Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

М. С. Ермаков

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПО БАХАДУРУ В ЗОНЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ

§1. Введение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, заданное на вероятностном пространстве $(S, \mathcal{B})$. Множество $\boldsymbol{\Theta}$ является открытым ограниченным подмножеством $\mathbf{R}^d$. Значение параметра $\boldsymbol{\theta}$ неизвестно. Нас интересуют нижние границы асимптотической эффективности оценок параметра $\boldsymbol{\theta}$.

Существуют два способа задания нижних границ асимптотической эффективности в статистическом оценивании. Один из них задание локально асимптотически минимаксной нижней границы. В этой постановке задачи указывается нижняя граница асимптотики максимума риска статистических оценок для любой сколь угодно малой окрестности истинного значения параметра. Такая нижняя граница асимптотической эффективности не дает точной информации о поведении риска статистической оценки при конкретном значении параметра. Локально асимптотически минимаксная нижняя граница Гайека–Ле Кама [15, 16, 18, 24] указывает нижнюю границу асимптотической эффективности для оценок $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$, отклоняющихся от истинного значения параметра $\boldsymbol{\theta}$ на величину порядка $n^{-1/2}$. Локально асимптотически минимаксные нижние границы рисков в зоне вероятностей больших уклонений были получены Пухальским и Спокойным [21].

Нижняя граница асимптотической эффективности по Бахадуру [1, 2, 3, 16], доказанная для вероятностей больших уклонений статистических оценок, устанавливает нижние границы рисков статистических оценок в каждой конкретной точке возможных значений параметра.

Ключевые слова: эффективность по Бахадуру, большие уклонения, умеренные уклонения.

Исследование было поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500008-1).

При этом предполагается только состоятельность оценок. В доверительном оценивании уровень значимости мал. Это обуславливает интерес к изучению вероятностей больших и умеренных уклонений статистических оценок.

В зоне вероятностей умеренных уклонений можно находить нижние границы асимптотической эффективности, как в локально асимптотически минимаксной постановке, так и в постановке задачи Бахадура. Локально асимптотически минимаксные границы рисков статистических оценок в зоне вероятностей умеренных уклонений были установлены в работах [6, 7, 10, 23]. Для логарифмической асимптотики локально асимптотически минимаксные нижние границы вероятностей умеренных уклонений были найдены при тех же предположениях [6, 7, 23], при которых была получена нижняя граница асимптотической эффективности Гайека–Ле Кама [15, 18, 16, 24]. Для точной асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистических оценок нижняя граница асимптотически минимаксного риска была получена при не очень сильных дополнительных предположениях [7, 10].

Цель настоящей работы – получить аналог нижней границы для асимптотической эффективности по Бахадуру в зоне вероятностей умеренных уклонений при условиях, при которых была установлена нижняя граница асимптотической эффективности Гайека–Ле Кама. Отметим, что применение метода доказательства Бахадура даже для получения нижней границы локальной асимптотической эффективности по Бахадуру ведет к существенным дополнительным условиям [13, 16]. В тоже время такая граница является частным случаем нижней границы асимптотической эффективности в зоне вероятностей умеренных уклонений, установленной в настоящей работе. Для $\mathbf{\Theta} \subset \mathbf{R}^1$ мы также находим одностороннюю нижнюю границу асимптотической эффективности отдельно для вероятностей отклонений оценок по каждую сторону внешности доверительного интервала. Получен и многомерный аналог этих “односторонних” нижних границ.

Работа организована следующим образом. Все нижние границы для параметрического оценивания собраны в §2. В подразделе 2.1 мы вводим условие, при которых они получены. Оно совпадает с условием, при котором установлена локально асимптотически минимаксная граница риска Гайека–Ле Кама статистических оценок. В подразделе 2.2

для полноты изложения и лучшего понимания дальнейших результатов приводится доказательство локально асимптотически минимаксной границы риска для вероятностей умеренных уклонений статистических оценок. В подразделе 2.3 найдена нижняя граница асимптотической эффективности по Бахадуру статистических оценок в зоне вероятностей умеренных уклонений для независимых одинаково распределенных наблюдений. Из нее следует нижняя граница для локальной асимптотической эффективности по Бахадуру. В подразделе 2.4 мы распространяем результаты на случай независимых неодинаково распределенных наблюдений. В подразделе 2.5 мы показываем, что аналогичные результаты справедливы для задачи оценивания параметра сигнала в гауссовском белом шуме. В подразделе 2.6 дано обобщение нижних границ асимптотической эффективности статистических оценок по Бахадуру на многомерный случай, охватывающий "односторонние" нижние границы. Мы показываем, что его доказательство практически ничем не отличается от доказательства традиционных нижних границ асимптотической эффективности по Бахадуру [3, 16]. В §3 мы распространяем эти результаты на задачу оценивания значений дифференцируемых статистических функционалов. В §4 показывается, что локальная асимптотическая эффективность по Бахадуру является частным случаем асимптотической эффективности по Бахадуру в смысле вероятностей умеренных уклонений.

Мы используем буквы c и C для обозначения положительных постоянных. В случае многомерного параметра $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$, $d > 1$, условимся обозначать векторы и вектор-функции жирными буквами $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\phi}, \dots$. Для $\Theta \subset \mathbf{R}^1$ для аналогичных обозначений мы будем использовать обычные буквы $\theta, \tau, \phi, \dots$. Для вектора $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^d$ обозначим $\boldsymbol{\tau}^T$ транспонированный вектор. Обозначим $\mathbf{1}(A)$ индикатор события A. Для любых двух последовательностей положительных чисел a_n и b_n, $a_n = o(b_n)$ означает $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

§2. Основные результаты

2.1. Основное условие. Предположим, что вероятностные меры $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, абсолютно непрерывны относительно меры ν, заданной на той же самой σ-алгебре $\mathcal{B}$ множества S, и имеют плотности

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{d\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}}{d\nu}(x), \quad x \in S.$$

Для любых $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ обозначим соответственно $\mathbf{P}^a_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_0}$ и $\mathbf{P}^s_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}_0}$ абсолютно непрерывную и сингулярную компоненту вероятностной меры $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$ относительно вероятностной меры $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}$.

Для любых $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Theta}$ определим функцию $g(x, \boldsymbol{\tau})$, равную

$$g(x, \boldsymbol{\tau}) = g(x, \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\tau}) = \Big(\frac{f(x, \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\tau})}{f(x, \boldsymbol{\theta}_0)} \Big)^{1/2} - 1$$

для всех x из носителя $\mathbf{P}^a_{\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}_0}$ и равную нулю в противном случае.

