Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

А. С. Болотин

О ЧИСЛЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ ВНУТРИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

§1. Введение

Гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ определяется направлением нормали на единичной сфере $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ и расстоянием от начала координат $p \in [0, +\infty)$. Пусть $\mathbb{G}_d$ – множество гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, $X \subset \mathbb{G}_d$. Мера множества X может быть определена как интеграл

$$\mu(X) = \int\limits_X dp\, d\omega,$$

где dp – мера Лебега на положительной полуоси, $d\omega$ – мера Хаара на $\mathbb{S}^{d-1}$. Известно, что такая мера является единственной (с точностью до постоянного множителя) мерой на $\mathbb{G}_d$, инвариантной относительно движений (см., например, [4]).

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое тело, через $[D] = \{g \in \mathbb{G}_d : g \cap D \neq \varnothing\}$ обозначим множество гиперплоскостей, пересекающих D. Рассмотрим $n \geqslant d$ независимых случайных гиперплоскостей $g_1, \dots, g_n$, распределённых в соответствии с вероятностной мерой

$$\mu_D(X) = \frac{\mu(X \cap [D])}{\mu([D])}.$$

Каждый поднабор из d гиперплоскостей почти наверное имеет единственную точку пересечения. Нас будет интересовать распределение случайной величины $N_n^{(d)}$, равной количеству этих точек, находящихся внутри D. Положим

$$p_{nk}^{(d)} = \mathbb{P}(N_n^{(d)} = k), \quad k = 0, 1, \dots, \binom{n}{d}. \tag{1}$$

Ключевые слова: случайные гиперплоскости, выпуклое тело, мера Крофтона, геометрическая вероятность, числа Стирлинга второго рода, точки пересечения, интегрально-геометрические инварианты, интегральная геометрия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

Классический подход к нахождению $p_{nk}^{(d)}$ заключается в прямом вычислении через геометрические инварианты D [1, 4]. Приведём классические результаты в плоском случае $d = 2$. Известно, что тогда $\mu([D])$ пропорциональна $L(D)$, где $L(D)$ – периметр D. Будем считать, что нормировка μ подобрана так, что $\mu([D]) = L(D)$. Элементарное вычисление даёт

$$p_{20}^{(2)} = 1 - \frac{2\pi S(D)}{L^2(D)}, \quad p_{21}^{(2)} = \frac{2\pi S(D)}{L^2(D)}, \tag{2}$$

где $S(D)$ – площадь D. Для $n = 3$ требуются также инварианты

$$I_2(D) = \int\limits_{[D]} |\chi(g)|^2 dg, \quad U(D) = \int\limits_{g_1 \cap g_2 \in D} u(g_1, g_2)\, dg_1\, dg_2,$$

где $\chi(g) = g \cap D$ – хорда, порождённая прямой g, $|\chi(g)|$ – её длина, $u(g_1, g_2)$ – периметр выпуклого четырёхугольника с вершинами в точках пересечения g_1 и g_2 с границей D.

В [5] получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} p_{30}^{(2)} &= 1 - \frac{6\pi\, S(D)\, L(D) - 4\, I_2(D) - U(D)}{L^3(D)}, \\ p_{31}^{(2)} &= \frac{6\pi\, S(D)\, L(D) - 3\, U(D)}{L^3(D)}, \\ p_{32}^{(2)} &= \frac{3\, U(D) - 12\, I_2(D)}{L^3(D)}, \\ p_{33}^{(2)} &= \frac{8\, I_2(D) - U(D)}{L^3(D)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для $n > 3$ требуются громоздкие вычисления и новые инварианты D. Выражения для $p_{4k}^{(2)}$ можно найти в [3].

Насколько нам известно, в литературе не рассматривался случай размерности выше 2. Целью данной работы является обобщение формулы (3) на произвольную размерность, а именно, мы найдём явные выражения для $p_{d+1,k}^{(d)}$. Кроме того, в работе мы предлагаем новый подход к изучению вероятностей $p_{nk}^{(d)}$, который остаётся применимым в произвольной размерности d и для произвольного n.

