Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 544, 2025 г.

С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров

О ГРУППАХ И СЕРИЯХ УСПЕХОВ В БЕРНУЛЛИЕВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Введение

Последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$, представляет собой классическую схему Бернулли. Принято трактовать события $\{X_n = 0\}$ и $\{X_n = 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно, как "неудача" и "успех" в n-ом испытании. За три века, начиная с момента опубликования в 1713 году монографии "Ars Conjectandi" Якоба Бернулли [1], рассматривались различные ситуации и были получены многочисленные результаты для бернуллиевских величин. Ниже мы вспомним ряд таких результатов для групп и серий успехов и неудач, опубликованных, в частности, в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7], и приведем некоторые новые.

§1. Основные результаты

Под появлением группы из k успехов понимаем любое событие вида

$$\{X_r = 1, X_{r+1} = 1, \ldots, X_{r+k-1} = 1\}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

имеющее вероятность p^k, $k = 1, 2, \ldots$.

Серия же из k успехов представляет собой набор из k последовательных успешных испытаний, отделенный неудачами от других успехов. Приведенный ниже пример поможет лучше понять разницу между понятиями "группа" и "серия" случайных величин.

Пусть имеем наблюдения

$$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,\ X_5 = 1,\ X_6 = 1,\ X_7 = 1,\ X_8 = 0,\ X_9 = 1,$$
$$X_{10} = 1, \quad X_{11} = 1, \quad X_{12} = 1.$$

Ключевые слова: схема Бернулли, биномиальное распределение, геометрическое распределение, отрицательное биномиальное распределение, математическое ожидание, производящие функции.

К появившимся группам из двух успехов относим следующие события

$$\{X_1=1, X_2=1\},\ \{X_2=1, X_3=1\},\ \{X_5=1, X_6=1\},\ \{X_6=1, X_7=1\},$$

$$\{X_9=1, X_{10}=1\},\ \{X_{10}=1, X_{11}=1\},\ \{X_{11}=1, X_{12}=1\},$$

каждое из которых имеет вероятность p^2. Возможные группы из трех последовательных успешных испытаний представлены событиями

$$\{X_1=1, X_2=1, X_3=1\},\ \{X_5=1, X_6=1, X_7=1\},$$

$$\{X_9=1, X_{10}=1, X_{11}=1\},\ \{X_{10}=1, X_{11}=1, X_{12}=1\}.$$

Фиксируется также одна группа $\{X_9=1, X_{10}=1, X_{11}=1, X_{12}=1\}$ из 4 успехов.

Если говорить о сериях, то имеем серии из трех успехов, которые определяются наборами событий $\{X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=0\}$ и $\{X_4=0, X_5=1, X_6=1, X_7=1, X_8=0\}$, и серию из четырех успешных испытаний, задаваемую набором

$$\{X_8=0, X_9=1, X_{10}=1, X_{11}=1, X_{12}=1\}.$$

Группы и серии успехов по структуре очень похожи, но требуют применений разных подходов при работе с ними. Ниже для них будет приведен ряд известных и несколько новых результатов.

1) Если рассматривать число успехов в n проводимых испытаниях, то, как известно, эта случайная величина имеет биномиальное $B(n,p)$-распределение с математическим ожиданием np, а число испытаний, требуемых для получения k успехов имеет отрицательное биномиальное распределение с производящей функцией

$$\pi_1(k,s) = (ps/(1-ps))^k$$

и математическим ожиданием k/p.

2) Производящая функция для числа испытаний $N_2(k)$ на момент появления первой группы из k успехов дается равенством

$$\pi_2(k,s) = p^k s^k (1-ps)/(1-s+p^k(1-p)s^{k+1}),$$

а

$$\mathbf{E}\, N_2(k) = (1-p^k)/(1-p)p^k, \quad k=1,2,\ldots.$$

3) Производящая функция и математическое ожидание случайной величины $N_3(k)$ – числа испытаний, необходимых для получения первой серии из k успехов, имеют следующий вид:

$$\pi_3(k,s) = p^{k-1}(1-p)s^k(1-ps)/(1-s+p^{k-1}(1-p)(1-ps)s^k),$$

и

$$\mathbf{E}\, N_3(k) = 1/p^{k-1}(1-p)^2, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