Скажем, что статистический эксперимент $\mathcal{E} = \{(S, \mathcal{B}), \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ имеет конечную информацию Фишера в точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$, если существует вектор-функция $\boldsymbol{\phi} : S \to \mathbf{R}^d$, такая что при $\boldsymbol{\tau} \to 0$ имеет место

$$\int\limits_S (g(x, \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\phi}(x)\,)^2 \, d\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0} = o(|\boldsymbol{\tau}|^2), \quad \mathbf{P}^s_{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\tau}}(S) = o(|\boldsymbol{\tau}|^2) \qquad (2.1)$$

и матрица

$$I(\boldsymbol{\theta}_0) = 4 \int\limits_S \boldsymbol{\phi}\, \boldsymbol{\phi}^T \, d\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}$$

положительно определена.

Матрица $I(\boldsymbol{\theta}_0)$ называется информационной матрицей Фишера.

Мы будем изучать вероятности умеренных уклонений статистических оценок для зон уклонений, задаваемых последовательностями $u_n > 0$, $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$.

Мы доказываем нижние границы асимптотической эффективности по Бахадуру в некоторой фиксированной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$. Мы будем опускать индекс $\boldsymbol{\theta}_0$ в символах $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ и $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}$.

2.2. Локально асимптотически минимаксная граница рисков. Локально асимптотически минимаксная нижняя граница рисков в зоне вероятностей умеренных уклонений не требует никаких условий состоятельности статистических оценок.

Теорема 2.1. *Пусть $d = 1$ и пусть статистический эксперимент имеет конечную информацию Фишера в точках $\theta \in \Theta$. Тогда для любой оценки $\widehat{\theta}_n$ для точек $\theta_0, \theta_n = \theta_0 + 2u_n \in \Theta$, имеет место*

$$\liminf_{n \to \infty} \sup_{\theta = \theta_0, \theta_n} (nu_n^2 I(\theta)/2)^{-1} \log \mathbf{P}_\theta(\,|\widehat{\theta}_n - \theta| > u_n) \geqslant -1. \qquad (2.2)$$

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_n : \theta = \theta_0 + v_n$, $v_n = 2u_n$.

Для критерия K_n обозначим $\alpha(K_n)$ и $\beta(K_n)$ соответственно вероятности ошибок первого и второго рода критерия K_n. В силу теоремы 2.2 в [7], если статистический эксперимент имеет конечное информационное количество Фишера, то для любого критерия K_n, такого что $\alpha(K_n) < c < 1$ и $\beta(K_n) < c < 1$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \, (nv_n^2 I(\theta_0))^{-1/2}(|2\log\alpha(K_n)|^{1/2} + |2\log\beta(K_n)|^{1/2}) \leqslant 1. \qquad (2.3)$$

Доказательство (2.3) в [7] базируется на том факте, что, в силу леммы Неймана–Пирсона, (2.3) справедливо для нормального распределения и некотором варианте утверждения о локальной асимптотической нормальности отношения правдоподобия в зоне вероятностей умеренных уклонений.

Возьмем в качестве критерия $K_n = K_n(X_1,\dots,X_n) = \mathbf{1}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 > u_n)$. Имеем

$$\alpha(K_n) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_0}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0| > u_n) \qquad (2.4)$$

и

$$\begin{aligned}\beta(K_n) &= \mathbf{P}_{\theta_n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 < u_n)\\ &= \mathbf{P}_{\theta_n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 - 2u_n < -u_n) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_n}(|\widehat{\theta}_n - \theta_n| > u_n).\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Из (2.3)–(2.5) получаем (2.2). □

2.3. Эффективность по Бахадуру в зоне вероятностей умеренных уклонений. Независимые одинаково распределенные случайные наблюдения. Скажем,что оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(X_1,\dots,X_n)$ параметра $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ является u_n-состоятельной, если для любого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ найдется такая ее окрестность U, что для любого $\delta > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{\theta}\in U} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\,|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}| > \delta u_n) = 0.$$

Приведем аналог нижней границы эффективности по Бахадуру в зоне вероятностей умеренных уклонений в одномерном случае: $d = 1$.

Теорема 2.2. *Пусть статистический эксперимент имеет конечную информацию Фишера в точках $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$. Пусть оценка $\widehat{\theta}_n$ u_n-состоятельна. Тогда для любой точки $\theta_0 \in \Theta$ имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty} (nu_n^2 I(\theta)/2)^{-1} \, \log \mathbf{P}(\,|\widehat{\theta}_n - \theta_0| > u_n) \geqslant -1. \qquad (2.6)$$

Более того

$$\liminf_{n\to\infty} (nu_n^2 I(\theta)/2)^{-1} \, \log \mathbf{P}(\,\widehat{\theta}_n - \theta_0 > u_n) \geqslant -1. \qquad (2.7)$$

Приведем многомерный аналог теоремы 2.2. Отличительной чертой последующих теорем 2.3 и 2.4 по сравнению с теоремой Гайека–Ле Кама является тот факт, что они показывают, что асимптотические эффективности по различным направлениям различны.

Теорема 2.3. *Пусть статистический эксперимент имеет конечную информационную матрицу Фишера в точках* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$. *Пусть оценка* $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ u_n*-состоятельна. Тогда для любой точки* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ *и для любого открытого множества* $V \subset \mathbf{R}^d$ *имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty}(nu_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}(\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \in u_n V) \geqslant -\frac{1}{2}\inf_{\boldsymbol{\tau}\in V}\boldsymbol{\tau}^T I(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\tau}. \tag{2.8}$$

Случай $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$ аналогичен случаю $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$ и также сводится к задачам оценивания параметра на двух удаленных точках.

Оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ называется состоятельной, если для любого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\,|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0| > \varepsilon) = 0.$$

Теорема 2.4. *Пусть статистический эксперимент имеет конечную информацию Фишера в точках* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$. *Пусть оценка* $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ *состоятельна. Тогда для любого открытого множества* $V \subset \mathbf{R}^d$ *справедлива нижняя граница локальной асимптотической эффективности по Бахадуру*

$$\liminf_{u\to 0}\lim_{n\to\infty}(nu^2)^{-1}\log\mathbf{P}(\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \in uV) \geqslant -\frac{1}{2}\inf_{\boldsymbol{\tau}\in V}\boldsymbol{\tau}^T I(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\tau}. \tag{2.9}$$

Доказательство нижней границы для локальной асимптотической эффективности по Бахадуру методом Бахадура требует введения дополнительных условий регулярности семейства вероятностных мер $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ (теорема 9.3 главы 1 в [16], а также замечание к нижней границе (1.6) по Бахадуру в [15] и посвященная этому вопросу работа [13]).

Доказательство теоремы 2.4. Рассуждения проведем для $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$.

