Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

Р. И. Байтеев

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

§1. Введение

Целью настоящей работы является исследование дискретного аналога задачи Коши для уравнения Шрёдингера с непрерывным временем. Рассматриваемая постановка возникает естественным образом в рамках аппроксимации дифференциальных операторов разностными схемами (см., например, [11]) и позволяет связать методы математической физики с вероятностными конструкциями на дискретных структурах. Такой подход полезен как с точки зрения численного моделирования, так и с позиции фундаментальных исследований в квантовой механике, когда пространство носит дискретный характер.

В качестве начального объекта рассмотрим дискретный оператор Лапласа Δ_d, заданный на функциях $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ по правилу

$$(\Delta_d \varphi)(n) = \varphi(n+1) - 2\varphi(n) + \varphi(n-1). \qquad (1)$$

Этот оператор является дискретным аналогом лапласиана. Его использование составляет основу метода конечных разностей для аппроксимации непрерывных задач дискретными. На его основе вводится свободное (без потенциала) уравнение Шрёдингера:

$$i(\partial_t u)(n,t) = -\frac{1}{2}(\Delta_d u)(n,t). \qquad (2)$$

Данное уравнение служит дискретной моделью для описания квантового состояния и порождает эволюцию, схожую с непрерывной динамикой.

Ключевые слова: процесс Пуассона, уравнение Шрёдингера, дискретные аналитические функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН)..

Похожую структуру имеет дискретное уравнение теплопроводности:

$$(\partial_t u)(n,t) = \frac{1}{2}(\Delta_d u)(n,t), \tag{3}$$

для которого естественным образом возникает вероятностная интерпретация решения. Решение задачи Коши для уравнения (3) можно получить в виде математического ожидания по траекториям случайного блуждания вида $\pi(t) = \pi_1(t) - \pi_2(t)$, где $\pi_{1,2}(t)$ – независимые пуассоновские процессы с интенсивностями 1/2 (см., например, [7]):

$$u(n,t) = \mathbb{E}\,\varphi(n + \pi(t)). \tag{4}$$

Здесь $\varphi(n) \in l_2(\mathbb{Z})$ задаёт начальное условие. Эта формула отражает ведущую роль дискретных случайных блужданий для дискретных уравнений.

Между решениями задач Коши для уравнения теплопроводности и уравнения Шрёдингера имеется существенное различие в вероятностной интерпретации. Если уравнение теплопроводности порождает эволюцию вероятностных распределений $t \mapsto \mathcal{P}_t$ (в данном случае $\mathcal{P}_t$ – распределение случайной величины $\pi(t)$), то уравнение Шрёдингера порождает эволюцию так называемой волновой функции $u(n,t)$, которая при любом t удовлетворяет условию нормировки $\|u(\cdot,t)\|_2 = 1$. Для уравнения Шрёдингера вероятностный смысл имеет величина $|u(n,t)|^2$, которая интерпретируется как вероятность наблюдения свободной квантовой частицы в момент времени t в точке n (см. например, [1–4, 10]).

Как показано в работах [5, 6], вероятностное представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера без потенциала может быть получено с помощью аналитического продолжения начального условия по отдельности в верхнюю и нижнюю полуплоскость. В дискретной ситуации такой прямой процедуры не существует: здесь нет единой и согласованной теории аналитических функций, определённых на гауссовой решётке $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Эта трудность не является лишь технической: она отражает фундаментальное отличие дискретной ситуации от классического комплексного анализа.

Настоящая работа посвящена решению данной проблемы. В частности, мы опираемся на различные дискретизации условий Коши–Римана (см. [8]), позволяющие задать «продолжение вверх» и «продолжение вниз». Использование таких продолжений дает нам возможность построения вероятностного представления решения уравнения Шрёдингера.

§2. Дискретные аналитические функции

Формула (4) показывает взаимосвязь эволюционного уравнения с эллиптическим оператором и некоторой вероятностной полугруппы, порожденной стохастическим процессом. Для аналогичного рассмотрения уравнения Шрёдингера в непрерывном случае используют аналитические продолжения начальной функции в комплексную плоскость, и уже для них рассматривают симметричные случайные блуждания.

