Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

**А. Н. Бородин**

# ЛОКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ОТРАЖЕННОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

## §1. Введение

В этой статье дается описание локального времени модуля броуновского движения как процесса по пространственной переменной. Оказывается, что такой процесс является марковским, если вместо неслучайного момента времени подставлять некоторые случайные моменты. В качестве таких моментов могут выступать экспоненциально распределенный момент $\tau$, не зависящий от процесса, момент выхода на заданный уровень и некоторые другие. Этому феномену можно дать следующее объяснение. Рассмотрим сначала модуль простого случайного блуждания (независимые шаги, принимающие значения $\pm 1$ с вероятностью $1/2$). *Экскурсией блуждания* называется часть траектории между последовательными попаданиями в заданный уровень. *Локальным временем блуждания* называется число попаданий в выделенный уровень к некоторому моменту времени. В силу строго марковского свойства случайного блуждания, при определенном условии на конец траекторий и условии, что в выделенный уровень блуждание попадает заданное число раз, экскурсии являются независимыми. Благодаря этому, при фиксированном числе попаданий отраженного блуждания в заданный уровень, число попаданий в различные уровни выше заданного уровня и число попаданий в различные уровни ниже заданного уровня независимы. А это и означает, что локальное время случайного блуждания по параметру, характеризующему уровень, является марковским процессом. Должным образом нормированное случайное блуждание сходится к процессу броуновского движения и, соответственно, нормированное локальное время блуждания сходится (см. [1], глава VII, §6) к броуновскому локальному времени. Свойство марковости, как правило, сохраняется при предельном переходе. В результате будет выполняться марковское свойство и для локального времени как процесса по пространственной переменной, если на конец траектории

*Ключевые слова*: отраженное броуновское движение, локальное время, распределение супремума локального времени.

наложены определенные условия. Строго такое обоснование марковского свойства для броуновского локального времени в момент, когда броуновское движение впервые достигает заданного уровня дал Ф. Найт [2]. Д. Рэй [3] предложил чисто аналитическое доказательство этого свойства без привлечения предельной аппроксимации.

Мы будем следовать подходу, изложенному в [1] для броуновского локального времени.

Пусть $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ – исходное вероятностное пространство. Полезность рассмотрения не зависящего от броуновского движения $W(t)$, $t \geqslant 0$, момента остановки $\tau$, имеющего экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, заключается в следующем. Зная распределения процесса в момент $\tau$ или распределения функционалов от этого процесса в момент $\tau$, с помощью обратного преобразования Лапласа по $\lambda$ можно вычислить распределения процесса для любого фиксированного момента времени $t$ или распределения соответствующих функционалов.

Пусть $W(0) = x$. Вероятностная мера и математическое ожидание, соответствующие этой начальной точке, как обычно, обозначаются $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$.

С вероятностью единица существует локальное время отраженного броуновского движения: при любых $t \geqslant 0$ и $y \in [0, \infty)$

$$\ell_+(t, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbf{1}_{[y, y+\varepsilon)}(|W(s)|)\, ds, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{1}_A(\,\cdot\,)$ – индикатор множества $A$. Отметим, что $\ell_+(0, y) = 0$.

Ясно, что

$$\begin{aligned}\ell_+(t, y) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbf{1}_{[y, y+\varepsilon)}(W(s))\, ds + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbf{1}_{(-y-\varepsilon, -y]}(W(s))\, ds \\ &= \ell(t, y) + \ell(t, -y), \quad (t, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty),\end{aligned}$$

где $\ell(t, y)$ – броуновское локальное время.

Применяя теорему о замене меры, получаем, что для любой ограниченной измеримой функции $f$ выполняется равенство

$$\int\limits_0^t f(|W(s)|)\, ds = \int\limits_0^\infty f(x)\, \ell_+(t, y)\, dy. \tag{1.2}$$

## §2. Марковское свойство локального времени

**Теорема 2.1.** *При $z>0$ процесс $\ell_+(\tau,y)$, $y\in[0,\infty)$, при условии $|W(\tau)|=z$ является марковским процессом, который может быть представлен при $W(0)=0$ в виде*

$$\ell_+(\tau,y)=\begin{cases} V_1(y) & \text{при } 0\leqslant y\leqslant z,\\ V_2(y-z) & \text{при } z\leqslant y,\\ V_3(z-y) & \text{при } 0\leqslant y\leqslant z,\end{cases}$$

*где $V_k(h)$, $h\geqslant 0$, $k=1,2,3$, – неотрицательные диффузионные процессы, независимые при фиксированных начальных значениях. Для начальных значений процессов $V_k$ выполняются равенства $V_1(z)=V_2(0)$, $V_2(0)=V_3(0)$, и*

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}_0\{\ell_+(\tau,0)<v\mid |W(\tau)|=z\}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}e^{-v\sqrt{\lambda/2}}, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}_0\{\ell_+(\tau,z)<v\mid |W(\tau)|=z\}=\frac{\sqrt{2\lambda}\,e^{z\sqrt{2\lambda}}}{\operatorname{ch}(z\sqrt{2\lambda})}\exp\Big(-\frac{v\sqrt{2\lambda}}{1+e^{-2z\sqrt{2\lambda}}}\Big), \tag{2.2}$$

*а производящие операторы имеют вид*

$$\mathbf{L}_1=2v\Big(\frac{d^2}{dv^2}-\sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big)+2\frac{d}{dv},\quad \mathbf{L}_2=2v\Big(\frac{d^2}{dv^2}-\sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big),$$
$$\mathbf{L}_3=2v\Big(\frac{d^2}{dv^2}-\sqrt{2\lambda}\,\operatorname{th}((z-h)\sqrt{2\lambda})\frac{d}{dv}\Big)+2\frac{d}{dv},$$

*соответственно.*

**Замечание 2.1.** В отличие от процессов $V_1$ и $V_2$ процесс $V_3$ является неоднородным процессом в обратном времени.

**Доказательство.** Рассмотрим новое вероятностное пространство, порожденное условными распределениями $\mathbf{P}_0^z(B)=\mathbf{P}_0(B\mid |W(\tau)|=z)$, $B\in\mathcal{F}$. Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексами $z$ сверху и 0 снизу.