Возьмем точки θ_0 и $\theta_u = \theta_0 + r\,u \in \Theta$, $r > 1$, $u > 0$. Используя состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$, получаем

$$\lim_{u\to 0}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 > u) = 0$$

и

$$\lim_{u\to 0}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{\theta_u}(\widehat{\theta}_n - \theta_u < (r-1)u) = 0.$$

Следовательно, для любой последовательности $u_k > 0$, $u_k \to 0$ при $k \to \infty$, найдется последовательность n_{0k}, $n_{0k}u_k^2 \to \infty$ при $k \to \infty$, такая что для любой последовательности $n_k > n_{0k}$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(\widehat{\theta}_{n_k} - \theta_0 > u_k) = 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}_{\theta_{u_k}}(\widehat{\theta}_{n_k} - \theta_{u_k} < (r-1)u_k) = 0,$$

а это как раз те ключевые неравенства, которые используются при доказательстве теоремы 2.4 (см. доказательство теорем 2.2, 2.3 и 4.1). Мы опустим дальнейшие рассуждения. □

Отметим, что требование (2.1) дифференцируемости функции g в $\mathbf{L}_2$ можно заменить более слабыми условиями (2.5)–(2.7) в [7] на поведение самой функции g.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_n : \theta = \theta_0 + v_n$, $v_n = ru_n$, $r > 1$. Возьмем в качестве критерия

$$K_n = K_n(X_1, \ldots, X_n) = \mathbf{1}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0| > u_n).$$

Поскольку оценка $\widehat{\theta}_n$ u_n-состоятельна, то мы можем применить (2.3) и получить

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(nv_n^2\, I(\theta_0))^{-1/2}(|2\log \mathbf{P}_{\theta_0}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0| > u_n)|^{1/2} \\ + |2\log \mathbf{P}_{\theta_0+v_n}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0| < u_n)|^{1/2}) \leqslant 1.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}(nr^2u_n^2 I(\theta_0))^{-1/2}(|2\log \mathbf{P}_{\theta_0}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0| > u_n)|^{1/2} \leqslant 1, \tag{2.11}$$

а так как $r > 1$ произвольно, то отсюда следует (2.6).

Неравенство (2.7) доказывается аналогично. Достаточно применить (2.3) к критерию $K_n = \mathbf{1}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 > u_n)$. Так как оценка $\widehat{\theta}_n$ u_n-состоятельна, то найдется такое n_0, что для $n > n_0$

$$\alpha(K_n) \leqslant \mathbf{P}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0| > u_n) < c < 1$$

и

$$\begin{aligned}\beta(K_n) &= \mathbf{P}_{\theta_0+v_n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 \,<\, u_n)\\ &= \mathbf{P}_{\theta_0+v_n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0 - v_n \,<\, u_n - v_n)\\ &\leqslant \mathbf{P}_{\theta_0+v_n}(|\widehat{\theta}_n - \theta_0 - v_n| \,>\, (r-1)u_n) < c < 1.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Следовательно, написав неравенства аналогичные (2.10) и (2.11), мы получаем (2.7). □

Доказательство теоремы 2.3. Обозначим $\mathrm{cl}(V)$ – замыкание множества V. Не умаляя общности, можно считать, что $0 \notin \mathrm{cl}(V)$.

Пусть $\boldsymbol{\tau}_0 \in \mathrm{cl}(V)$ и пусть

$$e \doteq \boldsymbol{\tau}_0^T I(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\tau}_0 = \inf_{\boldsymbol{\tau}\in V} \boldsymbol{\tau}^T I(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau}. \tag{2.13}$$

Для наглядности проведем дальнейшие рассуждения для случая, когда $I(\boldsymbol{\theta}_0)$ – единичная матрица и $e = 1$.

Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое $\boldsymbol{\tau}_1 \in V$, что $|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_0| < \delta$. Найдется $\lambda > 0$ и шар $B(\boldsymbol{\tau}_1, \lambda) \subset V$ с центром в $\boldsymbol{\tau}_1$ и радиусом λ. Найдется такое $r_0 > 1$, что для $1 < r < r_0$ $B(r\boldsymbol{\tau}_1, (r-1)/2) \subset B(\boldsymbol{\tau}_1, \lambda)$, где $B(r\boldsymbol{\tau}_1, (r-1)/2)$ – шар радиуса $(r-1)/2$ с центром $r\boldsymbol{\tau}_1$.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ против альтернатив $H_n : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}_0 + v_n$, где $v_n = ru_n\boldsymbol{\tau}_1$.

Зададим критерий $K_n = \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \in u_nV\}$ проверки гипотезы.

Тогда

$$\alpha(K_n) \leqslant \mathbf{P}(|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0| > u_n) < c < 1$$

и

$$\begin{aligned}\beta(K_n) &= \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \notin u_nV) \leqslant \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_n \notin u_nV - v_n)\\ &\leqslant \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_n \notin B(0, u_n(r-1)/2)) < c < 1,\end{aligned}$$

так как множество $u_nV - v_n$ содержит шар $B(0, \lambda.u_n)$. Таким образом, мы можем применить (2.3).

Дальнейшие рассуждения по существу совпадают с рассуждениями доказательства теоремы 2.3 и опускаются. □

2.4. Эффективность по Бахадуру в зоне вероятностей умеренных уклонений. Независимые неоднородные случайные наблюдения. Пусть независимые случайные величины $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ заданы на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, S, \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta} ni})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. Множество $\boldsymbol{\Theta}$ является открытым множеством в $\mathbf{R}^d$.

Предположим, что вероятностные меры $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta} ni}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, абсолютно непрерывны относительно некоторой вероятностной меры ν и имеют плотности распределения

$$f_{ni}(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{d\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta} ni}}{d\,\nu}.$$

Для $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Theta}$ определим функции

$$g_{ni}(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\tau}) = f_{ni}^{1/2}(x, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\tau}) f_{ni}^{-1/2}(x, \boldsymbol{\theta}) - 1$$

для всех x из носителя $\mathbf{P}^a_{\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, ni}$ и равные нулю в противном случае.

Скажем, что статистические эксперименты

$$\Xi_{ni} = \{(S, \mathcal{B}), \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta} ni},\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

имеют конечные информации Фишера в точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$, если существуют вектор-функции $\boldsymbol{\phi}_{ni} : S \to \mathbf{R}^d$, такие что при $\boldsymbol{\tau} \to 0$ имеет место

$$\begin{aligned} \int\limits_S (g_{ni}(x, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\phi}_{ni}(x, \boldsymbol{\theta}))^2\, d\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta} ni} = o(|\boldsymbol{\tau}|^2), \\ \mathbf{P}^s_{\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, ni}(S) = o(|\boldsymbol{\tau}|^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

и положительно определены матрицы

$$I_{ni}(\theta) = 4 \int\limits_S \boldsymbol{\phi}_{ni}(x, \theta)\, \boldsymbol{\phi}^T_{ni}(x, \boldsymbol{\theta})\, d\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta} ni},$$

называемые информационными матрицами Фишера.