Пусть $v(i_1, \ldots, i_d) = \mathbf{1}\left(\{g_{i_1} \cap \ldots \cap g_{i_d} \in D\}\right)$. Одной из целей работы является выражение вероятностей $p_{nk}^{(d)}$ через математические ожидания вида

$$\mathbb{E}\left[v\big(i_1^{(1)}, \ldots, i_d^{(1)}\big) \cdot \ldots \cdot v\big(i_1^{(l)}, \ldots, i_d^{(l)}\big)\right].$$

§2. Основные результаты

Пусть $M = \binom{n}{d}$. Далее будем рассматривать наборы $\big(i_1^{(j)}, \ldots, i_d^{(j)}\big)$, где $1 \leqslant i_1^{(j)} < \ldots < i_d^{(j)} \leqslant n$. Упорядочим их произвольным образом (например, лексикографически) и обозначим через

$$V_l = \left\{v\big(i_1^{(1)}, \ldots, i_d^{(1)}\big) \cdot \ldots \cdot v\big(i_1^{(l)}, \ldots, i_d^{(l)}\big) : \big(i_1^{(j)}, \ldots, i_d^{(j)}\big) < \big(i_1^{(j+1)}, \ldots, i_d^{(j+1)}\big)\right\}, \quad l = 1, \ldots, M,$$

множество из произведений v в l точках. Также считаем $V_0 = \{1\}$.

Итак, сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Для вероятностей $p_{nk}^{(d)}$ справедливы соотношения*

$$p_{nk}^{(d)} = \sum_{l=k}^{M} (-1)^{l+k} \binom{l}{k} \sum_{w \in V_l} \mathbb{E}\, w.$$

Замечание 1. Рассмотрим случай $d = 2, n = 3$. Тогда имеем $M = 3$,

$$V_1 = \{v(1,2), v(1,3), v(2,3)\},$$
$$V_2 = \{v(1,2)\, v(1,3), v(1,2)\, v(2,3), v(1,3)\, v(2,3)\},$$
$$V_3 = \{v(1,2)\, v(1,3)\, v(2,3)\}.$$

Положим $w_1 = v(1,2), w_2 = v(1,2)\, v(1,3), w_3 = v(1,2)\, v(1,3)\, v(2,3)$. Легко видеть, что для всех $w \in V_1$ выполнено $\mathbb{E}\, w = \mathbb{E}\, w_1$, и для всех $w \in V_2$ выполнено $\mathbb{E}\, w = \mathbb{E}\, w_2$. Таким образом, пользуясь теоремой 1, получаем

$$p_{30}^{(2)} = 1 - 3\,\mathbb{E}\, w_1 + 3\,\mathbb{E}\, w_2 - \mathbb{E}\, w_3, p_{31}^{(2)} = 3\,\mathbb{E}\, w_1 - 6\,\mathbb{E}\, w_2 + 3\,\mathbb{E}\, w_3,$$
$$p_{32}^{(2)} = 3\,\mathbb{E}\, w_2 - 3\,\mathbb{E}\, w_3, \quad p_{33}^{(2)} = \mathbb{E}\, w_3.$$

Сравнивая с (3), можем, в частности, заключить

$$\mathbb{E}\, w_1 = \frac{2\pi\, S(D)}{L^2(D)}, \quad \mathbb{E}\, w_2 = \frac{4\, I_2(D)}{L^3(D)}, \quad \mathbb{E}\, w_3 = \frac{8\, I_2(D) - U(D)}{L^3(D)}.$$

Заметим, что

$$\frac{2\pi\, S(D)}{L^2(D)} = \mathbb{E}\, w_1 = \mathbb{E}\, \mathbf{1}(g_1 \cap g_2 \in D) = \mathbb{P}(g_1 \cap g_2 \in D),$$