4) Рассмотрим случайную величину $N_4(k)$ – число успехов, полученных на момент формирования первой группы из k успехов, и математическое ожидание $E_4(k)$ этой величины. Поскольку речь идет только о появлениях успешных испытаний, можем не принимать во внимание неудачные попытки, сделанные до появления первого успеха, и принять за достоверное событие $\{X_1 = 1\}$. Перейдем к событиям

$$A_1 = \{X_2 = 0\}, \;\; A_2 = \{X_2 = 1, X_3 = 0\}, \ldots$$

где

$$A_r = \{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_r = 1, X_{r+1} = 0\}, \quad r = 2, 3, \ldots, k-1,$$

и

$$A_k = \{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_k = 1\},$$

с вероятностями $\mathbf{P}\{A_r\} = (1-p)p^{r-1}$, $r = 1, 2, \ldots, k-1$, и $\mathbf{P}\{A_k\} = p^{k-1}$.

Если происходит событие A_r, $r = 1, 2, \ldots, k-1$, то условное распределение $N_4(k)$ совпадает с безусловным распределением суммы успехов $r + N_4(k)$. В случае события A_k получаем, что

$$N_4(k) = k.$$

Учитывая все эти возможные варианты, получаем, что

$$\begin{aligned} E_4(k) &= kp^{k-1} + \sum_{r=1}^{k-1}(r + E_4(k))(1-p)p^{r-1} \\ &= kp^{k-1} + (1-p)\sum_{r=1}^{k-1}(rp^{r-1}) + (1-p)\sum_{r=1}^{k-1} E_4(k)p^{r-1} \\ &= kp^{k-1} + (1 - kp^{k-1} + (k-1)p^k)/(1-p) + E_4(k)(1-p^{k-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь мы воспользовались тем, что справедливы соотношения вида

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} &= (\sum_{k=0}^{n} xk)' = ((1 - x^{n+1})/(1-x))' \\ &= (1 - x^{n+1})/(1-x)^2 - (n+1)x^n/(1-x) \\ &= (1 - (n+1)xn + nx^{n+1})/(1-x)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$E_4(k) = (1 - p^k)/(1-p)p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Рассмотрение полной группы событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ позволяет получить и вид производящей функции $\pi_4(k,s)$ для случайной величины $N_4(k)$. Поскольку производящая функция для суммы $r + N_4(k)$ имеет вид $s^r \pi_4(k,s)$, то приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
\pi_4(k,s) &= p^{k-1}s^k + \sum_{r=1}^{k-1}(1-p)p^{r-1}s^r\pi_4(k,s) \\
&= p^{k-1}s^k + (1-p)\pi_4(k,s)\sum_{r=1}^{k-1}p^{r-1}s^r \\
&= p^{k-1}s^k + (1-p)\pi_4(k,s)s(1-p^{k-1}s^{k-1})/(1-ps),
\end{aligned} \tag{4}$$

из которого получаем, что

$$\pi_4(k,s) = p^{k-1}(1-ps)s^k/(1-s+(1-p)p^{k-1}s^k), \quad k = 1,2,\ldots \tag{5}$$

5) Перейдем к случайному числу $N_5(k)$ успехов, полученных к моменту завершения первой серии, насчитывающей не менее k успехов.

Вновь в качестве достоверного рассматриваем событие $\{X_1 = 1\}$. Переходим к событиям

$$A_1 = \{X_2 = 0\}$$

и

$$A_r = \{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_r = 1, X_{r+1} = 0\}, \quad r = 2,3,\ldots.$$