Обозначим

$$\Upsilon_n(\theta) = \sum_{i=1}^n I_{ni}(\boldsymbol{\theta}).$$

Пусть $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$. Пусть $u_n \to 0$ и $u_n^2 \Upsilon_n(\theta_0) \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_n : \theta = \theta_0 + u_n$.

Теорема 2.5. *Пусть статистические эксперименты Ξ_{ni}, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеют конечные информационные количества Фишера. Пусть*

$$\sup_{|u| \leqslant u_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\,[(\phi_{ni}(X_{ni}, \theta_0 + u) - \phi_{ni}(X_{ni}, \theta_0))^2] = o(\Upsilon_n(\theta_0)) \tag{2.15}$$

при $n \to \infty$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено условие типа Линдеберга

$$\lim_{n\to\infty} \Upsilon_n(\theta_0)^{-1}\mathbf{E}\left[\phi_{ni}^2(X_{ni},\theta_0)\,\mathbf{1}\Big(|\phi_{ni}(X_{ni},\theta_0)| > \varepsilon u_n^{-1}\Big)\right] = 0. \tag{2.16}$$

Тогда для любого критерия K_n, такого что $\alpha(K_n) < c < 1$ и $\beta(K_n) < c < 1$, справедливо

$$\limsup_{n\to\infty} (u_n^2\Upsilon_n(\theta_0))^{-1/2}(|2\log\alpha(K_n)|^{1/2} + |2\log\beta(K_n)|^{1/2}) \leqslant 1. \tag{2.17}$$

Сделаем следующее предположение.

D. Найдутся такие постоянные c, C и натуральное число n_0, что для любого $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$ для $n > n_0$ справедливо

$$0 < c < \frac{\boldsymbol{e}_1^T\Upsilon_n(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_2^T\Upsilon_n(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{e}_2} < C$$

для любых двух единичных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbf{R}^d$.

Теорема 2.6. *Пусть $\mathbf{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$. Пусть выполнено условие **D** и пусть статистические эксперименты Ξ_{ni}, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеют конечные информационные количества Фишера. Пусть $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор из $\mathbf{R}^d$. Пусть $u_n > 0$, $u_n \to 0$, $u_n^2\,\boldsymbol{e}^T\Upsilon_n(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{e} \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть для некоторого $c > 2$ справедливо*

$$\begin{aligned}\sup_{|u|<c\,u_n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\,[\,(\boldsymbol{\phi}_{ni}^T(X_{ni},\boldsymbol{\theta}_0+u)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\phi}_{ni}^T(X_{ni},\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{e})^2\,]\\ = o(\boldsymbol{e}^T\Upsilon_n(\theta_0)\boldsymbol{e})\end{aligned} \tag{2.18}$$

при $n \to \infty$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено условие типа Линдеберга

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{e}^T\Upsilon_n(\theta_0)\boldsymbol{e})^{-1}\sum_{i=1}^n\mathbf{E}\Big[(\boldsymbol{\phi}_{ni}^T(X_{ni},\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{e})^2\\ \times\mathbf{1}\Big(|\boldsymbol{\phi}_{ni}^T(X_{ni},\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{e}| > \varepsilon u_n^{-1}\Big)\Big] = 0.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Тогда для любой оценки $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ для точек $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_n = \boldsymbol{\theta}_0 + 2u_n\boldsymbol{e} \in \Theta$ справедливо

$$\liminf_{n\to\infty}\sup_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\theta}_n}(u_n^2\boldsymbol{e}^T\Upsilon_n(\theta_0)\boldsymbol{e}/2)^{-1}\log\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\,|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}| > u_n) \geqslant -1. \tag{2.20}$$

Предположим дополнительно, что $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ – u_n*-состоятельная оценка параметра* $\boldsymbol{\theta}$*, а также что условия* (2.19), (2.20) *выполнены для любого единичного вектора* $\boldsymbol{e} \in \mathbf{R}^d$*. Тогда для любого открытого множества* $V \subset \mathbf{R}^d$ *справедливо*

$$\liminf_{n\to\infty} (u_n^2\, \boldsymbol{\tau}_n^T \Upsilon_n(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\tau}_n/2)^{-1} \log \mathbf{P}(\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \in u_n V) \geqslant -1, \tag{2.21}$$

где векторы $\boldsymbol{\tau}_n \in \mathrm{cl}(V)$ *задаются соотношением*

$$\boldsymbol{\tau}_n^T \Upsilon_n(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\tau}_n = \inf_{\boldsymbol{\tau}\in V} \boldsymbol{\tau}^T \Upsilon_n(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{\tau}. \tag{2.22}$$

Ясно, что из теоремы 2.6 следует аналог теоремы 2.4 о нижней границе для локальной асимптотической эффективности по Бахадуру.

Замечание 2.1. Заметим, что условия (2.15) и (2.18) могут быть заменены соответственно на условия

$$\sup_{|u|<cu_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\,(g_{ni}(X_{ni},u) - u\phi_{ni}(X_{ni},\theta_0))^2 = o(|u_n|^2\, \Upsilon_n(\theta_0))$$

и

$$\sup_{|u|<cu_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(g_{ni}(X_{ni},\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\theta}_0+u\boldsymbol{e}) - u\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{\phi}_{ni}(X_{ni},\boldsymbol{\theta}_0))^2 = o(|u_n|^2 \boldsymbol{e}^T \Upsilon_n(\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{e})$$

при $n\to\infty$.

Теорема 2.6 доказывается на основе теоремы 2.5 в точности так же, как доказывались теоремы 2.1–2.3 на основе нижней границы (2.3).

Доказательство теоремы 2.5. Рассуждения в основном повторяют доказательство аналогичных утверждений теоремы 2.1 в [8] и теоремы 2.2 в [12].