что согласуется с результатом (2). Выражение для $\mathbb{E}\, w_2$ также может быть получено прямым вычислением:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, w_2 &= \mathbb{E}\, \mathbf{1}(g_1 \cap g_2 \in D, g_1 \cap g_3 \in D)\\ &= \frac{1}{\mu([D])^3} \int\limits_{[D]} \left(\iint\limits_{[D]} \mathbf{1}(g_1 \cap g_2 \in D, g_1 \cap g_3 \in D)\, dg_2\, dg_3 \right) dg_1\\ &= \frac{1}{\mu([D])^3} \int\limits_{[D]} \left(\int\limits_{[D]} \mathbf{1}(g_1 \cap g_2 \in D)\, dg_2 \int\limits_{[D]} \mathbf{1}(g_1 \cap g_3 \in D)\, dg_3 \right) dg_1\\ &= \frac{1}{\mu([D])^3} \int\limits_{[D]} (2|\chi(g_1)|)^2\, dg_1 = \frac{4\, I_2(D)}{L^3(D)}.\end{aligned}$$

Замечание 2. Как уже было показано в замечании 1, для различных $w_1, w_2 \in V_l$ может выполняться равенство $\mathbb{E}\, w_1 = \mathbb{E}\, w_2$. Таким образом, в действительности в правой части выражения из теоремы 1 можно суммировать меньшее число слагаемых.

А именно, рассмотрим d-однородный гиперграф H с n вершинами и l гиперрёбрами. Пусть H_1, H_2 – два неизоморфных помеченных гиперграфа, полученных из H нумерацией вершин числами $1, \dots, n$. Пусть гиперрёбра H_1 и H_2 суть множества

$$E_1 = \Big\{ \big(i_1^{(1)}, \dots, i_d^{(1)}\big), \dots, \big(i_1^{(l)}, \dots, i_d^{(l)}\big) : \big(i_1^{(k)}, \dots, i_d^{(k)}\big) < \big(i_1^{(k+1)}, \dots, i_d^{(k+1)}\big) \Big\},$$

$$E_2 = \Big\{ \big(j_1^{(1)}, \dots, j_d^{(1)}\big), \dots, \big(j_1^{(l)}, \dots, j_d^{(l)}\big) : \big(j_1^{(k)}, \dots, j_d^{(k)}\big) < \big(j_1^{(k+1)}, \dots, j_d^{(k+1)}\big) \Big\}.$$

Тогда рассмотрим

$$\begin{aligned} w_1 &= v\big(i_1^{(1)}, \dots, i_d^{(1)}\big) \cdot \ldots \cdot v\big(i_1^{(l)}, \dots, i_d^{(l)}\big),\\ w_2 &= v\big(j_1^{(1)}, \dots, j_d^{(1)}\big) \cdot \ldots \cdot v\big(j_1^{(l)}, \dots, j_d^{(l)}\big).\end{aligned}$$

Очевидно, $\mathbb{E}\, w_1 = \mathbb{E}\, w_2$, хотя $w_1 \neq w_2$.

Как было упомянуто во введении, следующий наш результат обобщает формулы (3) на случай произвольной размерности d и $n = d + 1$ гиперплоскостей. Для формулировки потребуются следующие обозначения.

Пусть $g_1, \dots, g_d$ – гиперплоскости, такие что $g_1 \cap \dots \cap g_d \in D$. Обозначим через ℓ_j хорды вида

$$g_1 \cap \dots \cap g_{j-1} \cap g_{j+1} \cap \dots \cap g_d \cap D.$$

Для $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant d$ положим

$$C_{i_1,\dots,i_k} = \operatorname{conv}\{\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}\}.$$

Наконец определим

$$u_k(g_1, \dots, g_d) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant d} \mu\left([C_{i_1,\dots,i_k}]\right), \tag{4}$$

где, как и ранее, $[C_{i_1,\dots,i_k}]$ – множество гиперплоскостей, пересекающих $C_{i_1,\dots,i_k}$. Тогда

$$U_k(D) = \int\limits_{g_1 \cap \dots \cap g_d \in D} u_k(g_1, \dots, g_d)\, dg_1 \dots dg_d \tag{5}$$

служат новыми инвариантами D. Итак, мы готовы сформулировать второй результат нашей работы.