Пусть $f(x)\geqslant 0$, $x\in[0,\infty)$, – произвольная непрерывная ограниченная функция, а $q$ – произвольное положительное число. Положим

$$f_+(x):=f(x)\mathbf{1}_{(q,\infty)}(x),\qquad f_-(x):=f(x)\mathbf{1}_{[0,q]}(x).$$

Для доказательства марковости процесса $\ell_+(\tau,y)$, $y\in[0,\infty)$, при условии $|W(\tau)|=z$ нам достаточно установить, что для любых $q\in(0,\infty)$

и $v \in [0, \infty)$

$$\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(y)\ell_+(\tau,y)\,dy\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$
$$=\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f_+(y)\ell_+(\tau,y)\,dy)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$
$$\times\,\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f_-(y)\ell_+(\tau,y)\,dy\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}. \qquad (2.2)$$

Действительно, поскольку $f(y) = f_-(y) + f_+(y)$ и экспонента, стоящая в левой части этого равенства, равна произведению экспонент, стоящих в правой части, то равенство (2.2) означает, что в условном вероятностном пространстве (условие $|W(\tau)| = z$) будущее процесса $\ell_+(\tau, y)$ при фиксированном настоящем $\{\ell_+(\tau, q) = v\}$ не зависит от прошлого.

Заметим, что согласно (1.2),

$$\int\limits_0^\infty f(y)\,\ell_+(\tau,y)\,dy=\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds.$$

Поэтому равенство (2.1) можно переписать иначе:

$$\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$
$$=\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_+(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$
$$\times\,\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_-(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}. \qquad (2.3)$$

Тут следует различать случаи $v = 0$ и $v > 0$. В первом случае при $z < q$ очевидно

$$\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_+(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=0\Big\}=1,$$

поскольку событие $\{\ell_+(\tau,q)=0\}$ означает, что к моменту $\tau$ отраженное броуновское движение не достигает значения $q$, иначе бы на этом уровне возникло бы положительное локальное время. При этом функция $f_+$ остается равной нулю.

При $z>q$ имеем $\mathbf{P}_0^z(\ell_+(\tau,q)=0)=0$, и равенство (2.3) становится тривиальным.

Для того чтобы упростить формулы, в дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;A\}:=\mathbf{E}\{\xi\mathbf{1}_A\}$.

Пусть $z<q$. Поскольку в силу определения условного математического ожидания

$$\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=0\Big\}$$

$$=\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|\in[z,z+\delta)\Big\}}{\mathbf{P}_0(\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|\in[z,z+\delta))}$$

$$=\frac{\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)<z\Big\}}{\frac{d}{dz}\mathbf{P}_0(\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|<z)},$$

то домножив (2.3) на знаменатель

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_0\Big(\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|<z\Big),$$

мы придем к равенству

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|<z\Big\}$$

$$=\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_-(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|<z\Big\}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим случай $v>0$. Заметим, что согласно определению условного математического ожидания

$$\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)\in[v,v+\delta)\Big\}}{\mathbf{P}_0^z(\ell_+(\tau,q)\in[v,v+\delta))}$$

$$= \frac{\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)<v,\Big\}}{\frac{d}{dv}\mathbf{P}_0^z(\ell_+(\tau,q)<v)}$$

$$= \frac{\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)<v,|W(\tau)|<z\Big\}}{\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{P}_0(\ell_+(\tau,q)<v,|W(\tau)|<z)}.$$

Используя это равенство также для функции $f_-$ и домножая равенство (2.3) на

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{P}_0\Big(\ell_+(\tau,q)<v,|W(\tau)|<z\Big),$$

получим аналог (2.3) в следующем виде:

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)<v,|W(\tau)|<z\Big\}$$

$$=\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_+(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$

$$\times\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_-(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)<v,|W(\tau)|<z\Big\}. \quad (2.5)$$

Мы докажем (2.4) и (2.5), вычисляя для входящих в эти равенства математических ожиданий явные формулы, выраженные через фундаментальные решения $\varphi$ и $\psi$ уравнения

$$\frac{1}{2}\phi''(y)-(\lambda+f(y))\,\phi(y)=0, \quad y\in(-\infty,\infty). \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) имеет два неотрицательных линейно независимых решения $\psi$ и $\varphi$, таких что $\psi(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является возрастающим, а $\varphi(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – убывающим решением. Эти решения называются фундаментальными.

Для кусочно непрерывных функций $f$ решения уравнения (2.6) следует понимать согласно замечанию 1.2 главы III из [1].

Пусть $\gamma \geqslant 0$, $z \in (0, \infty)$. Обозначим

$$Q_z(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big( -\int_0^\tau f(|W(s)|)\, ds - \gamma \ell_+(\tau, q)\Big); |W(\tau)| < z\Big\}. \quad (2.7)$$

Вычислим функцию $Q$, используя теорему 10.3 главы III из [1] при $b = \infty$, $\beta_1 = \gamma$, $q_1 = q$. Пусть $\varphi(y)$, $\psi(y)$ – два фундаментальных (см. замечание 1.1 главы III из [1]) решения уравнения (2.6) на всей прямой, удовлетворяющие условию $\varphi(q) = \psi(q) = 1$, а $w$ – их вронскиан. Согласно теореме 4.2 главы III из [1], функция $Q$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}Q''(x) - (\lambda + f(x))Q(x) = 0, \qquad x \in [0, \infty) \setminus \{z, q\}, \quad (2.8)$$

$$Q'(z + 0) - Q'(z - 0) = -2\lambda, \quad (2.9)$$

$$Q'(q + 0) - Q'(q - 0) = 2\gamma\, Q(q), \quad (2.10)$$

$$Q'(0+) = 0. \quad (2.11)$$

Определим функцию

$$G_y(x) := \begin{cases} \dfrac{2\lambda}{w}\Big(\psi(x) - \dfrac{\psi'(0)}{\varphi'(0)}\,\varphi(x)\Big)\,\varphi(y), & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ \dfrac{2\lambda}{w}\Big(\psi(y) - \dfrac{\psi'(0)}{\varphi'(0)}\,\varphi(y)\Big)\,\varphi(x), & y \leqslant x. \end{cases}$$

Функция $G_y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.8), условию на скачок производной вида (2.9) в точке $y$ и граничному условию (2.11).

