Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

§1. Введение

Ветвящийся процесс был впервые рассмотрен в статье А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева [1]. В данной статье мы изучаем вопрос о распределении функционалов от ветвящегося диффузионного процесса. По-видимому, одной из первых статей, посвященных распределению функционалов от ветвящегося диффузионного процесса является работа А. В. Скорохода [2]. Различные темы, посвященные ветвящимся процессам, отражены в монографии Б. А. Севастьянова [3]. Данная статья обобщает работу [4], относящуюся к ветвящемуся броуновскому процессу.

Определим $X(t)$, $t \geqslant 0$, – ветвящийся диффузионный процесс с постоянной интенсивностью λ воспроизведения потомков с вероятностями $\{p_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Начальный диффузионный процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, развивается согласно решению стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = \sigma(X(t))\, dW(t) + \mu(X(t))\, dt, \qquad X(0) = x, \tag{1.1}$$

где $\mu(x)$ и $\sigma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию на не более чем линейный рост

$$|\mu(x)| + |\sigma(x)| \leqslant C(1 + |x|) \qquad \text{для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Тогда по теореме 7.3 главы II из [5], существует единственное сильное решение уравнения (1.1). Предположим кроме того, что $\sigma^2(x) > 0$ при $x \in \mathbf{R}$.

Пусть τ – момент первого ветвления, не зависящий от диффузии $X(t)$, $t \geqslant 0$, и имеющий показательное распределение

$$\mathbf{P}(\tau \in dt) = \lambda e^{-\lambda t}\, dt, \qquad \lambda > 0. \tag{1.2}$$

Ключевые слова: диффузия, ветвящийся процесс, распределение функционалов.

В этот момент рождается N потомков с вероятностями $p_k = \mathbf{P}\{N = k\}$. Каждый из этих потомков независимо от других и всей предыдущей траектории развивается идентично исходному ветвящемуся диффузионному процессу.

Обозначим

$$G(z) := \mathbf{E}\, z^N = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \qquad |z| \leqslant 1, \tag{1.3}$$

производящую функцию количества потомков. Предположим, что $G'(1) < \infty$. Очевидно, что $G'(1) = \mathbf{E}\, N$.

Пусть N_t – число частиц ветвящегося диффузионного процесса X в момент t, и при $N_t \geqslant 1$ обозначим

$$X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(N_t)}(t) \tag{1.4}$$

их положения в момент t, занумерованные в произвольном порядке. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательная непрерывная функция. Нас интересует функционал

$$I_t(f) := \int_0^t \sum_{k=1}^{N_s} f(X^{(k)}(s))\, ds, \tag{1.5}$$

который описывает результирующее значение функции f на ветвях процесса X к моменту t. При $N_s = 0$ используем следующее соглашение $\sum_{k=1}^{0} \dots = 0$. Кроме того, полагаем $\prod_{k=1}^{0} \dots = 1$. Это связано с тем, что при вырождении процесса его значение в выбранный момент может отсутствовать и функция от него не имеет смысла. Ясно, что при $t \leqslant \tau$ у нас есть только одна ветвь, это – начальный процесс $X(s)$, $s \geqslant 0$.

В работе мы выведем уравнение для преобразования Лапласа распределения функционала (1.5).

§2. Распределение интегрального функционала.

Обозначим $\mathbf{E}_x$ математическое ожидание по процессу X с начальным значением $X(0) = x$. Это математическое ожидание мы будем рассматривать как функцию переменной $x \in \mathbf{R}$.

Важным результатом, на котором основано изучение функционалов от диффузионного процесса, является следующая теорема (формула Фейнмана–Каца). Для броуновского процесса она была впервые получена М. Кацем [6].

Теорема 2.1. *Пусть $g(x)$, и $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции. Предположим, что g ограничена, а f неотрицательна. Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$, – решение уравнения* (1.1).

Тогда при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{R}$ функция

$$u_1(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{g(X(t))\exp\Big(-\int_0^t f(X(s))\,ds\Big)\Big\} \tag{2.1}$$

является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u_1(t,x) + \mu(x)\,\frac{\partial}{\partial x}u_1(t,x) - f(x)\,u_1(t,x), \tag{2.2}$$

$$u_1(0,x) = g(x), \tag{2.3}$$

Кроме того, нам понадобится результат, обобщающий теорему Фубини, см. [5], глава I, §2. Пусть $\big(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}\big)$ – исходное вероятностное пространство, $\mathcal{Q}$ – произвольная σ-подалгебра $\mathcal{F}$, а $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ – борелевская σ-алгебра на прямой.