Учитывая это, мы ставим себе цель обобщить подход, использующий симметричное случайное блуждание $\pi(t) = \pi_1(t) - \pi_2(t)$, на случай оператора $i\Delta_d$, который входит в задачу Коши для дискретного аналога уравнения Шрёдингера:

$$\begin{cases} (\partial_t u)(n,t) = i\frac{1}{2}(\Delta_d u)(n,t), \\ u(n,0) = \varphi(n), \end{cases} \tag{5}$$

Здесь мы сталкиваемся с проблемой, что, несмотря на многочисленные попытки формализации, общей теории дискретных аналитических функций, заданных на решетке Гаусса $\mathbb{G} = \{n + im\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ не разработано. Мы будем придерживаться теории, которая основана на использовании дискретных аналогов условий Коши–Римана (см. [8]).

Рассмотрим отображение $\Phi(n + im) : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$, которое мы будем называть дискретной функцией, опуская, что она задана на решетке Гаусса.

Далее, введем понятие дуальной пары точек. Точки (x, x') и (y, y') назовем дуальными, если соответствующие им векторы ортогональны друг к другу и образуют правую пару векторов в $\mathbb{R}^2$. Также пусть для каждой пары точек заданы веса $l(x, x')$, имеющие смысл евклидовых расстояний между точками. Тогда дискретными условиями Коши–Римана для функции $\Phi(n + im)$ будем называть соотношения вида:

$$\frac{\Phi(y') - \Phi(y)}{l(y', y)} = i\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{l(x', x)} \tag{6}$$

При заданном наборе дуальных пар дискретную функцию $\Phi(n + im)$ мы будем называть аналитической, если для любой пары из этого набора выполнен дискретный аналог условия Коши–Римана.

Для дальнейшего рассмотрения нам необходимо будет правильным образом продолжать дискретную функцию $\varphi(n)$ на гауссову решетку. Однако на продолжение во всю решетку Гаусса, которое бы вело себя приемлемым способом на бесконечности, надеяться не приходится. Это согласуется с непрерывным случаем, в котором продолжения «вверх» и «вниз» даются различными формами [5,6]. Поэтому сосредоточимся на рассмотрении этих продолжений по отдельности и в дискретном случае.

2.1. Продолжение на верхнюю полурешетку. Рассмотрим решетчатое полупространство $\mathbb{G}^+ = \{n + im\}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ и $m \geqslant 0$. Дуальными парами будем считать $(n+im, n+1+im)$ и $(n+im, n+i(m+1))$, тогда при заданных условиях на m, n все четыре точки лежат в $\mathbb{G}^+$. Все веса $l(x, y)$ равны 1. В этом случае дискретная аналитическая функция в $\mathbb{G}^+$ должна удовлетворять, при всех разрешенных m и n, условию (см. рис. 1):

$$\Phi(n + i(m + 1)) - \Phi(n + im) = i(\Phi(n + 1 + im) - \Phi(n + im)),$$

которое можно переписать как

$$(\partial_m \Phi)(n + im) = i(\partial_n \Phi)(n + im).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(n) \in l_2(\mathbb{Z})$ – дискретная функция на решетке $\mathbb{Z}$. Тогда дискретная аналитическая функция Φ_+, заданная на $\mathbb{G}^+$, такая что $\Phi_+(n) = \varphi(n)$ при всех целых n (то есть она является единственным аналитическим продолжением φ с $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{G}^+$), задается формулой*

$$\Phi_+(n + im) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(p)\, e^{inp} \left[1 + i(e^{ip} - 1)\right]^m dp. \tag{7}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что формула (7) при фиксированном m соответствует действию псевдодифференциального оператора (п.д.о.) Π^m с символом

$$\widehat{r}_+^m(p) = \left[1 + i(e^{ip} - 1)\right]^m. \tag{8}$$

Таким образом, для любого $m \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\Phi_+(n + im) = (\Pi^m \varphi)(n).$$