Решение задачи (2.8)–(2.11) ищем в виде

$$Q_z(x) = G_z(x) + A\, G_q(x).$$

Константа $A$ определяется из условия (2.10)

$$Q'_z(q + 0) - Q'_z(q - 0) = -2\lambda A = 2\gamma(G_z(q) + A\, G_q(q)).$$

Очевидно

$$A = -\frac{\gamma\, G_z(q)}{\lambda + \gamma\, G_q(q)},$$

и

$$Q_z(x) = G_z(x) - \frac{G_z(q)\, G_q(x)}{G_q(q)} + \frac{\lambda\, G_z(q)\, G_q(x)}{G_q^2(q)\,(\gamma + \lambda/G_q(q))}.$$

Здесь первое слагаемое служит нагрузкой в нуле для преобразования Лапласа по параметру $\gamma$, второе отвечает за плотность распределения.

Обращая преобразование Лапласа (2.7) по $\gamma$, получаем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big); \ell_+(\tau,q)=0, |W(\tau)|<z\Big\}$$

$$= G_z(x) - \frac{G_z(q)\,G_q(x)}{G_q(q)},$$

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big); \ell_+(\tau,q)<v, |W(\tau)|<z\Big\}$$

$$= \frac{\lambda\,G_z(q)\,G_q(x)}{G_q^2(q)}\exp\Big(-\frac{v\lambda}{G_q(q)}\Big).$$

Нас интересует точка $x=0$. Имеем

$$G_y(0) = -\frac{2\lambda\,\varphi(y)}{\varphi'(0)}, \qquad G_q(q) = -\frac{2\lambda\,(\varphi'(0)-\psi'(0))}{w\,\varphi'(0)}.$$

В результате имеем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big); \ell_+(\tau,q)=0, |W(\tau)|<z\Big\}$$

$$= -\frac{2\lambda\,\varphi(z)}{\varphi'(0)} + \frac{2\lambda}{\varphi'(0)-\psi'(0)}\begin{cases}\psi(z)-\dfrac{\psi'(0)}{\varphi'(0)}\,\varphi(z), & z\leqslant q,\\ \dfrac{\varphi'(0)-\psi'(0)}{\varphi'(0)}\,\varphi(z), & q\leqslant z,\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\dfrac{2\lambda\,(\varphi(z)-\psi(z))}{\psi'(0)-\varphi'(0)}, & z\leqslant q,\\ 0, & q\leqslant z.\end{cases} \tag{2.12}$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(|W(s)|)\,ds\Big); \ell_+(\tau,q)<v, |W(\tau)|<z\Big\}$$

$$= \exp\Big(-\frac{wv}{2}+\frac{wv\psi'(0)}{2(\psi'(0)-\varphi'(0))}\Big)\begin{cases}\dfrac{\lambda w(\varphi(z)\psi'(0)-\psi(z)\varphi'(0))}{(\psi'(0)-\varphi'(0))^2}, & z\leqslant q,\\ \dfrac{\lambda w\varphi(z)}{\psi'(0)-\varphi'(0)}, & q\leqslant z.\end{cases} \tag{2.13}$$

Вычислим аналогичные выражения для функции $f_+(x)$ через функции $\varphi$ и $\psi$. Поскольку формулы (2.12), (2.13) получены для произвольной неотрицательной кусочно непрерывной функции $f$ в терминах фундаментальных решений уравнения (2.6), то можно воспользоваться этими же формулами для функции $f_+$. Для этого выразим $\psi_+(y)$, $\varphi_+(y)$ (фундаментальные решения уравнения (2.6) с функцией $f_+(y)$ вместо $f(y)$) через фундаментальные решения $\psi(y)$, $\varphi(y)$. Будем искать решения в виде

$$\psi_+(y) = \begin{cases} e^{(y-q)\sqrt{2\lambda}}, & y \leqslant q, \\ A\psi(y) + (1-A)\varphi(y), & q \leqslant y, \end{cases}$$
$$\varphi_+(y) = \begin{cases} Be^{(y-q)\sqrt{2\lambda}} + (1-B)e^{(q-y)\sqrt{2\lambda}}, & y \leqslant q, \\ \varphi(y), & q \leqslant y. \end{cases}$$

В этом представлении мы учли возрастание $\psi_+(y)$ при $y \leqslant q$, убывание $\varphi_+(y)$ при $q \leqslant y$ и равенства $\psi_+(q) = \varphi_+(q) = 1$. Условие непрерывности производной в точке $q$ позволяет вычислить константы $A$ и $B$. В результате вычислений получим

$$\psi_+(y) = \begin{cases} e^{(y-q)\sqrt{2\lambda}}, & y \leqslant q, \\ \dfrac{\sqrt{2\lambda} - \varphi'(q)}{w}\psi(y) + \dfrac{\psi'(q) - \sqrt{2\lambda}}{w}\varphi(y), & q \leqslant y, \end{cases}$$
$$\varphi_+(y) = \begin{cases} \operatorname{ch}((y-q)\sqrt{2\lambda}) + \dfrac{\varphi'(q)}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{sh}((y-q)\sqrt{2\lambda}), & y \leqslant q, \\ \varphi(y), & q \leqslant y. \end{cases}$$

Вронскиан $\psi_+$, $\varphi_+$ равен

$$w_+ = \psi'_+(q) - \varphi'_+(q) = \sqrt{2\lambda} - \varphi'(q).$$

Имеем при $z < q$

$$\begin{aligned} \psi'_+(0) - \varphi'_+(0) &= \operatorname{ch}(q\sqrt{2\lambda})(\sqrt{2\lambda} - \varphi'(q)), \\ \psi_+(z) - \varphi_+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \operatorname{sh}((z-q)\sqrt{2\lambda})(\sqrt{2\lambda} - \varphi'(q)), \\ \varphi_+(z)\psi'_+(0) - \psi_+(z)\varphi'_+(0) &= \operatorname{ch}(z\sqrt{2\lambda})(\sqrt{2\lambda} - \varphi'(q)). \end{aligned}$$