Для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\varepsilon > 0$ определим события

$$A_{ni} = A_{ni}(\varepsilon) = \{X_i : |u\phi_{ni}(X_{ni})| > \varepsilon\}, \quad D_{ni} = D_{ni}(\varepsilon) = \{X_i : |g_{ni}(X_{ni})| > \varepsilon\}.$$

Применяя неравенство Чебышёва и используя (2.16), получаем

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_{ni}) \leqslant \varepsilon^2 u^2 \sum_{i=1}^n \int_S \phi_{ni}^2(x,\theta_0) \mathbf{1}\Big(|\phi_{ni}(x,\theta_0)| > \varepsilon u_n^{-1}\Big)\, d\mu = o(u_n^2 \Upsilon_n). \tag{2.23}$$

Применяя (2.23), получаем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(D_{ni}) &\leqslant \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_{ni}(\varepsilon/2))\\ &+\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|g_{ni}(X_{ni},u_n)-u_n\phi_{ni}(X_{ni})|>\varepsilon/2)=o(u_n^2\Upsilon_n(\theta_0)),\end{aligned}\tag{2.24}$$

так как в силу неравенства Чебышёва и последней оценки в доказательстве леммы 3.1 главы 1 в [16] справедливо

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|g_{ni}(X_{ni},u_n)-u_n\phi_{ni}(X_{ni})|>\varepsilon/2)\\ &\leqslant 4\varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(g_{ni}(X_{ni},u_n)-u_n^T\boldsymbol{\phi}_{ni}(X_{ni}))^2=o(u_n^2\Upsilon_n(\theta_0)).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Для любого события A обозначим $\bar{A}$ дополнение к нему.

Определим событие $U_n=(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_{ni})\cap(\bigcap_{i=1}^n \bar{D}_{ni})$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(U_n)&=\prod_{i=1}^n(1-\mathbf{P}(A_{ni}))\prod_{i=1}^n(1-\mathbf{P}(D_{ni}))\\ &\geqslant \exp\Big\{-\sum_{i=1}^n(\mathbf{P}(A_{ni})+\mathbf{P}(D_{ni}))\Big\}=\exp\{-o(nu_n^2)\}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Для любых событий A и B обозначим $\mathbf{P}(A|B)$ условную вероятность события A при условии, что произошло событие B.

Обозначим

$$\log L_n=\sum_{i=1}^n \log\Big(\frac{f_{ni}(X_{ni},\theta_0+u_n)}{f_{ni}(X_{ni},\theta_0)}\Big).$$

Теорема 2.5 вытекает из (2.26) и леммы 2.1.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Тогда для любой последовательности* δ_n, $0<\delta_n<1$, $\delta_n u_n\Upsilon_n^{1/2}(\theta_0)\to\infty$ *при* $n\to\infty$, *и для любой последовательности* C_n, *такой что*

$$-(1-\delta_n)u_n\Upsilon_n^{1/2}(\theta_0)/2<C_n,$$

имеет место

$$\begin{aligned}\log \mathbf{P}(u_n^{-1}\Upsilon_n^{-1/2}(\theta_0)\log L_n > C_n \,|\, U_n)\\ = -\frac{(C_n + u_n\Upsilon_n^{1/2}(\theta_0)/2)^2}{2}(1+o(1)).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Для любой последовательности δ_n, $0 < \delta_n < 1$, $\delta_n u_n \Upsilon_n^{1/2}(\theta_0) \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *и любой последовательности* C_n, *такой что* $C_n < (1 - \delta_n)u_n\Upsilon_n^{1/2}(\theta_0)/2$, *спрааедливо*

$$\begin{aligned}\log \mathbf{P}_{\theta_0+u_n}(u_n^{-1}\Upsilon_n^{-1/2}(\theta_0)\log L_n < C_n \,|\, U_n)\\ = -\frac{(u_n\Upsilon_n^{1/2}(\theta_0)/2 - C_n)^2}{2}(1+o(1))\end{aligned}\tag{2.28}$$

при $n \to \infty$.

Если произошло событие U_n, доказательство (2.27) и (2.28) практически совпадает с доказательством теоремы 2.2 в [12]. Мы опустим эти рассуждения. □

2.5. Нижняя граница для задачи оценивания параметра сигнала в гауссовском белом шуме. Для задач оценивания и проверки гипотез о параметре сигнала в гауссовском белом шуме нами были получены в [11] нижние границы асимптотической эффективности в зоне вероятностей умеренных уклонений, аналогичные (2.2) и (2.3) соответственно. Таким образом, в [11] нижняя граница для асимптотически минимаксной постановки задачи оценивания была доказана. В то же время аналог нижней границы (2.3) для задачи проверки гипотез позволяет доказать и нижнюю границу эффективности по Бахадуру для оценивания сигнала в зоне вероятностей умеренных уклонений.

Рассмотрим задачу оценивания параметра $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$ сигнала $S(t,\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{L}_2(0,1)$ по реализации случайного процесса $Y_\varepsilon(t)$, $t \in [0,1)$, $\varepsilon > 0$. Случайный процесс Y_ε задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_\varepsilon(t) = S(t,\boldsymbol{\theta})\,dt + \varepsilon\,dw(t).\tag{2.29}$$

Здесь $dw(t)$ – гауссовский белый шум.

Предположим, что для любого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ сигнал $S(t,\boldsymbol{\theta})$ дифференцируем в $\mathbb{L}_2(0,1)$ по $\boldsymbol{\theta}$ в точке $\boldsymbol{\theta}_0$, то есть найдется такая вектор-функция

$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\theta}}(t,\boldsymbol{\theta}_0) : [0,1) \to \mathbf{R}^d$, что

$$\int_0^1 (S(t,\boldsymbol{\theta}) - S(t,\boldsymbol{\theta}_0) - \boldsymbol{S}_\theta^T(t,\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0))^2\,dt = o(|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0|^2)$$

при $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}_0$.

Информационная матрица Фишера равна

$$I(\boldsymbol{\theta}_0) = \int_0^1 \boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{\theta}_0)\boldsymbol{S}^T(t,\boldsymbol{\theta}_0)\,dt.$$

Мы будем говорить, что статистический эксперимент имеет конечную информацию Фишера, если информационные матрицы Фишера положительно определены и справедливо (2.29).

Для зоны вероятностей умеренных уклонений все доказательства нижних границ асимптотической эффективности по Бахадуру в задачах оценивания параметра сигнала базируются на следующем аналоге неравенства (2.3) для задачи проверки гипотез, доказанном в [11]. Мы его приведем в одномерном случае.

Пусть дана последовательность $u_\varepsilon > 0$ и $u_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^{-1} u_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_\varepsilon : \theta = \theta_0 + u_\varepsilon$. Для критериев K_ε, $\varepsilon > 0$ обозначим $\alpha(K_\varepsilon)$ и $\beta(K_\varepsilon)$ соответственно их вероятности ошибок первого и второго рода. В силу теоремы 2.1 в [11], для любого критерия K_ε, такого что $\alpha(K_\varepsilon) < c < 1$ и $\beta(K_\varepsilon) < c < 1$, справедливо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon u_\varepsilon^{-1} I^{-1/2}(\theta_0)(|2\log\alpha(K_\varepsilon)|^{1/2} + |2\log\beta(K_\varepsilon)|^{1/2}) \leqslant 1. \qquad (2.30)$$

Неравенства (2.3) и (2.30) совпадают, если положить $\varepsilon = n^{-1/2}$, что позволяет практически идентично сформулировать аналоги теорем 2.2–2.4. Покажем это на примере теоремы 2.3.