Теорема 2. *Пусть* $2 \leqslant k \leqslant d+1$. *Тогда*

$$p^{(d)}_{d+1,k} = \frac{1}{(\mu([D]))^{d+1}} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \frac{d+1}{k} \binom{d-l}{k-l-1} U_{d-l}(D),$$

$$p^{(d)}_{d+1,1} = \frac{1}{(\mu([D]))^{d+1}} \big((d+1)\, U_{d+1}(D) - (d+1)\, U_d(D)\big),$$

$$p^{(d)}_{d+1,0} = 1 - \sum_{l=1}^{d+1} p^{(d)}_{d+1,l},$$

где мы считаем $U_0(D) = 0$,

$$U_{d+1}(D) = \mu([D]) \cdot \mu(\{g_1, \dots, g_d : g_1 \cap \dots \cap g_d \in D\}).$$

Замечание 3. В случае $d = 2$ легко видеть, что

$$u_2(g_1, g_2) = u(g_1, g_2), \quad u_1(g_1, g_2) = 2\,|\chi(g_1)| + 2\,|\chi(g_2)|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
U_3(D) &= L(D)\,\mu(\{g_1, g_2 : g_1 \cap g_2 \in D\}) \\
&= L^3(D)\,\mathbb{P}(g_1 \cap g_2 \in D) = 2\pi\, S(D)\, L(D), \\
U_2(D) &= U(D), \\
U_1(D) &= \int\limits_{g_1 \cap g_2 \in D} (2\,|\chi(g_1)| + 2\,|\chi(g_2)|)\, dg_1\, dg_2 \\
&= 4 \int\limits_{g_1 \cap g_2 \in D} |\chi(g_1)|\, dg_1\, dg_2 \\
&= 8 \int\limits_{[D]} |\chi(g)|^2 v dg = 8\, I_2(D).
\end{aligned}$$

Согласно теореме 2, получаем

$$\begin{aligned}
p_{31}^{(2)} &= \frac{1}{L^3(D)}\,(3\,U_3(D) - 3\,U_2(D)) = \frac{6\pi\, S(D)\, L(D) - 3\,U(D)}{L^3(D)}, \\
p_{32}^{(2)} &= \frac{1}{L^3(D)}\left(\frac{3}{2}\binom{2}{1} U_2(D) - \frac{3}{2}\binom{1}{0} U_1(D)\right) = \frac{3\,U(D) - 12\, I_2(D)}{L^3(D)}, \\
p_{33}^{(2)} &= \frac{1}{L^3(D)}\left(-\frac{3}{3}\binom{2}{2} U_2(D) + \frac{3}{3}\binom{1}{1} U_1(D) - \frac{3}{3}\binom{0}{0} U_0(D)\right) \\
&= \frac{8\, I_2(D) - U(D)}{L^3(D)},
\end{aligned}$$

что согласуется с формулами (3).

Замечание 4. Рассмотрим также случай $d = 3$.

$$\begin{aligned}
p_{41}^{(3)} &= \frac{1}{(\mu([D]))^4}\,(4\,U_4(D) - 4\,U_3(D))\,, \\
p_{42}^{(3)} &= \frac{1}{(\mu([D]))^4}\left(\frac{4}{2}\binom{3}{1} U_3(D) - \frac{4}{2}\binom{2}{0} U_2(D)\right) = \frac{6\,U_3(D) - 2\,U_2(D)}{(\mu([D]))^4}, \\
p_{43}^{(3)} &= \frac{1}{(\mu([D]))^4}\left(-\frac{4}{3}\binom{3}{2} U_3(D) + \frac{4}{3}\binom{2}{1} U_2(D) - \frac{4}{3}\binom{1}{0} U_1(D)\right) \\
&= \frac{-12\,U_3(D) + 8\,U_2(D) - 4\,U_1(D)}{3\,(\mu([D]))^4}, \\
p_{44}^{(3)} &= \frac{1}{(\mu([D]))^4}\left(\frac{4}{4}\binom{3}{3} U_3(D) - \frac{4}{4}\binom{2}{2} U_2(D) + \frac{4}{4}\binom{1}{1} U_1(D) - \frac{4}{4}\binom{0}{0} U_0(D)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{U_3(D) - U_2(D) + U_1(D)}{(\mu([D]))^4}.$$