Подставляя функции $\psi_+, \varphi_+$ вместо функций $\psi, \varphi$ в формулы (2.12), (2.13), получаем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau f_+(|W(s)|)\,ds\Big); \ell_+(\tau,q)=0, |W(\tau)|<z\Big\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sh}((q-z)\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{ch}(q\sqrt{2\lambda})}, & z\leqslant q,\\ 0, & q\leqslant z,\end{cases} \tag{2.14}$$

и при $v>0$

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau f_+(|W(s)|)\,ds\Big); \ell_+(\tau,q)<v, |W(\tau)|<z\Big\}$$

$$=\exp\Big(\frac{v}{2}(\varphi'(q)+\sqrt{2\lambda})-\frac{v\sqrt{2\lambda}}{1+e^{-2q\sqrt{2\lambda}}}\Big)\begin{cases}\dfrac{\lambda\,\mathrm{ch}(z\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{ch}^2(q\sqrt{2\lambda})}, & z\leqslant q,\\ \dfrac{\lambda\varphi(z)}{\mathrm{ch}(q\sqrt{2\lambda})}, & q\leqslant z.\end{cases} \tag{2.15}$$

При $f\equiv 0$ имеем $\varphi(x)=e^{(q-x)\sqrt{2\lambda}}$, $\psi(x)=e^{(x-q)\sqrt{2\lambda}}$, $w=2\sqrt{2\lambda}$. В силу этого

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{P}_0\Big(\ell_+(\tau,q)<v, |W(\tau)|<z\Big)$$

$$=\exp\Big(-\frac{v\sqrt{2\lambda}}{1+e^{-2q\sqrt{2\lambda}}}\Big)\begin{cases}\dfrac{\lambda\,\mathrm{ch}(z\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{ch}^2(q\sqrt{2\lambda})}, & z\leqslant q,\\ \dfrac{\lambda e((q-z)\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{ch}(q\sqrt{2\lambda})}, & q\leqslant z.\end{cases} \tag{2.16}$$

Поделив (2.15) на (2.16), получим

$$\mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau f_+(|W(s)|)\,ds\Big)\Big|\ell_+(\tau,q)=v\Big\}$$

$$=\exp\Big(\frac{v}{2}(\varphi'(q)+\sqrt{2\lambda})\Big)\begin{cases}1, & z\leqslant q,\\ \varphi(z)e^{(z-q)\sqrt{2\lambda}}, & q\leqslant z.\end{cases} \tag{2.17}$$

Осуществим вычисления для функции $f_-(y)$. Фундаментальные решения уравнения (2.6) с функцией $f_-(y)$ вместо $f(y)$ будем искать в виде

$$\psi_-(y)=\begin{cases}\psi(y), & y\leqslant q,\\ Ce^{(y-q)\sqrt{2\lambda}}+(1-C)e^{(q-y)\sqrt{2\lambda}}, & q\leqslant y,\end{cases}$$

$$\varphi_-(y)=\begin{cases}D\psi(y)+(1-D)\varphi(y), & y\leqslant q,\\ e^{(q-y)\sqrt{2\lambda}}, & q\leqslant y.\end{cases}$$

В силу условия непрерывности производной в точке $q$ получим

$$\psi_-(y)=\begin{cases}\psi(y), & y\leqslant q,\\ \operatorname{ch}((y-q)\sqrt{2\lambda})+\dfrac{\psi'(q)}{\sqrt{2\lambda}}\operatorname{sh}(y-q)\sqrt{2\lambda}), & q\leqslant y,\end{cases}$$

$$\varphi_-(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2\lambda}+\psi'(q)}{w}(\varphi(y)-\psi(y))+\psi(y), & y\leqslant q,\\ e^{(q-y)\sqrt{2\lambda}}, & q\leqslant y.\end{cases}$$

Вронскиан этих решений равен

$$w_-=\psi_-'(q)-\varphi_-'(q)=\psi'(q)+\sqrt{2\lambda}.$$

Имеем при $z<q$

$$\psi_-'(0)-\varphi_-'(0)=\frac{1}{w}(\sqrt{2\lambda}+\psi'(q))(\psi'(0)-\varphi'(0)),$$

$$\psi_-(z)-\varphi_-(z)=\frac{1}{\omega}(\varphi_(z)-\psi(z))(\sqrt{2\lambda}+\psi'(q)),$$

$$\varphi_-(z)\psi_-'(0)-\psi_-(z)\varphi_-'(0)=\frac{1}{\omega}(\sqrt{2\lambda}+\psi'(q))(\varphi_(z)\psi_-'(0)-\psi_(z)\varphi_-'(0)).$$

Подставляя функции $\psi_-$, $\varphi_-$ вместо функций $\psi$, $\varphi$ в формулы (2.12), (2.13), получаем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_-(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)=0,|W(\tau)|<z\Big\}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{2\lambda(\varphi(z)-\psi(z))}{\psi'(0)-\varphi'(0)} & z\leqslant q,\\ 0, & q\leqslant z,\end{cases}\tag{2.18}$$

и при $v>0$

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dv}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f_-(|W(s)|)\,ds\Big);\ell_+(\tau,q)<v,|W(\tau)|<z\Big\}$$

$$=\exp\Big(\frac{wv\psi'(0)}{2(\psi'(0)-\varphi'(0))}-\frac{v(\psi'(q)+\sqrt{2\lambda})}{2}\Big)\begin{cases}\dfrac{\lambda w(\varphi(z)\psi'(0)-\psi(z)\varphi'(0))}{(\psi'(0)-\varphi'(0))^2}, & z\leqslant q,\\ \dfrac{\lambda w}{\psi'(0)-\varphi'(0)}e^{(q-z)\sqrt{2\lambda}}, & q\leqslant z.\end{cases}\tag{2.19}$$

Поскольку (2.12) совпадает с (2.18), то это доказывает (2.4). Так как (2.13) равно произведению (2.17) и (2.19), то это доказывает (2.5).