Лемма 2.1. *Пусть $\Theta(y,\omega)$, $y\in\mathbf{R}$, $\omega \in \Omega$, – ограниченная $(\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{F})$-измеримая случайная функция, не зависящая от σ-алгебры $\mathcal{Q}$, а Y – случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{Q}$. Тогда*

$$\mathbf{E}\left\{\Theta(Y,\omega)\big|\mathcal{Q}\right\} = \theta(Y) \qquad \text{п.н.},$$

где $\theta(y) = \mathbf{E}\,\Theta(y,\omega)$.

Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $g(x)$ и $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции. Предположим, что $|g| \leqslant 1$ и f неотрицательна. Тогда при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{R}$ функция*

$$u(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^{N_t} g(X^{(k)}(t))\exp\Big(-\int_0^t\sum_{k=1}^{N_s} f(X^{(k)}(s))\,ds\Big)\Big\} \tag{2.4}$$

является ограниченным решением задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = {}&\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\\ &- (\lambda + f(x))u(t,x) + \lambda G(u(t,x)),\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$u(0,x) = g(x). \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Это утверждение показывает, что у нелинейной задачи в частных производных существует решение, и оно имеет вероятностное представление (2.4).
Замечание 2.2. Эта теорема, при $G(z) = z$, т.е. когда ветвление отсутствует, превращается в теорему 2.1.

Доказательство. В качестве положения ветвящегося процесса в момент t мы понимаем целый набор значений (1.4). Определим $X^{(k)}_{q,y}(t)$, $t \geqslant 0$, одно из значений ветвящегося процесса X в момент t при условии, что в момент ветвления $\{\tau = q\}$ он начинается из точки y. Тогда для каждого из значений $X^{(k)}(t)$ ветвящегося процесс а справедливо представление

$$X^{(k)}(t) = X^{(k)}_{q,X(q)}(t) \qquad \text{при} \quad t \geqslant q. \tag{2.7}$$

Важно, что по определению условия ветвления $X^{(k)}_{q,y}(t)$ не зависит от σ-алгебры

$$\mathcal{F}^q_0 := \sigma\{X(v), 0 \leqslant v \leqslant q\},$$

которая порождена процессом $X(v)$ до момента q. Получившаяся таким образом каждая из ветвей процесса, начинающегося в точке q, имеет идентичные распределения с распределениями исходного ветвящегося диффузионного процесса X.

Рассмотрим функцию $u(t, x)$. Имеем

$$u(t,x) = \mathbf{E}_x\Big\{ \prod_{k=1}^{N_t} g(X^{(k)}(t)) \exp\Big(-\int_0^t \sum_{k=1}^{N_s} f(X^{(k)}(s))\, ds\Big) \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \Big\}$$

$$+\mathbf{E}_x\Big\{ \prod_{k=1}^{N_t} g(X^{(k)}(t)) \exp\Big(-\int_0^t \sum_{k=1}^{N_s} f(X^{(k)}(s))\, ds\Big) \mathbf{1}_{\{t\geqslant\tau\}} \Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{ g(X(t)) \exp\Big(-\int_0^t (\lambda + f(X(s))\, ds\Big) \Big\}$$

$$+\lambda \int_0^t dq\, e^{-\lambda q} \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int_0^q f(X(s))\, ds\Big)$$

$$\times \mathbf{E}_x\Big\{ \prod_{k=1}^{N_t} g(X^{(k)}_{q,X(q)}(t)) \exp\Big(-\int_q^t \sum_{k=1}^{N_s} f(X^{(k)}_{q,X(q)}(s))\,ds\Big) \Big| \mathcal{F}_0^q \Big\}\Big\}.$$

Применив лемму 2.1, получим

$$u(t,x) = u_1(t,x)$$
$$+\lambda \int_0^t dq\, e^{-\lambda q} \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int_0^q f(X(s))\,ds\Big) \theta(t-q, X(q))\Big\},$$

где

$$u_1(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{ g(X(t)) \exp\Big(-\int_0^t (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big)\Big\},$$

$$\theta(t-q,y) := \mathbf{E}\Big\{ \prod_{k=1}^{N_{t-q}} g(X^{(k)}_{q,y}(t-q)) \exp\Big(-\int_0^{t-q} \sum_{k=1}^{N_v} f(X^{(k)}_{q,y}(v))\,dv\Big)\Big\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в точке ветвления процесс начинается заново и распределения значений $X^{(k)}_{q,y}(s)$ зависят по времени лишь от разностей $s-q$.