Скажем, что оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon$ параметра $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ является u_ε-состоятельной, если для любого $\boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ найдется такая ее окрестность U, что для любого $\delta > 0$ справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\boldsymbol{\theta}\in U} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\,|\widehat{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon - \boldsymbol{\theta}| > \delta u_\varepsilon) = 0.$$

Теорема 2.7. *Пусть статистический эксперимент имеет конечную информацию Фишера в точках* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$. *Пусть оценка* $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon$

является u_ε-состоятельной. Тогда для любого ограниченного открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$ справедлива нижняя граница локальной асимптотической эффективности по Бахадуру

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 u_\varepsilon^{-2} \log \mathbf{P}_{\boldsymbol\theta}(\widehat{\boldsymbol\theta}_\varepsilon - \boldsymbol\theta \in u_\varepsilon V) \geqslant -\frac{1}{2} \inf_{\boldsymbol\tau\in V} \boldsymbol\tau^T I(\boldsymbol\theta)\boldsymbol\tau.$$

2.6. Многомерная нижняя граница асимптотической эффективности по Бахадуру. Ниже мы предлагаем вариант нижней границы асимптотической эффективности по Бахадуру, которая различна в различных направлениях.

Оценка $\widehat{\boldsymbol\theta}_n$ называется состоятельной оценкой параметра $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$, если для любого $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\boldsymbol\theta}(|\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta| > \varepsilon) = 0.$$

Теорема 2.8. *Пусть $\widehat{\boldsymbol\theta}_n$ – состоятельная оценка параметра $\boldsymbol\theta \in \boldsymbol\Theta$. Пусть $\boldsymbol\theta_0 \in \boldsymbol\Theta$. Пусть $\boldsymbol\Omega \subset \mathbf{R}^d$ – открытое множество, такое что $\boldsymbol\theta_0 + \boldsymbol\Omega \subset \boldsymbol\Theta$.*

Тогда для любого $\widetilde{\boldsymbol\theta} \in \boldsymbol\theta_0 + \boldsymbol\Omega$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}_{\theta_0}(\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0 \in \boldsymbol\Omega) \geqslant -\int\limits_S \log \frac{f(x,\widetilde{\boldsymbol\theta})}{f(x,\boldsymbol\theta_0)}\, f(x,\widetilde{\boldsymbol\theta})\, \nu(d\,x). \quad (2.31)$$

Доказательство. Обозначим правую часть (2.31) через $-K$. Положим $\lambda_n = \lambda_n(\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0) = 1$, если $\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0 \in \boldsymbol\Omega$, и $\lambda_n = \lambda_n(\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0) = 0$, если $\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0 \notin \boldsymbol\Omega$.

Положим $r = n(K+\delta)$, $\delta > 0$. Обозначим

$$G_n = G_n(X_1,\dots,X_n,\theta_0,\tilde{\boldsymbol\theta}) = \prod_{j=1}^n \frac{f(X_j,\tilde{\boldsymbol\theta})}{f(X_j,\boldsymbol\theta_0)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{\boldsymbol\theta_0}(\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0 \in \Omega) = \mathbf{E}_{\boldsymbol\theta_0}\lambda_n \\
&\geqslant \mathbf{E}_{\boldsymbol\theta_0}(\lambda_n \mathbf{1}(G_n < \exp\{r\})) \geqslant \exp\{-r\}\mathbf{E}_{\tilde{\boldsymbol\theta}}\Big\{\lambda_n \mathbf{1}(G_n < \exp\{r\})\Big\} \\
&\geqslant \exp\{-r\}\big(\mathbf{P}_{\tilde{\boldsymbol\theta}}(\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0 \in \boldsymbol\Omega) - \mathbf{P}_{\tilde{\boldsymbol\theta}}(G_n > \exp\{r\})\big).
\end{aligned} \quad (2.32)$$

Так как оценка $\widehat{\theta}_n$ состоятельна, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\tilde{\boldsymbol\theta}}(\widehat{\boldsymbol\theta}_n - \boldsymbol\theta_0 \in \Omega) = 1. \quad (2.33)$$

По закону больших чисел имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}\Big(\frac{1}{n}\,|G_n - n\,K| > \delta/2\Big) = 0. \tag{2.34}$$

Из (2.32)–(2.34) следует (2.31). □

§3. Нижняя граница асимптотической эффективности по Бахадуру для вероятностей умеренных уклонений дифференцируемых статистических функционалов

Применим стандартные рассуждения [4, 9, 17, 22, 24] для перехода от нижних границ для асимптотической эффективности в параметрической постановке к аналогичным границам в семипараметрической постановке. Переход основан на выборе наименее благоприятной функции в функциональном пространстве параметров и определения параметрического семейства распределений, для которого эта функция удовлетворяет свойству (2.1). Нижняя граница асимптотической эффективности оценивания для этого параметрического семейства распределений будет давать нижнюю границу аксимптотической эффективности в семипараметрической модели. Здесь мы рассмотрим довольно простую модель семипараметрического оценивания. Так как мы доказываем нижнюю границу асимптотической эффективности для вероятностей умеренных уклонений при тех же самых условиях, что и для нижней границы асимптотической эффективности Гайека–Ле Кама [15, 18, 16, 24], то единственным отличием является определение u_n-состоятельности. Ясно, что это условие должно быть равномерным по параметрам наименее благоприятного семейства распределений.

Пусть $(S, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, Λ – множество вероятностных мер на $(S, \mathcal{B})$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие вероятностную меру $\mathbf{P} \in \Lambda$. Предположим, что имеется априорная информация, что $\mathbf{P} \in \Gamma \subseteq \Lambda$. Пусть задан функционал $T : \Lambda \to \mathbf{R}^1$. Мы хотим оценить значение функционала $T(\mathbf{P})$, когда известно, что $\mathbf{P} \in \Gamma$.

Используем стандартную терминологию (см. [4, 17, 24]). Зафиксируем $\mathbf{P} \in \Gamma$. Обозначим $\Pi(\Gamma, \mathbf{P})$ множество всех отображений $\lambda : u \to \mathbf{P}_u$ интервала $(0, \delta)$ в Γ.