Справедливость соотношения (7) при $m = 0$ следует из формулы восстановления для преобразования Фурье. Дискретную аналитичность вследствие линейности интеграла достаточно проверить для

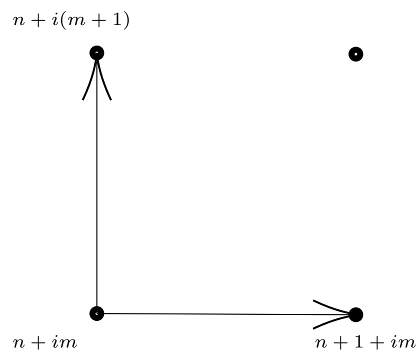

Рис. 1. Пары точек и соответствующие им векторы в $\mathbb{G}^+$.

функции $e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m$. Рассмотрим дискретные частные производные по n и m:

$$\begin{cases}(\partial_n e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m)(n+im) = (e^{ip}-1)\, e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m, \\ (\partial_m e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m)(n+im) = i(e^{ip}-1)\, e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m. \end{cases}$$

Таким образом, при всех $n+im \in \mathbb{G}_+$ выполнено дискретное условие Коши–Римана:

$$(\partial_m e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m)(n+im) = i(\partial_n e^{inp}\left[1+i(e^{ip}-1)\right]^m)(n+im).$$

Так как для функции $\varphi \equiv 0$ единственным продолжением является $\Phi_+ \equiv 0$, единственность очевидна. □

2.2. Продолжение на нижнюю полурешетку. Рассмотрим второе решетчатое полупространство $\mathbb{G}^- = \{n-im\}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ и $m \geqslant 0$. Дуальными парами в этом случае будем считать $(n-1-im, n-im)$ и $(n-i(m+1), n-im)$, а условие Коши–Римана примет вид (см. рис. 2):

$$(\partial_m \Phi)(n-i(m+1)) = i(\partial_n \Phi)(n-1-im).$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 2. *Пусть $\varphi(n) \in l_2(\mathbb{Z})$ – дискретная функция на решетке $\mathbb{Z}$. Тогда дискретная аналитическая функция Φ_-, заданная на $\mathbb{G}^-$, такая что $\Phi_-(n) = \varphi(n)$ при всех целых n (то есть она является единственным аналитическим продолжением φ с $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{G}^-$), задается*

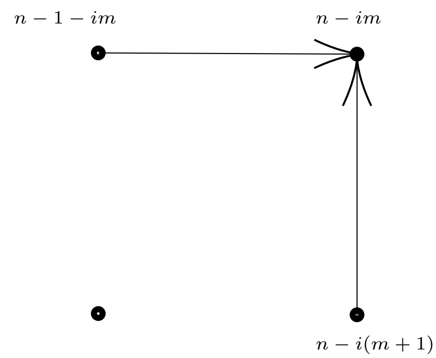

Рис. 2. Пары точек и соответствующие им векторы в $\mathbb{G}^-$.

формулой

$$\Phi_-(n-im) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(p)\, e^{inp}\left[1+i(e^{-ip}-1)\right]^m dp. \qquad (9)$$

Доказательство практически дословно совпадает с доказательством леммы 1.

Далее, отметим, что при фиксированном m формула (9) соответствует действию п.д.о. Π_m с символом

$$\widehat{r}_-^m(p) = \left[1+i(e^{-ip}-1)\right]^m. \qquad (10)$$

Таким образом, для любого $m \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\Phi_-(n-im) = (\Pi_m\varphi)(n).$$

§3. Полугруппа операторов для уравнения Шрёдингера

Определим на пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ семейство операторов аналитического продолжения:

$$\Pi_{m_2}^{m_1} = \Pi^{m_1}\circ\Pi_{m_2} \qquad (11)$$

для $m_{1,2}\in\mathbb{Z}_+$ с символами $(\widehat{r}_+(p))^{m_1}(\widehat{r}_-(p))^{m_2}$. Некоторое неудобство в получившихся выражениях заключается в том, что $\widehat{r}_+(p)\,\widehat{r}_-(p)\neq 1$, то есть не соответствует символу тождественного оператора. При последовательном продолжении вверх, а затем вниз, мы не получим оригинального выражения. Однако эти операции коммутируют, что дает нам возможность корректно определить необходимые нам выражения.