В силу мультипликативной структуры функционала, стоящего под знаком математического ожидания и независимости ветвей диффузионного процесса после точки ветвления, а также идентичности их распределений с распределениями исходного ветвящегося диффузионного процесса X, имеем

$$\theta(t-q,y) = G(u(t-q,y)),$$

где $G(z)$, $|z| \leqslant 1$, – производящая функция количества потомков.

В результате получаем

$$u(t,x) = u_1(t,x)$$
$$+\lambda \int_0^t dq\, e^{-\lambda q} \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int_0^q f(X(s))\,ds\Big) G(u(t-q, X(q)))\Big\}.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $q = t - v$. Тогда

$$u(t,x) = u_1(t,x)$$

$$+\lambda\int_0^t dv\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{t-v}(\lambda+f(X(s))\,ds\Big)G(u(v,X(t-v)))\Big\}.$$

Обозначим

$$\varrho(v,t-v,x):=\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{t-v}(\lambda+f(X(s))\,ds\Big)G(u(v,X(t-v)))\Big\}.$$

В результате имеем

$$u(t,x)=u_1(t,x)+\lambda\int_0^t\varrho(v,t-v,x)\,dv. \tag{2.8}$$

Дифференцируя это равенство по t, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}u_1(t,x)+\lambda\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\varrho(v,t-v,x)\,dv+\lambda G(u(t,x)). \tag{2.9}$$

Согласно теореме 2.1 при $\lambda+f(x)$ вместо $f(x)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1(t,x)=\frac{1}{2}\,\sigma^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(t,x)+\mu(x)\,\frac{\partial}{\partial x}u_1(t,x)-(\lambda+f(x))u_1(t,x), \tag{2.10}$$

$$u_1(0,x)=g(x). \tag{2.11}$$

При фиксированном v из теоремы 2.1 при $g(x)=G(u(v,x))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varrho(v,t-v,x)&=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varrho(v,t-v,x)+\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}\varrho(v,t-v,x)\\&\quad-(\lambda+f(x))\varrho(v,t-v,x),\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\varrho(v,0,x)=G(u(v,x)). \tag{2.13}$$

Проинтегрируем (2.12) по $v\in[0,t]$. Тогда функция

$$L(t,x):=\lambda\int_0^t\varrho(v,t-v,x)\,dv$$

удовлетворяет равенству

$$\lambda\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\varrho(v,t-v,x)\,dv=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}L(t,x)+\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}L(t,x)-(\lambda+f(x))L(t,x).$$

Просуммируем это равенство с (2.10) и учтем, что в силу (2.8)

$$u(t,x) = u_1(t,x) + L(t,x).$$

Теперь из (2.9) получаем (2.5). Условие (2.6) очевидно.

□

§3. Математическое ожидание интегрального функционала.

Рассмотрим вопрос о математическом ожидании функционала (1.5). Пусть N_t – число частиц ветвящегося диффузионного процесса X в момент t. Ясно, что эта характеристика не зависит от диффузии, а лишь отражает характер ветвления. Хорошо известно, что

$$\mathbf{E}\, N_t = \exp\big(-\lambda(1 - G'(1))t\big). \tag{3.1}$$

Доказательство этого результата можно найти, например, в §6 главы I из [3].

Ветвящийся процесс называется докритическим, если $G'(1) < 1$, критическим, если $G'(1) = 1$ и надкритическим, если $G'(1) > 1$.

Теорема 3.1. *Пусть $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная ограниченная функция. Предположим, что $\mathbf{E}\, N \leqslant 1$. Тогда при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{R}$ функция*

$$m(t,x) := \mathbf{E}_x\bigg\{\int\limits_0^t \sum_{k=1}^{N_s} h(X^{(k)}(s))\,ds\bigg\} \tag{3.2}$$

является единственным ограниченным решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} m(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x} m(t,x) \\ &\quad - \lambda(1 - \mathbf{E}\, N) m(t,x)) + h(x), \qquad (3.3) \\ m(0,x) &= 0. \qquad (3.4) \end{aligned}$$

Доказательство. Начнем с нестрогого рассуждения. Положим

$$u_\gamma(t,x) := \mathbf{E}_x\bigg\{\exp\bigg(-\gamma\int\limits_0^t \sum_{k=1}^{N_s} h(X^{(k)}(s))\,ds\bigg)\bigg\}.$$