Пусть $\Delta(\Gamma, P)$ – множество всех функций ϕ_λ, $\lambda \in \Pi(\Gamma, \mathbf{P})$, удовлетворяющих (2.1), и пусть $\mathrm{cl}(\Delta(\Gamma, \mathbf{P}))$ – замыкание в $\mathbb{L}_2(\mathbf{P})$ множества $\Delta(\Gamma, \mathbf{P})$. Определим линейное пространство $\mathbb{L}(\Gamma, \mathbf{P})$, как замыкание в $\mathbb{L}_2(\mathbf{P})$ линейного пространства, порожденного функциями $\varphi \in \Delta(\Gamma, \mathbf{P})$. Линейное пространство $\mathbb{L}(\Gamma, \mathbf{P})$ может рассматриваться как касательное подпространство к Γ в точке $\mathbf{P}$ для метрики Хеллингера.

Скажем, что функция $\psi_P \in \mathbb{L}(\Gamma, \mathbf{P})$, $\mathbf{E_P}\,[\psi_\mathbf{P}(X_1)] = 0$, является функцией влияния функционала T на Γ в точке $\mathbf{P} \in \Gamma$, если для всех $\lambda \in \Delta(\Gamma, \mathbf{P})$, справедливо

$$T(\mathbf{P}_u) - T(\mathbf{P}) = u\,\mathbf{E}[\psi_\mathbf{P}(X_1)\,\phi_\lambda(X_1)] + o(u), \quad u \downarrow 0,$$

и $\mathbf{E}[\psi_\mathbf{P}(X_1)\,\phi(X_1)] = 0$ для любой функции $\phi \in \mathbb{L}_2(\mathbf{P})$, ортогональной всем функциям $\phi_\lambda \in \mathrm{cl}(\Delta(\Gamma, \mathbf{P}))$.

Сделаем следующее предположение.

E. Для всех $\mathbf{P} \in \Gamma$ существует функция влияния $\psi_\mathbf{P}$ функционала T на Γ и $\psi_\mathbf{P} \in \bar{\Delta}(\Gamma, \mathbf{P})$. Обозначим $I(\mathbf{P}) = (\mathbf{E}[\psi^2_\mathbf{P}(X_1)])^{-1}$.

Скажем, что оценка $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ значения функционала $T(\mathbf{P})$ является u_n-состоятельной, если для любого $\mathbf{P}_0 \in \Gamma$ и любого $\delta > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{P}\in U} \mathbf{P}(\,|\widehat{\theta}_n - T(\mathbf{P})| > \delta u_n) = 0,$$

для любой окрестности

$$U = U(T, \mathbf{P}_0) = \{\mathbf{P} : |T(\mathbf{P}) - T(\mathbf{P}_0)| < C u_n, \mathbf{P} \in \Gamma\}, \quad C > 3\delta,$$

точки $\mathbf{P}_0 \in \Gamma$.

Теорема 3.1. *Предположим* **E**. *Пусть $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для любой u_n-состоятельной последовательности оценок $\widehat{\theta}_n$ имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty}\,(nu_n^2 I(\mathbf{P})/2)^{-1} \log \mathbf{P}(|\widehat{\theta}_n - T(\mathbf{P})| > u_n) \geqslant -1.$$

Более того, справедливо

$$\liminf_{n\to\infty}(nu_n^2 I(\mathbf{P})/2)^{-1} \log \mathbf{P}(\widehat{\theta}_n - T(\mathbf{P}) > u_n) \geqslant -1.$$

Назовем оценку $\widehat{\theta}_n$ локально равномерно состоятельной, если для любого $\mathbf{P}_0 \in \Gamma$ найдется окрестность

$$U_\varepsilon = U(\varepsilon, T, \mathbf{P}_0) = \{\mathbf{P} : |T(\mathbf{P}) - T(\mathbf{P}_0)| < \varepsilon, \mathbf{P} \in \Gamma\}, \quad \varepsilon > 0,$$

точки $\mathbf{P}_0 \in \Gamma$, такая что для любого $\delta > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{P}\in U_\varepsilon} \mathbf{P}(\,|\widehat{\theta}_n - T(\mathbf{P})| > \delta) = 0.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{E}$. *Тогда для любой локально состоятельной оценки* $\widehat{\theta}_n$, *имеет место*

$$\liminf_{u\to 0} \liminf_{n\to\infty} (n\,u^2\, I(\mathbf{P})/2)^{-1} \log \mathbf{P}(\,|\widehat{\theta}_n - T(\mathbf{P})| > u) \geqslant -1. \tag{3.1}$$

Более того, справедливо

$$\liminf_{u\to 0} \liminf_{n\to\infty} (n\,u^2\, I(\mathbf{P})/2)^{-1} \log \mathbf{P}(\,\widehat{\theta}_n - T(\mathbf{P}) > u) \geqslant -1. \tag{3.2}$$

§4. Асимптотическая эффективность для вероятностей умеренных уклонений и локальная асимптотическая эффективность по Бахадуру

Хотя асимптотическая эффективность по Бахадуру [1, 2, 3] является хорошо известной мерой качества статистических критериев и оценок, ее исследование является довольно трудной технической проблемой [19]. Поэтому оно часто заменяется изучением локальной асимптотической эффективности по Бахадуру (см. [5, 7, 16] и многие другие работы). В [7] мы обратили внимание, что утверждения о локальной асимптотической эффективности по Бахадуру следуют из аналогичных теорем о вероятностях умеренных уклонений. Ниже мы приведем утверждение в явной форме.

В [6, 8] показано, что техника дифференцирования статистических функционалов по Фреше может быть применена к изучению вероятностей умеренных уклонений в той же степени, в какой она применяется для доказательства их асимптотической нормальности [20]. В [14] этот результат был расширен на случай дифференцируемости по Адамару. Таким образом, результаты [6, 8, 14] справедливы также и для постановки задачи локальной эффективности по Бахадуру.

Мы следуем постановке задаче подраздела 2.1.

Пусть стоит задача оценки параметра $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{R}^d$. Скажем, что оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(X_1, \dots, X_n)$ удовлетворяет *принципу умеренных уклонений* с функционалом действия $I : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}_+$, если

i. для всех $L > 0$ множество $\{\boldsymbol{\theta} : I(\boldsymbol{\theta}) < L\}$ компактно, *ii.* для любой последовательности $u_n > 0$, $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$, для произвольного открытого множества $\boldsymbol{G} \subset \mathbf{R}^d$ справедливо

$$\liminf_{n\to\infty} (nu_n^2/2)^{-1} \log \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}*}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \in u_n \boldsymbol{G}) \geqslant - \inf_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{G}} I(\boldsymbol{\theta}),$$

iii. для любой последовательности $u_n > 0$, $u_n \to 0$, $nu_n^2 \to \infty$, для произвольного замкнутого множества $\boldsymbol{F} \subset \mathbf{R}^d$ справедливо

$$\limsup_{n\to\infty} (nu_n^2/2)^{-1} \log \mathbf{P}^*_{\boldsymbol{\theta}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \in u_n F) \leqslant - \inf_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{F}} I(\boldsymbol{\theta}).$$

Здесь $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}*}(A)$ и $\mathbf{P}^*_{\boldsymbol{\theta}}(A)$ обозначают внешнюю и внутреннюю вероятности для множества $A \subset S$.