Теперь мы собираемся вычислить характеристики этого марковского процесса. Вычислим производящие операторы процессов $V_1$, $V_2$, $V_3$. Для того чтобы вычислить производящие операторы процессов $V_1$, $V_2$, сначала вычислим при $h \geqslant 0$, $v > 0$, $\eta > 0$ выражения

$$U_1(h,v) := \mathbf{E}_0^z\{\exp(-\eta\ell(\tau, q+h))|\ell(\tau,q) = v\}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant z,$$
$$U_2(h,v) := \mathbf{E}_0^z\{\exp(-\eta\ell(\tau, q+h))|\ell(\tau,q) = v\}, \qquad z \leqslant q.$$

Эти функции по переменной $\eta$ являются преобразованиями Лапласа переходных функций процессов $V_1$, $V_2$, , поэтому они однозначно определяют производящие операторы процессов.

Однако можно и упростить вычисления, если воспользоваться уже полученным выражением (2.17). Нам следует взять в (2.17) в качестве функции $f_+(y)$ $\delta$-функцию точки $q+h$, домноженную на $\eta$. Фактически это означает, что вместо функции $f_+(y)$ мы должны рассмотреть семейство функций $\left\{\frac{\eta}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[q+h,q+h+\varepsilon)}(y)\right\}_{\varepsilon>0}$ и перейти в задаче о вычислении (2.17) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Эта процедура аналогична использованной при доказательстве теоремы 3.1 главы III из [1]. Несложно понять, что в области $y \geqslant q$ соответствующее $\delta$-функции точки $q+h$ ($f(y) = \eta\delta_{q+h}(y)$) фундаментальное решение $\varphi_\delta(y)$ уравнения (2.6) с условием $\varphi_\delta(q) = 1$ является единственным непрерывным ограниченным решением следующей задачи:

$$\frac{1}{2}\varphi''(y) - \lambda\varphi(y) = 0, \qquad y \in (q,\infty) \setminus \{q+h\},$$
$$\varphi'(q+h+0) - \varphi'(q+h-0) = 2\eta\varphi(q+h), \qquad \varphi(q) = 1.$$

Это решение мы будем искать в виде

$$\varphi_\delta(y) = (1-B)\, e^{(q-y)\sqrt{2\lambda}} + Be^{h\sqrt{2\lambda}}\, e^{-|y-q-h|\sqrt{2\lambda}}.$$

Здесь мы уже учли условие $\varphi_\delta(q) = 1$. Кроме того, мы воспользовались рассуждениями из примера 3.1 главы III из [1]. Модуль в показателе экспоненты гарантирует непрерывность функции и скачок ее производной в точке $q+h$. Наличие слагаемого с экспонентой $e^{(q-y)\sqrt{2\lambda}}$ сохраняет ограниченность решения на $+\infty$. Из условия на скачок производной получаем

$$B = -\frac{\eta\, e^{-2h\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2\lambda}(1 + \frac{\eta}{\sqrt{2\lambda}}\,(1 - e^{-2h\sqrt{2\lambda}}))}. \tag{2.20}$$

Поскольку

$$\sqrt{2\lambda}+\varphi'_\delta(q)=\sqrt{2\lambda}-\sqrt{2\lambda}\,(1-B)+\sqrt{2\lambda}\,B=2\sqrt{2\lambda}\,B,$$

то, подставляя полученные значения в (2.17), $z\leqslant q$, найдем

$$U_2(h,v)=\exp\Big(-\frac{v\eta\, e^{-2\sqrt{2\lambda}h}}{1+\frac{\eta}{\sqrt{2\lambda}}(1-e^{2h\sqrt{2\lambda}})}\Big). \tag{2.21}$$

Поскольку функция $U_2(h,v)$ не зависит от $q$, то процесс $V_2(y)$ является однородным.

Аналогично поступим для вычисления $U_1(h,v)$. Воспользуемся формулой (2.17) при $q<z$. Имеем

$$\varphi_\delta(z)\,e^{(z-q)\sqrt{2\alpha}}=1-B+B\,e^{2h\sqrt{2\lambda}}=\frac{1}{1+\dfrac{\eta}{\sqrt{2\lambda}}(1-e^{-2\sqrt{2\lambda}h})}.$$

В результате найдем

$$U_1(h,v)=\frac{1}{1+\dfrac{\eta}{\sqrt{2\lambda}}(1-e^{-2\sqrt{2\lambda}h})}\exp\Big(-\frac{v\eta\, e^{-2\sqrt{2\lambda}h}}{1+\frac{\eta}{\sqrt{2\lambda}}(1-e^{2h\sqrt{2\lambda}})}\Big). \tag{2.22}$$

Отсутствие зависимости этого выражения от $q$ указывает на то, что процесс $V_1(y)$ является однородным.

По определению производящего оператора однородного марковского процесса (см. § 9 главы IV из [1]), ввиду произвольности $\eta$, операторы $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$, отвечающие процессам $V_2$, $V_1$, могут быть найдены из следующих равенств:

$$\frac{\partial}{\partial h}U_2=\mathbf{L}_2U_2,\qquad \text{при}\quad 0<z\leqslant q,$$

и

$$\frac{\partial}{\partial h}U_1=\mathbf{L}_1U_1,\qquad \text{при}\quad 0\leqslant q<q+h<z.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{L}_2=2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\Big),\qquad \mathbf{L}_1=2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\Big)+2\frac{\partial}{\partial v}.$$

Вычислим производящий оператор процесса $V_3$. Сначала вычислим величину

$$U_3(q,r,v):=\mathbf{E}_0^z\{\exp(-\eta\ell(\tau,r))|\ell(\tau,q)=v\},\qquad r\leqslant q\leqslant z.$$

Выражение для функции $U_3(q,r,v)$ довольно сложное и оно приводит к неоднородному марковскому процессу, поэтому мы его будем вычислять с помощью следующего аналога результата (2.7)–(2.11).