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть $w \in V_l$, найдём коэффициент при $\mathbb{E}\, w$ в выражении $p_{nk}^{(d)}$. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть, как и ранее, $M = \binom{n}{d}$. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{M} i^m p_{ni}^{(d)} = \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} v(i_1, \ldots, i_d)\right)^m, \quad m = 0, 1, \ldots, M.$$

Доказательство леммы 1. Заметим, что

$$N_n^{(d)} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} v(i_1, \ldots, i_d).$$

Поэтому, с одной стороны,

$$\mathbb{E}\left(N_n^{(d)}\right)^m = \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} v(i_1, \ldots, i_d)\right)^m.$$

С другой стороны, в силу определения (1) имеем

$$\mathbb{E}\left(N_n^{(d)}\right)^m = \sum_{i=0}^{M} i^m p_{ni}^{(d)},$$

откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Покажем, что w входит в $\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} v(i_1, \ldots, i_d)\right)^m$ с коэффициентом $S(m,l)\, l!$, где $S(m,l)$ – число Стирлинга второго рода. Действительно, пусть

$$w = v\big(i_1^{(1)}, \ldots, i_d^{(1)}\big) \cdot \ldots \cdot v\big(i_1^{(l)}, \ldots, i_d^{(l)}\big),$$
$$\big(i_1^{(j)}, \ldots, i_d^{(j)}\big) < \big(i_1^{(j+1)}, \ldots, i_d^{(j+1)}\big).$$

Так как v – индикаторная функция, то $v^p = v$ для любой натуральной степени p. Чтобы получить слагаемое w, в каждой из m скобок нужно взять множитель вида $v\big(i_1^{(j)}, \ldots, i_d^{(j)}\big)$. Значит, количество способов получить слагаемое w равно количеству способов разбить m скобок на l упорядоченных непустых подмножеств, отвечающих индексу j в $v\big(i_1^{(j)}, \ldots, i_d^{(j)}\big)$, что является одним из определений числа Стирлинга второго рода (см., например, [2]). Таким образом, систему уравнений из леммы 1 можно переписать в виде

$$V\big(p_{nm}^{(d)}\big)_{m=0}^{M} = \left(\mathbb{E}\sum_{l=0}^{M} S(m,l)\, l! \sum_{w\in V_l} w\right)_{m=0}^{M} = \left(\mathbb{E}\sum_{l=0}^{m} S(m,l)\, l! \sum_{w\in V_l} w\right)_{m=0}^{M},$$

где V – матрица Вандермонда:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & M \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & M^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^M & \cdots & M^M \end{pmatrix}.$$

Таким образом, коэффициент при w в выражении $p_{nk}^{(d)}$ равен k-ой компоненте вектора

$$V^{-1}\big(S(m,l)\, l!\big)_{m=0}^{M}.$$

Запишем классическое тождество для чисел Стирлинга второго рода:

$$S(k,l)l! = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l+j} \binom{l}{j} j^k,$$

из которого видно, что

$$V\big((-1)^{l+m}\tbinom{l}{m}\big)_{m=0}^{M} = \big(S(m,l)\, l!\big)_{m=0}^{M}.$$

А значит, k-ая компонента

$$\Big(V^{-1}\big(S(m,l)\, l!\big)_{m=0}^{M}\Big)_k = (-1)^{l+k}\binom{l}{k}.$$

Итак, имеем

$$p_{nk}^{(d)} = \sum_{l=0}^{M} (-1)^{l+k} \binom{l}{k} \sum_{w\in V_l} \mathbb{E}\, w = \sum_{l=k}^{M} (-1)^{l+k} \binom{l}{k} \sum_{w\in V_l} \mathbb{E}\, w.$$

Утверждение теоремы доказано.