Теорема 1. *Пусть $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$ – независимые пуассоновские процессы с интенсивностями $1/2$, а для дискретных функций $\varphi \in l_2(\mathbb{Z})$ определим семейство операторов $\{\mathrm{P}^t\}_{t\geqslant 0}$, полагая:*

$$(\mathrm{P}^t\varphi)(n) = \mathbb{E}\,(\Pi_{\pi_2(t)}^{\pi_1(t)}\varphi)(n). \tag{12}$$

Тогда $u(n,t) = (\mathrm{P}^t\varphi)(n)$ является решением задачи Коши для свободного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} i(\partial_t u)(n,t) = -\frac{1}{2}(\Delta_d u)(n,t), \\ u(n,0) = \varphi(n). \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Зафиксируем $t > 0$ и рассмотрим условное математическое ожидание при условии $\pi_2(t) = m$

$$\mathbb{E}\,\left\{(\Pi_{\pi_2(t)}^{\pi_1(t)}\varphi)(n)\Big|\pi_2(t) = m\right\} = \mathbb{E}\,(\Pi_m^{\pi_1(t)}\varphi)(n) = e^{-t/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{2^k k!}(\Pi_m^k\varphi)(n).$$

В силу лемм 1 и 2 символ получившегося оператора имеет вид

$$\widehat{r}_-^m(p)\,e^{-t/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\widehat{r}_+(p))^k}{2^k k!} = \widehat{r}_-^m(p)\,e^{(\widehat{r}_+(p)-1)t/2} = \widehat{r}_-^m(p)\,e^{i(e^{ip}-1)t/2}.$$

Теперь заменим m на $\pi_2(t)$ и усредним по $\pi_2(t)$. В результате получим, что оператор P^t является п.д.о. с символом

$$e^{i(e^{ip}-1)t/2}e^{-t/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(t\widehat{r}_-(p))^m}{2^m m!} = e^{i(e^{ip}-1)t/2}e^{(\widehat{r}_-(p)-1)t/2}.$$

Таким образом, мы показали, что семейство операторов $\{\mathrm{P}^t\}_{t\geqslant 0}$ действует на дискретные функции как

$$(\mathrm{P}^t\varphi)(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{\varphi}(p)\,e^{inp}\exp\{i(\cos p - 1)t\}\,dp. \tag{14}$$

Из (14) немедленно следует, что семейство $\{\mathrm{P}^t\}_{t\geqslant 0}$ образует полугруппу.

Из равенства Парсеваля и свойства $|e^{i\alpha}| = 1$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ следует, что оператор P^t обладает свойством изометричности при всех $t \geqslant 0$:

$$\|\mathrm{P}^t\varphi\|^2_{l_2(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\varphi}(p)|^2\, |e^{i(\cos p - 1)t}|^2 dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp = \|\varphi\|^2_{l_2(\mathbb{Z})}.$$

Это согласуется с тем, что оператор эволюции в квантовой механике является унитарным.

Рассматривая поточечный предел, приходим к оператору, входящему в дискретный аналог уравнения Шрёдингера:

$$\frac{1}{t}(\mathrm{P}^t\varphi - \varphi)(n) \xrightarrow[t\to 0+]{} \frac{i}{2}(\Delta_d\varphi)(n).$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля и оценками на подынтегральную функцию, можно получить необходимую нам сильную сходимость:

$$\left\| \frac{(\mathrm{P}^t\varphi)(n) - \varphi(n)}{t} - \frac{i}{2}(\Delta_d\varphi)(n) \right\|_{l_2(\mathbb{Z})} \xrightarrow[t\to +0]{} 0.$$

Таким образом, мы показали, что оператор $i\Delta_d/2$ является генератором полугруппы $\mathrm{P}^t = e^{it\frac{1}{2}\Delta_d}$, что эквивалентно утверждению теоремы. $\square$