Функция

$$Q_z(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big( -\gamma\ell_+(\tau,r) - \eta\ell_+(\tau,u)\Big); |W(\tau)| < z\Big\}. \qquad (2.23)$$

является единственным ограниченным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}Q''(x) - \lambda Q(x) = 0, \qquad x \in [0,\infty) \setminus \{z, r, u\}, \qquad (2.24)$$

$$Q'(z+0) - Q'(z-0) = -2\lambda, \qquad (2.25)$$

$$Q'(r+0) - Q'(r-0) = 2\gamma\, Q(r), \qquad (2.26)$$

$$Q'(u+0) - Q'(u-0) = 2\eta\, Q(u), \qquad (2.27)$$

$$Q'(0+) = 0. \qquad (2.28)$$

Определим в этом случае функцию

$$G_y(x) := \begin{cases} \sqrt{2\lambda}\,\mathrm{ch}(x\sqrt{2\lambda})\, e^{-y\sqrt{2\lambda}}, & 0 \leqslant x \leqslant y, \\ \sqrt{2\lambda}\,\mathrm{ch}(y\sqrt{2\lambda})\, e^{-x\sqrt{2\lambda}}, & y \leqslant x. \end{cases}$$

Функция $G_y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.24), условию на скачок производной вида (2.25) в точке $y$ и граничному условию (2.28).

Решение задачи (2.24)–(2.28) при $0 < r \leqslant u \leqslant z$ ищем в виде

$$Q_z(x) = G_z(x) + AG_r(x) + BG_u(x).$$

Из (2.26), (2.27) следует, что

$$-2\lambda A = 2\gamma(G_z(r) + AG_r(r) + BG_u(r)),$$

$$-2\lambda B = 2\eta(G_z(u) + AG_r(u) + BG_u(u)),$$

или, что

$$-\lambda A = \gamma\sqrt{2\lambda}(\mathrm{ch}(r\sqrt{2\lambda})e^{-z\sqrt{2\lambda}} + A\,\mathrm{ch}(r\sqrt{2\lambda})e^{-r\sqrt{2\lambda}} + B\,\mathrm{ch}(r\sqrt{2\lambda})e^{-u\sqrt{2\lambda}}),$$

$$-\lambda B = \eta\sqrt{2\lambda}(\mathrm{ch}(u\sqrt{2\lambda})e^{-z\sqrt{2\lambda}} + A\,\mathrm{ch}(r\sqrt{2\lambda})e^{-u\sqrt{2\lambda}} + B\,\mathrm{ch}(u\sqrt{2\lambda})e^{-u\sqrt{2\lambda}}).$$

Для упрощения дальнейших вычислений положим временно $\lambda = 1/2$. Имеем

$$A = -\frac{e^{-z}\gamma(e^{r} + e^{-r})}{1 + \gamma(1 + e^{-2r})(1 + e^{-2u}) + \gamma(1 + e^{-2r})(1 - e^{2r-2u})},$$

$$B = -\frac{e^{-z-u}\eta[1 + e^{2u} - \gamma(1 + e^{2r})(1 - e^{2u-2r})]}{1 + \gamma(1 + e^{-2r})(1 + e^{-2u}) + \gamma(1 + e^{-2r})(1 - e^{2r-2u})},$$

Далее

$$Q_z(0) = e^{-z} + Ae^{-r} + Be^{-u}$$

$$= e^{-z}\Big(1 - \frac{\gamma(1 + e^{-2r}) + \eta(1 + e^{-2u}) + \gamma\eta(1 + e^{-2r})(1 - e^{2r-2u})}{1 + \gamma(1 + e^{-2r}) + \eta(1 + e^{-2u}) + \gamma\eta(1 + e^{-2r})(1 - e^{2r-2u})}\Big)$$

$$= \frac{e^{-z}}{1+\gamma(1+e^{-2r})+\eta(1+e^{-2u})+\gamma\eta(1+e^{-2r})(1-e^{2r-2u})}.$$

Обращая в $Q_z(0)$ преобразование Лапласа по $\eta$, получаем

$$\frac{d}{dv}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\big(-\gamma\ell_+(\tau,r)\big);\ell_+(\tau,u)<v,|W(\tau)|<z\Big\}$$

$$= \frac{e^{-z}}{1+e^{-2u}+\gamma(1+e^{-2r})(1-e^{2r-2u})}\exp\Big(-\frac{v(1+\gamma(1+e^{-2r}))}{1+e^{-2u}+\gamma(1+e^{-2r})(1-e^{2r-2u})}\Big).$$

Поделив эту формулу на (2.16) при $q=u<z$ и $\lambda=1/2$, получим

$$U_3(u,r,v)=\mathbf{E}_0\Big\{\exp\big(-\gamma\ell_+(\tau,r)\big)\Big|\ell_+(\tau,u)=v,|W(\tau)|=z\Big\}$$

$$= \frac{1+e^{-2u}}{1+e^{-2u}+\gamma(1+e^{-2r})(1-e^{2r-2u})}\exp\Big(-\frac{v\gamma e^{2r-2u}(1+e^{-2r})^2(1+e^{-2u})^{-1}}{1+e^{-2u}+\gamma(1+e^{-2r})(1-e^{2r-2u})}\Big).$$