§4. Доказательство теоремы 2

При доказательстве потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть гиперплоскости $g_1, \dots, g_d$ пересекаются внутри D. Тогда при $1 \leqslant j < s \leqslant d$ справедливо равенство*

$$\mu\big(\{g : g \cap \ell_1 \neq \varnothing, \dots, g \cap \ell_j \neq \varnothing, g \cap \ell_s = \varnothing, \dots, g \cap \ell_d = \varnothing\}\big)$$
$$= \sum_{l=0}^{j} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant j} \mu([C_{i_1,\dots,i_l,s,\dots,d}]),$$

где при $l = 0$ внутренняя сумма считается равной $\mu([C_{s,\dots,d}])$.

Доказательство леммы 2. При $j = 1$ имеем очевидное равенство

$$\mu(\{g : g \cap \ell_1 \neq \varnothing, g \cap \ell_s = \varnothing, \dots, g \cap \ell_d = \varnothing\}) = \mu([C_{1,s,\dots,d}]) - \mu([C_{s,\dots,d}]).$$

Для произвольного j утверждение устанавливается по индукции. Действительно, пусть $j + 1 < s$. В силу аддитивности меры имеем

$$\begin{aligned}
&\mu(\{g : g \cap \ell_1 \neq \varnothing, \dots, g \cap \ell_{j+1} \neq \varnothing, g \cap \ell_s = \varnothing, \dots, g \cap \ell_d = \varnothing\}) \\
&\quad = \mu\big(\{g : g \cap \ell_1 \neq \varnothing, \dots, g \cap \ell_j \neq \varnothing, g \cap \ell_s = \varnothing, \dots, g \cap \ell_d = \varnothing\}\big) \\
&\qquad - \mu\big(\{g : g \cap \ell_1 \neq \varnothing, \dots, g \cap \ell_j \neq \varnothing, \\
&\qquad g \cap \ell_{j+1} = \varnothing, g \cap \ell_s = \varnothing, \dots, g \cap \ell_d = \varnothing\}\big) \\
&\quad = \sum_{l=0}^{j} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant j} \mu([C_{i_1,\dots,i_l,s,\dots,d}]) \\
&\qquad - \sum_{l=0}^{j} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant j} \mu([C_{i_1,\dots,i_l,j+1,s,\dots,d}]) \\
&\quad = \sum_{l=0}^{j} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant j} \mu([C_{i_1,\dots,i_l,s,\dots,d}]) \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{l-1} \leqslant j} \mu([C_{i_1,\dots,i_{l-1},j+1,s,\dots,d}]) \\
&\quad = \sum_{l=0}^{j} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant j} \mu([C_{i_1,\dots,i_l,s,\dots,d}])
\end{aligned}$$

$$+\sum_{l=1}^{j+1}(-1)^{l+1}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\dots<i_{l-1}\leqslant j\\ i_l=j+1}}\mu([C_{i_1,\dots,i_l,s,\dots,d}])=$$

$$=\sum_{l=0}^{j+1}(-1)^{l+1}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_l\leqslant j+1}\mu([C_{i_1,\dots,i_l,s,\dots,d}]). \qquad \square$$

Замечание 5. Нетрудно видеть, что лемма остаётся справедливой и при $j = d$, если положить, что при $l = 0$ внутренняя сумма равна 0.