Скажем, что оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n(X_1, \ldots, X_n)$ удовлетворяет *локальному принципу больших уклонений по Бахадуру* с функционалом действия $I : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}_+$, если

i. для любого $L > 0$ множество $\{\boldsymbol{x} : I(\boldsymbol{x}) < L\}$ компактно,

ii. для любого открытого множества $\boldsymbol{G} \subset \mathbf{R}^d$ справедливо

$$\lim_{u\to 0} \liminf_{n\to\infty} (nu^2/2)^{-1} \log \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}*}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \in u\boldsymbol{G}) \geqslant - \inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{G}} I(\boldsymbol{x}),$$

iii. для любого замкнутого множества $\boldsymbol{F} \subset \mathbf{R}^d$, справедливо

$$\lim_{u\to 0} \limsup_{n\to\infty} (nu^2/2)^{-1} \log \mathbf{P}^*_{\boldsymbol{\theta}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \in u\boldsymbol{F}) \leqslant - \inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}} I(\boldsymbol{x}).$$

Теорема 4.1. *Пусть оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ удовлетворяет принципу умеренных уклонений с функционалом действия I. Тогда оценка $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ удовлетворяет локальному принципу умеренных уклонений по Бахадуру с функционалом действия I.*

Пусть $v_k \to 0$ при $k \to \infty$ – произвольная последовательность положительных чисел. Для доказательства локального принципа больших уклонений по Бахадуру нам достаточно показать, что для всякой подпоследовательности $n_k \to \infty$, $n_k v_k^2 \to \infty$ при $k \to \infty$, имеет место

$$\liminf_{k\to\infty} (n_k v_k^2/2)^{-1} \log \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}*}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{n_k} - \boldsymbol{\theta} \in v_k G) \geqslant - \inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{G}} I(\boldsymbol{x})$$

и

$$\limsup_{k\to\infty} (n_k v_k^2/2)^{-1} \log \mathbf{P}^*_{\boldsymbol{\theta}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{n_k} - \boldsymbol{\theta} \in v_k F) \leqslant - \inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}} I(\boldsymbol{x}).$$

Однако это принцип умеренных уклонений, если положить $u_{n_k} = v_k$.

Список литературы

1. R. R. Bahadur, *Asymptotic efficiency of tests and estimates.* — Sankhyā **22** (1960) 229–252.
2. R. R. Bahadur, *Rates of convergence of estimates and test statistics.* — Ann. Math. Statist. **38**, (1967), 303–324.
3. R. R. Bahadur, J. C. Gupta, S. L. Zabel, *Large deviations of tests and estimates.* — In: Asymptotic Theory of Statistical Tests and Estimation (I. M. Chakravati ed.), 33–64 pp., Academic NY. 1980.
4. P. Bickel, C. Klaassen, Y. Ritov, J. A. Wellner, *Efficient and Adaptive Estimation for the Semiparametric Models*, Baltimore, John Hopkins Univ. Press, 1993.
5. A. Dario, Ya. Yu. Nikitin, *Local efficiency of integrated goodness of fit tests under skew alternatives.* — Statist. Probab. Lett. **117** (2016), 136–143.
6. М. С. Ермаков, *О нижних границах вероятностей умеренно больших уклонений статистических оценок и критериев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **216** (1994), 52–61.
7. М. С. Ермаков, *Асимптотически эффективные статистические выводы для вероятностей умеренных уклонений.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, No. 4 (2003), 622–641.
8. M. S. Ermakov, *Importance sampling for simulation of moderate deviations of statistics.* — Statist. Decis. **25**, No. 4 (2007), 265–284.
9. М. С. Ермаков, *О семипараметрических выводах в зоне вероятностей умеренных уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 129–140.
10. M. S. Ermakov, *The sharp lower bounds of asymptotic efficiency of estimators in the zone of moderate deviation probabilities.* — Electronic J. Statist. **6** (2012), 2150–2184.
11. М. С. Ермаков, *Об асимптотически эффективных статистических выводах о параметре сигнала.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 70–87.
12. М. С. Ермаков, *Локальная асимптотическая нормальность логарифма отношения правдоподобия в зоне вероятностей умеренных уклонений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **525**, (2023), 71–85.
13. J. C. Fu, *On a theorem of Bahadur on rate of convergence of point estimators.* — Ann. Statist. **4** (1973), 745–749.
14. F. Gao, X. Zhao, *Delta method in large deviations and moderate deviations for estimators.* — Ann. Statist. **39** (2011), 1211–1240.
15. J. Hajek, *Local asymptotic minimax and admisibility in estimation.* — In: Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **1**, pp. 175–194, Berkeley, California Univ. Press., 1972.
16. I. A. Ibragimov, R. Z. Hasminskii, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory.* Berlin, Springer, 1981.
17. Ю. А. Кошевник, Б. Я. Левит, *О непараметрическом аналоге информационной матрицы.* — Теория вероятн. и ее примен. **21**, No. 4 (1976), 759–774.
18. L. Le Cam, *Limits of experiments.* — In: Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **1**, pp. 245–261, Berkeley, California Univ. Press, 1972.
19. Ya. Yu. Nikitin, *Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests.* Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 1995.

20. R. J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, New York, Wiley, 1980.
21. A. Puhalskii, V. Spokoiny, *On large-deviation efficiency in statistical inference.* — Bernoulli. **4** (1998), 203–272.
22. Ch. Stein, *Efficient nonparametric testing and estimation.* — In: Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. **1**, pp. 187–195, Berkeley, Univ. California Press, 1956.
23. M. Radavičius, *From asymptotic efficiency in minimax sense to Bahadur efficiency.* — In: New Trends Probab. Statist. (V. Sazonov, T. Shervashidze Eds.) **1**, pp. 629–635, Vilnius, VSP/Mokslas, 1991.
24. A. W. Van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 1998.

Ermakov M. S. Bahadur asymptotic efficiency in the zone of moderate deviation probabilities.

We establish an analog of Bahadur's lower bound for asymptotic efficiency in the moderate deviation probabilities zone. We consider problems of parameter estimation for independent, not necessarily identically distributed, random variables and signal in Gaussian white noise. The assertions are obtained under the same conditions under which the Hajek–Le Cam locally asymptotically minimax lower bound has been established. The Bahadur lower bound for local asymptotic efficiency is a special case of this lower bound.

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербург, Россия,
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 22 октября 2025 г.