Для того, чтобы вычислить оператор $\mathbf{L}_3$, нам нужно выразить частную производную функции $U_3(u,r,v)$ по $u$ через частные производные по $v$. Обозначим для краткости $p(s,g,v):=U_3(-\frac{1}{2}\ln s,-\frac{1}{2}\ln g,v)$. Тогда

$$p(s,g,v)=\frac{1+s}{1+s+\gamma(1+g)(1-s/g)}\exp\Big(-v\frac{\gamma s(1+g)^2}{g(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}\Big).$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial s}p=\frac{1}{1+s}p-\frac{1-\gamma(1+1/g)}{1+s+\gamma(1+g)(1-s/g)}p-\frac{v\gamma(1+g)^2}{g(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p$$
$$+\frac{v\gamma s(1+g)^2(2(1+s)+\gamma(1+g)(1-s/g)-(1+s)\gamma(1+1/g))}{g(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))^2}p$$
$$=\frac{\gamma(1+g)(1-s/g)+\gamma(1+s)(1+1/g)}{(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p-\frac{v\gamma(1+g)^2}{g(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p$$
$$+\frac{v\gamma s(1+g)^2(2(1+s)+2\gamma(1+g)(1-s/g)-\gamma(1+g)(1-s/g+1/g+s/g))}{g(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))^2}p$$
$$=-\frac{\gamma(1+g)(1+1/g)}{(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p-\frac{v\gamma(1+g)^2}{g(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p$$
$$+\frac{2v\gamma s(1+g)^2}{g(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p-\frac{v\gamma^2 s(1+g)^4}{g^2(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))^2}p,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}p=-\frac{\gamma s(1+g)^2}{(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p,$$

а также

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}p=\frac{\gamma^2 s^2(1+g)^4}{g^2(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))^2}p.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial u}U_3(u,r,v)=\frac{\partial}{\partial s}p\big(\big(e^{-2u},e^{-2r},v\big)(-2e^{-2u})=-2s\frac{\partial}{\partial s}p(s,g,v)$$

$$= -\frac{2s\gamma(1+g)^2}{g(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p + \frac{2vs\gamma(1+g)^2}{g(1+s)(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p$$

$$-\frac{4v\gamma s^2(1+g)^2}{g(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))}p + \frac{2v\gamma^2 s^2(1+g)^4}{g^2(1+s)^2(1+s+\gamma(1+g)(1-s/g))^2}p$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial v}p - 2v\frac{\partial}{\partial v}p + \frac{4vs}{(1+s)}\frac{\partial}{\partial v}p + 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}p$$

$$= 2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}p + \frac{e^{-2u}-1}{e^{-2u}+1}\frac{\partial}{\partial v}p\Big) + 2\frac{\partial}{\partial v}p = 2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}p - \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}\frac{\partial}{\partial v}p\Big) + 2\frac{\partial}{\partial v}p.$$

В итоге имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}U_3(u,r,v) = 2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}U_3(u,r,v) - \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}\frac{\partial}{\partial v}U_3(u,r,v)\Big) + 2\frac{\partial}{\partial v}U_3(u,r,v).$$

Эти соотношения мы получили для параметра $\lambda = 1/2$. Возвращаясь к произвольному $\lambda > 0$, получим выражение для производящего оператора $\mathbf{L}_3$.

Теорема доказана. □

## §3. Распределения функционалов от локального времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от локального времени отраженного броуновского движения. Интегральный функционал от локального времени по пространственной переменной имеет вид

$$B(t) := \int_0^\infty f(\ell_+(t,y))\,dy, \tag{3.1}$$

где $f(v)$, $v\in[0,\infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция. Для преобразования Лапласа распределения такого функционала будут получены явные формулы, выраженные в терминах решений дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума. Вычисление распределений этих функционалов в фиксированный момент времени $t$ сводится к вычислению распределений этих же функционалов, остановленных в случайный момент времени $\tau$, который не зависит от броуновского движения $W$ и имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0. \tag{3.2}$$

Достаточно применить обратное преобразование Лапласа по $\lambda$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_0\Big[\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\,dy\Big);\ \sup_{y\in[0,\infty)} \ell_+(\tau,y) < h\Big] = \lambda \int_0^h Q(v)\,dv, \tag{3.3}$$

*где при $v \in [0,h]$ функция $Q$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи*

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda v + f(v))Q(v) = -R(v), \qquad Q(h) = 0, \tag{3.4}$$

*а функция $R$ является единственным ограниченным непрерывным решением задачи*

$$2vR''(v) - (\lambda v + f(v))R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \quad R(h) = 0. \tag{3.5}$$

**Замечание 3.1.** В случае $h = \infty$ граничные условия должны быть заменены следующими:

$$\limsup_{v\to\infty} e^{v\sqrt{\lambda/2}} R(v) < \infty, \qquad \limsup_{v\to\infty} e^{v\sqrt{\lambda/2}} Q(v) < \infty. \tag{3.6}$$

**Замечание 3.2.** Для кусочно непрерывной функции $f$ уравнения (3.4), (3.5) должны пониматься точно так же, как уравнение (1.10) главы III из [1] (см. замечание 1.2 главы III из [1]).

**Доказательство.** Предположим сначала, что $h = \infty$ и $f$ – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными. Используя (2.1) и марковское свойство процесса $\ell_+(\tau,y)$, найдем

$$\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\,dy\Big)\Big|\,|W(\tau)| = z\Big\}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\, \mathbf{E}_0^z\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\,dy\Big)\Big|\,\ell_+(\tau,0) = v\Big\}\,dv$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\, \bar{q}(z,v)\, dv, \tag{3.7}$$

где

$$\bar{q}(z,v) := \mathbf{E}_0^z\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\, dy\Big) \Big| \ell_+(\tau,0) = v\Big\}.$$

Положим

$$\bar{R}(v) = \mathbf{E}_0^z\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_z^\infty f(\ell_+(\tau,y))\, dy\Big) \Big| \ell_+(\tau,z) = v\Big\}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^\infty f(V_2(h))\, dh\Big) \Big| V_2(0) = v\Big\}.$$

Применяя теорему 2.1, получаем

$$\bar{q}(z,v) = \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^\infty f(V_2(h))\, dh - \int\limits_0^z f(V_1(h))\, dh\Big) \Big| V_1(0) = v\Big\}$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathbf{E}_v\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^\infty f(V_2(h))\, dh - \int\limits_0^z f(V_1(h))\, dh\Big) \Big| V_1(z) = g\Big\}$$
$$\times \mathbf{P}_v\big(V_1(z) \in dg\big).$$