Замечание 6. Понятно, что индексы у хорд в формулировке леммы не играют роли. Так, для любых $A, B \subset \{1, \dots, d\}$, таких что $|A| = j$, $|B| = d - s + 1$, $A \cap B = \varnothing$, справедливо равенство

$$\mu(\{g : g\cap \ell_i \neq \varnothing, \forall i\in A\}\cap\{g : g\cap\ell_i=\varnothing, \forall i \in B\}) \\ = \sum_{l=0}^{j}(-1)^{l+1}\sum_{i_1,\dots,i_l\in A}\mu([C_{i_1,\dots,i_l,B}]), \tag{6}$$

где во внутренней сумме $i_1, \dots, i_l$ попарно различны,

$$C_{i_1,\dots,i_l,B} = \operatorname{conv}(\{\ell_{i_1},\dots,\ell_{i_l}\}\cup\{\ell_i : i\in B\}).$$

Перейдём к доказательству теоремы 2. Пусть $1 \leqslant k \leqslant d+1$, через $\mu_k(g_1, \dots, g_d)$ обозначим меру множества гиперплоскостей g таких, что $g_1, \dots, g_d, g$ дают k точек пересечения, принадлежащих D. Легко видеть, что

$$p^{(d)}_{d+1,k} = \frac{d+1}{k\,(\mu([D]))^{d+1}}\int\limits_{g_1\cap\dots\cap g_d\in D}\mu_k(g_1,\dots,g_d)\,dg_1\dots dg_d.$$

Очевидно,

$$\mu_1(g_1,\dots,g_d) = \mu([D]) - \mu([C_{1,\dots,d}]).$$

Интегрируя это выражение, сразу получаем формулу для $p^{(d)}_{d+1,1}$ из утверждения теоремы.

Выражение для $\mu_k(g_1, \dots, g_d)$ при $k \geqslant 2$ находится суммированием выражений (6) по всем подмножествам $A \subset \{1, \dots, d\}, |A| = k - 1$.

Используя обозначения (4), можем записать

$$\begin{aligned}\mu_k(g_1,\dots,g_d) &= \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+1}\frac{\binom{d}{k-1}\binom{k-1}{l}}{\binom{d}{k-l-1}}u_{d-k+l+1}(g_1,\dots,g_d)\\ &= \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l+1}\binom{d-k+l+1}{l}u_{d-k+l+1}(g_1,\dots,g_d)\\ &= \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k+l}\binom{d-l}{k-l-1}u_{d-l}(g_1,\dots,g_d).\end{aligned}$$

Наконец в терминах инвариантов (5) получаем

$$p^{(d)}_{d+1,k} = \frac{1}{(\mu([D]))^{d+1}}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k+l}\frac{d+1}{k}\binom{d-l}{k-l-1}U_{d-l}(D).$$

Утверждение теоремы доказано.

Список литературы

1. R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1990.
2. Р. Л. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики,* М., Мир, 1998.
3. D. Martirosyan, V. Ohanyan, *On intersection probabilities of four lines inside a planar convex domain.* — J. Appl. Probab. **60**, No. 2 (2023), 504–527.
4. L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability.* Cambridge University Press, 2004.
5. R. Sulanke, *Schnittpunkte zufälliger Geraden.* — Arch. Math. **16** (1965), 320–324.

Bolotin A. S. On the number of intersection points of random hyperplanes inside a convex body.

We consider the problem of the distribution of the number of intersection points of n random hyperplanes inside a convex body $D \subset \mathbb{R}^d$. A new approach is proposed for studying the probabilities $p^{(d)}_{nk}$ that exactly k out of $\binom{n}{d}$ possible intersection points of d-dimensional subsets of hyperplanes lie inside D. The method is based on expressing the desired probabilities in terms of expected values of products of indicator functions and applying Stirling numbers of the second kind. A general formula for $p^{(d)}_{nk}$ is obtained in terms of these expectations. For the case $n = d+1$, explicit expressions for the probabilities are found in terms of new geometric invariants of the convex body, generalizing classical results for the planar case ($d = 2$) to arbitrary dimension.

Международный математический институт
им. Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: bolotin2003@yandex.ru

Поступило 7 ноября 2025 г.