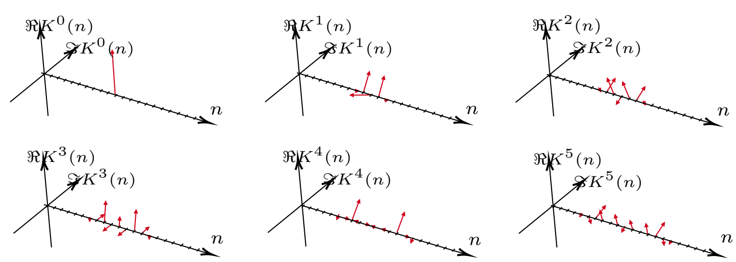

Рис. 3. Численное моделирование значений пропагатора $K^t(n)$ в зависимости от n для различных значений t.
.

Далее, используя (14), введем дискретный аналог ядра Фейнмана (свободного пропагатора, см. [3] и рис. 3).

$$K^t(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(\cos p-1)t}\, e^{inp}\, dp \tag{15}$$

Тогда решение уравнения Шрёдингера (13) представляется в виде

$$u(n,t) = (e^{it\frac{1}{2}\Delta_d}\varphi)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)\, K^t(n-k). \tag{16}$$

§4. Дискретные антианалитические функции и группа операторов для уравнения Шрёдингера

В отличие от уравнения теплопроводности, для уравнения Шрёдингера строится группа (а не полугруппа) операторов эволюции. В этом параграфе мы покажем, как достроить полученную ранее полугруппу до группы унитарных операторов в $l_2(\mathbb{Z})$.

Ранее мы нашли символы п.д.о.

$$\widehat{r}_\pm(p) = 1 + i(e^{\pm ip} - 1), \tag{17}$$

которые задавали дискретные аналитические продолжения $\Phi_\pm(n+im)$ функции $\varphi \in l_2(\mathbb{Z})$ в множества $\mathbb{G}^\pm$ соответственно.

Рассмотрим теперь дискретные аналоги антианалитических [9] продолжений в те же множества. Для дискретной функции $\varphi(n) \in l_2(\mathbb{Z})$ функция $\Phi_+^*(n+im)$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$, определенная по формуле

$$\Phi_+^*(n+im) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(p)\, e^{inp}\, \big[1 - i(e^{ip}-1)\big]^m\, dp,$$

удовлетворяет начальному условию $\Phi_+^*(n) = \varphi(n)$ и антианалитичному аналогу условия Коши–Римана

$$\Phi_+^*(n+i(m+1)) - \Phi_+^*(n+im) = -i(\Phi_+^*(n+1+i) - \Phi_+^*(n+im)).$$

Аналогично, функция $\Phi_-^*(n-im)$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$, определенная по формуле:

$$\Phi_-^*(n-im) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(p)\, e^{inp}\, \big[1 - i(e^{-ip}-1)\big]^m\, dp,$$

удовлетворяет условиям $\Phi^*_-(n) = \varphi(n)$ и другому антианалитичному аналогу условия Коши–Римана

$$\Phi^*_-(n-im) - \Phi^*_-(n-i(m+1)) = -i(\Phi^*_-(n-im) - \Phi^*_-(n-1-im)).$$

Введем обозначения

$$\widehat{\rho}_+(p) = 1 - i(e^{ip}-1), \qquad \widehat{\rho}_-(p) = 1 - i(e^{-ip}-1) \tag{18}$$

и определим семейство п.д.о. $\mathrm{R}^{m_1}_{m_2}$ для m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}_+$ с символом

$$(\widehat{\rho}_+(p))^{m_1}(\widehat{\rho}_-(p))^{m_2}.$$

Аналогично тому, как это делалось в §3, определим семейство операторов $\{\mathrm{P}^{-t}\}_{t\geqslant 0}$, полагая

$$(\mathrm{P}^{-t}\varphi)(n) = \mathbb{E}\,(\mathrm{R}^{\pi_3(t)}_{\pi_4(t)}\varphi)(n), \tag{19}$$

где $\pi_3(t)$, $\pi_4(t)$ – независимые пуассоновские процессы с интенсивностью $1/2$. Как и в теореме 1, можно показать, что данные операторы задают полугруппу п.д.о. с символом $e^{-i(\cos p-1)t}$.