где нижний индекс $v$ означает, что математическое ожидание и вероятность вычисляются от процесса $V_1$ с начальным значением $V_1(0) = v$. Используя независимость процессов $V_1$ и $V_2$ при фиксированных начальных значениях и условие $V_2(0) = V_1(z)$, имеем

$$\bar{q}(z,v) = \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^\infty f(V_2(h))\, dh\Big) \Big| V_2(0) = g\Big\}$$
$$\times \mathbf{E}_v\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^z f(V_1(h))\, dh\Big) \Big| V_1(z) = g\Big\} \mathbf{P}_v\big(V_1(z) \in dg\big)$$
$$= \int\limits_0^\infty \bar{R}(g) \mathbf{E}_v\Big\{ \exp\Big( - \int\limits_0^z f(V_1(h))\, dh\Big) \Big| V_1(z) = g\Big\} \mathbf{P}_v\big(V_1(z) \in dg\big)$$

$$= \mathbf{E}\Big\{\bar{R}(V_1(z))\exp\Big(-\int\limits_0^z f(V_1(h))\,dh\Big)\Big|V_1(0)=v\Big\}.$$

Применим теорему 12.5 главы II из [1]. Тогда получим, что функция $\bar{R}(v)$, $v \in (0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2v\big(\bar{R}''(v) - \sqrt{2\lambda}\,\bar{R}'(v)\big) - f(v)\,\bar{R}(v) = 0. \qquad (3.8)$$

Как уже отмечалось, 0-мерный бесселевский процесс, попадая в нуль, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. В силу описания процесса $V_2$, аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $f(0) = 0$, следует, что $\bar{R}(0) = 1$.

Применим теорему 13.2 главы II из [1]. Тогда получим, что функция $\bar{q}(z,v)$, $(z,v) \in \in [0,\infty)\times[0,\infty)$, является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar{q}(z,v) = 2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar{q}(z,v) - \sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar{q}(z,v)\Big) + 2\frac{\partial}{\partial v}\bar{q}(z,v) - f(v)\bar{q}(z,v), \quad (3.9)$$

$$\bar{q}(0,v) = \bar{R}(v). \qquad (3.10)$$

Особенность применения теорем 12.5 и 13.2 главы II из [1] состоит в том, что процессы $V_1$ и $V_2$ принимают неотрицательные значения и их коэффициент диффузии $\sigma^2(v) = v$ вырождается в нуле.

Замена $R(v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{R}(v)$ приводит к задаче

$$2vR''(v) - (\lambda v + f(v))R(v) = 0, \qquad R(0) = 1, \qquad (3.11)$$

а замена $q(z,v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{q}(z,v)$ – к задаче

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v) + 2\frac{\partial}{\partial v}q(z,v) - (\lambda v - \sqrt{2\lambda} + f(v))q(z,v), \quad (3.12)$$

$$q(0,v) = R(v). \qquad (3.13)$$

Используя новые обозначения, можно переписать (3.7) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\,dy\Big)\Big||W(\tau)| = z\Big\} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\infty q(z,v)\,dv. \quad (3.14)$$

Положим

$$Q(v) := \int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}z}q(z,v)\,dz.$$

Тогда из (3.12) следует, что функция $Q(v)$ удовлетворяет (3.4). В итоге получим

$$\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\,dy\Big)\Big\}$$
$$=\sqrt{2\lambda}\int_0^\infty e^{-z\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty f(\ell_+(\tau,y))\,dy\Big)\Big||W(\tau)|=z\Big\}dz$$
$$=\lambda\int_0^\infty Q(v)\,dv.$$

Это совпадает с (3.3) для случая, когда $h=\infty$ и $f$ – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными.

Замечание 3.1 справедливо в силу того, что

$$|\bar r(z,v)|\leqslant 1,\qquad |\bar q(z,v)|\leqslant 1,\qquad (z,v)\in[0,\infty)\times[0,\infty).$$

Как и при доказательстве теоремы 4.1 главы IV из [1], результат для кусочно непрерывных функций $f$ доказывается с помощью аппроксимации $f$ непрерывно дифференцируемыми функциями. □

**Теорема 3.2.** *Для* $h\geqslant 0$

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in[0,\infty)}\ell_+(\tau,y)\geqslant h\Big)=\frac{\sqrt{\lambda/2}}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda/2})I_0(h\sqrt{\lambda/2})}\int_0^h I_0(v\sqrt{\lambda/2})\,dv \tag{3.15}$$

**Доказательство.** Применим теорему 3.1 с $f=0$. Решения задачи (3.4), (3.5) в этом случае имеют следующий вид:

$$R(v)=\frac{\operatorname{sh}((h-v)\sqrt{\lambda/2})}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda/2})},\qquad 0\leqslant v\leqslant h,$$

$$Q(v)=\frac{\operatorname{ch}((h-v)\sqrt{\lambda/2})}{\sqrt{2\lambda}\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda/2})}-\frac{I_0(v\sqrt{\lambda/2})}{\sqrt{2\lambda}\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda/2})I_0(h\sqrt{\lambda/2})},\qquad 0\leqslant v\leqslant h,$$

где $I_l(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – модифицированные функции Бесселя порядка $l$, (см. приложение 2 из [4]).

Имеем

$$\lambda\int\limits_0^h Q(v)\,dv = \frac{\sqrt{\lambda/2}}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda/2})}\Bigl(\int\limits_0^h \operatorname{ch}(v\sqrt{\lambda/2})\,dv - \int\limits_0^h \frac{I_0(v\sqrt{\lambda/2})}{I_0(h\sqrt{\lambda/2})}\,dv\Bigr).$$

Переход к вероятности дополнительного события доказывает теорему. □

## Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2017.
2. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.
3. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963), 615–630.
4. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016.

Borodin A. N. Local time of reflecting Brownian motion.

A description of the local time of the reflecting Brownian motion as a process with respect to the spatial variable is given. It turns out that such a process is Markovian if instead of a non-random time we substitute an exponentially distributed time independent of the process. We are interested in the result that allows us to calculate the distributions of integral functionals with respect to the spatial variable of the local time of reflecting Brownian motion. The explicit distribution of the supremum of the local time with respect to the spatial variable is calculated.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
*E-mail*: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2025г.