kappa_{d-m}}\mathbb{E}\,\mathbb{E}_L\mathrm{Vol}_m(P_X|L)\\ &= \binom{d}{m}\frac{\kappa_d}{\kappa_m\kappa_{d-m}}\mathbb{E}_L\,\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_m(\mathrm{conv}(X_1|L,\ldots,X_n|L)).\end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что для фиксированного подпространства L случайные векторы $X_1|L, \dots, X_n|L$ и $Y_1|L, \dots, Y_n|L$ удовлетворяют условиям теорем 1 и 2, а значит

$$\mathbb{E}\operatorname{Vol}_m(\operatorname{conv}(X_1|L, \dots, X_n|L)) \geqslant \mathbb{E}\operatorname{Vol}_m(\operatorname{conv}(Y_1|L, \dots, Y_n|L)),$$

что завершает доказательство следствия 1.

§7. Доказательство теоремы 3

В данном разделе введем для удобства обозначение $|\cdot| = \operatorname{Vol}_1(\cdot)$. Заметим, что в силу симметрии

$$\mathbb{E}\,|\operatorname{conv}(X_1, \dots, X_n)|^k = \frac{1}{2^n}\,\mathbb{E}\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 X_1, \dots, \varepsilon_n X_n)|^k.$$

Докажем, что неравенство

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 X_1, \dots, \varepsilon_n X_n)|^k \geqslant \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 Y_1, \dots, \varepsilon_n Y_n)|^k \tag{13}$$

выполнено почти наверное, откуда будет следовать утверждение теоремы.

Рассмотрим случайные величины $W_1 \geqslant \dots \geqslant W_n \geqslant 0$ – порядковые статистики $|X_i|$, то есть $W_i = |X|_{(n+1-i)}$. Аналогично определим последовательность $Z_1 \geqslant \dots \geqslant Z_n \geqslant 0$ равенствами $Z_i = |Y|_{(n+1-i)}$.

Заметим, что в силу того, что для любого индекса $|X_i| \geqslant |Y_i|$, имеем $W_i \geqslant Z_i$. Кроме того,

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 X_1, \dots, \varepsilon_n X_n)|^k = \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 W_1, \dots, \varepsilon_n W_n)|^k$$

и

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 Y_1, \dots, \varepsilon_n Y_n)|^k = \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 Z_1, \dots, \varepsilon_n Z_n)|^k.$$

Таким образом, достаточно доказать, что почти наверное выполнено неравенство

$$\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 W_1, \dots, \varepsilon_n W_n)|^k \geqslant \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 Z_1, \dots, \varepsilon_n Z_n)|^k.$$

Рассмотрим сначала слагаемые, для которых существует такой индекс $m < n$, что $\varepsilon_m \neq \varepsilon_1$. Тогда если m – наименьший такой индекс, имеем:

$$\begin{aligned}|\operatorname{conv}(\varepsilon_1 W_1, \dots, \varepsilon_n W_n)|^k &= |\operatorname{conv}(W_1, -W_m)|^k = (W_1 + W_m)^k \\ &\geqslant (Z_1 + Z_m)^k = |\operatorname{conv}(Z_1, -Z_m)|^k = |\operatorname{conv}(\varepsilon_1 Z_1, \dots, \varepsilon_n Z_n)|^k.\end{aligned}$$

Оставшиеся слагаемые разобьем на пары:

$$\begin{aligned}&|\operatorname{conv}(W_1, \dots, W_{n-1}, W_n)|^k + |\operatorname{conv}(-W_1, \dots, -W_{n-1}, W_n)|^k \\ &\quad = (W_1 - W_n)^k + (W_1 + W_n)^k \geqslant (Z_1 - Z_n)^k + (Z_1 + Z_n)^k \\ &\quad = |\operatorname{conv}(Z_1, \dots, Z_{n-1}, Z_n)|^k + |\operatorname{conv}(-Z_1, \dots, -Z_{n-1}, Z_n)|^k,\end{aligned}$$

где неравенство выполнено в силу выпуклости вниз, монотонности функции $f(x) = x^k$ при $k \geqslant 1$ и соотношений

$$W_1 + W_n \geqslant Z_1 + Z_n \geqslant Z_1 - Z_n$$

и

$$(W_1 + W_n) + (W_1 - W_n) = 2W_1 \geqslant 2Z_1 = (Z_1 + Z_n) + (Z_1 - Z_n).$$

Неравенство

$$\begin{aligned}&|\operatorname{conv}(W_1, \dots, W_{n-1}, -W_n)|^k + |\operatorname{conv}(-W_1, \dots, -W_{n-1}, -W_n)|^k \\ &\quad \geqslant |\operatorname{conv}(Z_1, \dots, Z_{n-1}, -Z_n)|^k + |\operatorname{conv}(-Z_1, \dots, -Z_{n-1}, -Z_n)|^k\end{aligned}$$

выполнено в силу симметрии, что завершает доказательство.

Список литературы

1. F. Affentranger, *The expected volume of a random polytope in a ball.* — J. Microsc., **151** (1988), 277–287.
2. L. Devroye, *Nonuniform random variate generation*, New York, Springer, 1986.
3. Z. Kabluchko, D. Temesvari, Ch. Thäle, *Expected intrinsic volumes and facet numbers of random beta-polytopes.* — Math. Nachr. **292**, No. 1 (2019), 79–105.
4. R. E. Miles, *Isotropic random simplices.* — Adv. Appl. Probab. **3** (1971), 353–382.
5. H. Ruben, R. E. Miles, *A canonical decomposition of the probability measure of sets of isotropic random points in* $\mathbb{R}^n$. — J. Multivariate Anal. **10** (1980), 1–18.
6. R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory.* — Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 151, Cambridge University Press, 2014.
7. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Berlin, Springer, 2008.
8. Т. Д. Мосеева, *Средний объем смешанных бета-политопов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **535** (2024), 189–199.

Zaporozhets D. N., Moseeva T. D. Monotonicity of expected volumes of random polytopes.

We consider a random polytope in $\mathbb{R}^d$ whose vertices are distributed according to a beta distribution. It is shown that, as the parameters of the beta distribution increase, the expected volume of the polytope decreases. If the number of vertices does not exceed $d + 1$ (the simplex case), the same monotonicity holds for all positive integer moments of the volume. The results are extended to a broader class of distributions satisfying a stochastic domination condition for the radial components.

Поступило 17 ноября 2025 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: zap1979@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: polezina@yandex.ru