Тогда

$$m(t,x) = -\frac{\partial}{\partial\gamma} u_\gamma(t,x)\big|_{\gamma=0}.$$

Применим теорему 2.2 с $g \equiv 1$ и с γh вместо f. Продифференцируем уравнение (2.5) по параметру γ. Мы это сделаем формально, так как строгого обоснования у нас нет. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \gamma}u_\gamma(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \gamma}u_\gamma(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \gamma}u_\gamma(t,x) - h(x)u_\gamma(t,x)$$
$$-(\lambda+\gamma h(x))\frac{\partial}{\partial \gamma}u_\gamma(t,x) + \lambda G'(u_\gamma(t,x))\frac{\partial}{\partial \gamma}u_\gamma(t,x). \qquad (3.5)$$

При $\gamma \downarrow 0$, получим (3.3).

Для строгого доказательства теоремы нам понадобится следующее обобщение теоремы 2.1 (см. теорему 11.2 главы II из [5] при $a = -\infty$, $b = \infty$).

Теорема 3.2. *Пусть $g(x)$, $f(x)$ и $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции. Предположим, что g и h ограничены, а f неотрицательна. Тогда при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{R}$ функция*

$$u_1(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{g(X(t))\exp\Big(-\int_0^t f(X(s))\,ds\Big)$$
$$+\int_0^t h(X(v))\exp\Big(-\int_0^v f(X(s))\,ds\Big)dv\Big\} \qquad (3.6)$$

является единственным ограниченным решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u_1(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}u_1(t,x)$$
$$- f(x)u_1(t,x) + h(x), \qquad (3.7)$$
$$u_1(0,x) = g(x). \qquad (3.8)$$

Поступим следующим образом. Имеем

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x\Big\{\int_0^t \sum_{k=1}^{N_s} h(X^{(k)}(s))\,ds; t<\tau\Big\} + \mathbf{E}_x\Big\{\int_0^t \sum_{k=1}^{N_s} h(X^{(k)}(s)\,ds; t\geqslant\tau\Big\}$$
$$= e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\Big\{\int_0^t h(X(s)\,ds\Big\} + \lambda\int_0^t dq\, e^{-\lambda q}\mathbf{E}_x\Big\{\int_0^q h(X(s)\,ds\Big\}$$
$$+\lambda\int_0^t dq e^{-\lambda q}\mathbf{E}_x\Big\{\mathbf{E}_x\Big\{\int_q^t \sum_{k=1}^{N_s} h(X^{(k)}_{q,X(q)}(s))\,ds\Big|\mathcal{F}_0^q\Big\}\Big\}.$$

В силу аддитивной структуры функционала, стоящего под знаком математического ожидания и независимости ветвей диффузионного процесса после точки ветвления, а также идентичности их распределений с распределениями исходного ветвящегося диффузионного процесса X, имеем

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x\Big\{\int_0^t e^{-\lambda s} h(X(s)\,ds\Big\}$$

$$+\mathbf{E}\,N\lambda\int_0^t dq\,e^{-\lambda q}\mathbf{E}_x\mathbf{E}_{X(q)}\Big\{\int_0^{t-q}\sum_{k=1}^{N_s} h(X^{(k)}(s))\,ds\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{\int_0^t e^{-\lambda s} h(X(s)\,ds\Big\} + \mathbf{E}\,N\lambda\int_0^t dv e^{-\lambda(t-v)}\mathbf{E}_x m(v, X(t-v)).$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $\{\tau = q\}$ рождается N одинаковых частиц, и что распределения процессов $X_{q,x}^{(k)}(s)$ зависят по времени лишь от разностей $s-q$. Далее мы применили лемму 2.1 и сделали в интеграле замену переменной $t-q=v$.