Определим теперь при всех t из $\mathbb{R}$ семейство операторов P^t, полагая для $\varphi \in l_2(\mathbb{Z})$

$$(\mathrm{P}^t\varphi)(n) = \begin{cases} \mathbb{E}\,(\Pi^{\pi_1(t)}_{\pi_2(t)}\varphi)(n), & t \geqslant 0, \\ \mathbb{E}\,(\mathrm{R}^{\pi_3(-t)}_{\pi_4(-t)}\varphi)(n), & t < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 2. *Семейство операторов $\{\mathrm{P}^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ является однопараметрической группой унитарных операторов в $l_2(\mathbb{Z})$, а функция*

$$u(n,t) = (\mathrm{P}^t\varphi)(n) \tag{21}$$

для любого вещественного t является решением задачи Коши

$$\begin{cases} i(\partial_t u)(n,t) = -\frac{1}{2}(\Delta_d u)(n,t), \\ u(n,0) = \varphi(n). \end{cases} \tag{22}$$

Доказательство. Заметим, что при любом $t \in \mathbb{R}$ оператор P^t есть п.д.о. с символом $e^{i(\cos p-1)t}$. Отсюда немедленно следует, что семейство $\{\mathrm{P}^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ образует группу операторов и $\mathrm{P}^t = e^{it\frac{1}{2}\Delta_d}$.

При каждом $t \in \mathbb{R}$ оператор P^t является унитарным оператором в $l_2(\mathbb{Z})$, и $\mathrm{P}^t \circ \mathrm{P}^{-t} = \mathrm{I}$, так как

$$\|\mathrm{P}^t\varphi\|^2_{l_2(\mathbb{Z})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\varphi}(p)|^2\,|e^{i(\cos p-1)t}|^2 dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp = \|\varphi\|^2_{l_2(\mathbb{Z})},$$

$$(\mathrm{P}^t(\mathrm{P}^{-t}\varphi))(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(p)\,e^{inp}\,e^{i(\cos p-1)t-i(\cos p-1)t} dp = \varphi(n). \qquad \square$$

Список литературы

1. А. Н. Ширяев, *Броуновское движение и винеровская мера. В двух томах,* т. 1., М., МЦНМО, 2023.
2. А. Н. Ширяев, *Броуновское движение и винеровская мера. В двух томах,* т. 2., М., МЦНМО, 2025.
3. R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York, Dover publications, inc. Mineola, 1965.
4. Дж. Глимм, А. Джаффе, *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов*, М., Мир, 1984.
5. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **454** (2016), 158–175.
6. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация оператора эволюции.* — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 2 (2018), 25–39.
7. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*, Oxford, Clarendon Press, 1993.
8. О. А. Данилов, А. Д. Медных, *Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора.* — Вестник НГУ, Сер. Матем., мех., информ. **9**, вып. 2 (2009), 38–46.
9. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, М., Наука, 1969.
10. S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields. Vol. I: Foundations*, Cambridge university press, 1995.
11. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, М., Наука, 1978.

Baiteev R. I. Probabilistic representation of the Cauchy problem solution for the discrete nonstationary Schrödinger equation.

We study the one-dimensional free Schrödinger equation on $\mathbb{Z}$, which describes the quantum evolution of a discrete wave function $u(n,t)$ with continuous time. The initial state $\varphi(n)$ is prescribed, and the wave function admits the standard interpretation: namely, $|u(n,t)|^2$ represents the probability of observing a free particle at site n at time t. A new approach to solving such an evolution equation is developed, based on the use of discrete analytic functions and symmetric random walks.

Международный математический институт
им. Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: altermapper@gmail.com

Поступило 1 октября 2025 г.