Обозначим

$$H(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{\int_0^t e^{-\lambda s} h(X(s)\,ds\Big\},$$

$$\varrho(v, t-v, x) := \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda(t-v)} m(v, X(t-v))\Big\}.$$

По теореме 3.2 при $g(x)\equiv 0$, $f(x)=\lambda$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}H(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}H(t,x) - \lambda H(t,x) + h(x),$$

и при фиксированном v по теореме 2.1 при $g(x)=m(v,x)$, $f(x)=\lambda$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(v,t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varrho(v,t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}\varrho(v,t,x) - \lambda\varrho(v,t,x),$$
$$\varrho(v,0,x) = m(v,x).$$

Поскольку

$$m(t,x) = H(t,x) + \lambda\,\mathbf{E}\,N\int_0^t \varrho(v, t-v, x)\,dv,$$

то дифференцируя это равенство по t, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}H(t,x)+\lambda\,\mathbf{E}\,N\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}\varrho(v,t-v,x)\,dv+\lambda\,\mathbf{E}\,N\,m(t,x)$$

$$=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x)+\mu(x)\,\frac{\partial}{\partial x}m(t,x)-\lambda(1-\mathbf{E}\,N)\,m(t,x)+h(x).$$

Тем самым соотношение (3.3) доказано. Условие (3.4) очевидно.

□

Согласно теореме 3.2 при $g(x)\equiv 0$, $f(x)=\lambda(1-G'(1))$ решение задачи (3.3), (3.4) имеет следующее вероятностное представление

$$m(t,x)=\mathbf{E}_x\int\limits_0^t h(X(s))\,e^{-\lambda(1-G'(1))s}\,ds.$$

В результате имеем

$$m(t,x)=\int\limits_0^t\mathbf{E}_x\sum_{k=1}^{N_s}h(X^{(k)}(s))\,ds=\int\limits_0^t e^{-\lambda(1-G'(1))s}\mathbf{E}_x h(X(s))\,ds,$$

или после дифференцирования, получаем

$$\mathbf{E}_x\sum_{k=1}^{N_t}h(X^{(k)}(t))=e^{-\lambda(1-G'(1))t}\mathbf{E}_x h(X(t)).\qquad(3.9)$$

Это соотношение обобщает (3.1). Здесь вычисляется среднее от действия функции h на ветвях процесса в момент времени t.

При $\mathbf{E}\,N=G'(1)<1$ рассмотрим преобразования Лапласа

$$M(x):=\alpha\int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}m(t,x)\,dt=\mathbf{E}\,m(\nu,x),$$

где ν – показательно распределенная с параметром $\alpha>0$ случайная величина.

Поскольку $m(0,x)=0$, то

$$\alpha\int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}m(t,x)\,dt=\alpha M(x).$$

Применяя преобразование Лапласа к (3.3), получаем

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\alpha + \lambda(1 - \mathbf{E}\,N))M(x) = -h(x). \quad (3.10)$$

При $\alpha \downarrow 0$ имеем $\mathbf{P}(\nu > t) = e^{-\alpha t} \to 1$ при любом $t > 0$. Следовательно, $\nu \to \infty$ по вероятности, и $M(x) = \mathbf{E}\,m(\nu, x) \to m(\infty, x)$. Переходя в уравнении (3.10) к пределу при $\alpha \downarrow 0$, получаем, что $m(x) := m(\infty, x)$ является при $\mathbf{E}\,N < 1$ единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)m''(x) + \mu(x)m'(x) - \lambda(1 - \mathbf{E}\,N)m(x) = -h(x). \quad (3.11)$$

При $h \equiv 1$ имеем

$$m(x) = \int\limits_0^\infty N_s\,ds = \frac{1}{\lambda(1 - \mathbf{E}\,N)},$$

поскольку это – единственное ограниченное решение уравнения (3.11) при $h \equiv 1$. Очевидно это равенство следует и из (3.1) при $h \equiv 1$.

Список литературы

1. А. Н. Колмогоров, Н. А. Дмитриев, *Ветвящиеся случайные процессы.* — Докл. АН СССР **56**, вып. 1 (1947), 7–10.
2. А. В. Скороход, *Ветвящиеся диффузионные процессы.* — Теория вероятн. и ее примен. **9**, No. 3 (1964), 492–497.
3. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, М., Наука, 1971.
4. A. N. Borodin, P. H. Salminen, *On functionals of Branching Brownian motion.* — Front. Pure Appl. Probab. **1** (1991), 7–21.
5. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2017.
6. M. Kac, *On distributions of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 1–13.

Borodin A. N. Distribution of functionals of branching diffusion process.

The distribution of functionals of branching diffusion process is studied. A definition of the branching diffusion process is given, and an additive functional of this process is considered. It is proved that the Laplace transform of the distribution of such a functional is the solution of the

partial differential problem depending on the generating function of the number of descendants.

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института им. В.А. Стеклова,
наб. р. Фонтанки, д. 27, Санкт-Петербург
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2025г.