Если имеем дело с событием A_r, $r = 1,2,\ldots,k-1$, то условное распределение случайной величины $N_5(k)$ совпадает с безусловным распределением суммы $r + N_5(k)$. В случае события A_r, $r = k, k+1, \ldots$, получаем, что $N_5(k) = r$. Рассматривая все эти варианты с вероятностями $\mathbf{P}\{A_r\} = (1-p)p^{r-1}$, $r = 1,2,\ldots$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\, N_5(k) &= (1-p)\sum_{r=1}^{k-1}p^{r-1}(r + \mathbf{E}\, N_5(k)) + (1-p)\sum_{r=k}^{\infty}rp^{r-1} \\
&= (1-p)\sum_{r=1}^{\infty}rp^{r-1} + (1-p)\mathbf{E}\, N_5(k)\sum_{r=1}^{k-1}p^{r-1} \\
&= 1/(1-p) + \mathbf{E}\, N_5(k)(1-p^{k-1}),
\end{aligned} \tag{6}$$

из которого следует, что

$$\mathbf{E}\, N_5(k) = 1/(1-p)p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Используемая полная группа событий A_r, $r = 1, 2, \ldots$, позволяет получить похожие соотношения для производящих функций $\pi_5(k, s)$ случайных величин $N_5(k)$.

Приходим к равенствам

$$\pi_5(k,s) = (1-p)\sum_{r=1}^{k-1} p^{r-1}s^r \pi_5(k,s) + (1-p)\sum_{r=k}^{\infty} kp^{r-1}s^r$$
$$= (1-p)s\pi_5(k,s)(1-(ps)^{k-1})/(1-ps) + (1-p)s(ps)^{k-1}/(1-ps). \tag{8}$$

Следовательно,

$$\pi_5(k,s) = (1-p)p^{k-1}s^k/(1-s+(1-p)p^{k-1}s^k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

В частности, если рассматривать случайную величину $N_5(1)$, которая представляет собой число успехов в первой успешной серии, то

$$\pi_5(1,s) = (1-p)s/(1-ps) \ \text{ и } \ \mathbf{E}\, N_5(1) = 1/(1-p). \tag{9}$$

6) **О числе успехов до первой серии, насчитывающей ровно k успехов.**

Пусть теперь $N_6(k, l)$ обозначает максимально возможное число непересекающихся групп, каждая из которых состоит из k последовательных успехов, которые можно одновременно зафиксировать в последовательности $X_1, X_2, \ldots$ до момента появления первой серии из l успешных испытаний, и пусть $E_6(k, l) = \mathbf{E}\, N_6(k, l)$. В отличие от предыдущей ситуации эти группы могут соседствовать. Здесь также достаточно рассматривать только ситуации, когда $X_1 = 1$.

Пусть $rk < l \leqslant (r+1)k$, $r = 1, 2, \ldots$. В ситуациях, когда имеем дело с событиями $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, суммарная вероятность которых $(1-p^{k-1})$, условные распределения случайной величины $N_6(k, l)$ совпадают с ее безусловным распределением. В случае событий A_{jk}, A_{jk+1}, …, $A_{(j+1)k-1}$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$, вероятность которых равна

$$p^{jk-1}(1-p^k),$$

условное распределение $N_6(k, l)$ совпадает с распределением случайной величины $j + N_6(k, l)$. Если имеют место события A_{rk}, A_{rk+1}, …, A_{l-1}, суммарная вероятность которых равна $p^{rk-1}(1-p^{l-rk})$, то условное распределение $N_6(k, l)$ совпадает с распределением суммы

$r+N_6(k,l)$. Наконец, в случае события A_l, вероятность которого p^{l-1}, получаем, что $N_6(k,l)=0$. Учитывая все эти варианты, приходим к следующим равенствам для математических ожиданий:

$$\begin{aligned} E_6(k,l) &= (1-p^{k-1})E_6(k,l) \\ &+\sum_{j=1}^{r-1}(E_6(k,l)+j)p^{jk-1}(1-p^k)+(E_6(k,l)+r)p^{rk-1}(1-p^{l-rk}) \\ &= E_6(k,l)(1-p^{l-1})+p^k(1-p^k)\sum_{j=1}^{r-1} jp^{k(j-1)}+rp^{rk-1}\smile rp^{l-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{r-1} jp^{k(j-1)} = (1+(r-1)p^{kr}-rp^{k(r-1))})/(1-p^k)^r, \tag{11}$$

из (9) следует, что

$$\begin{aligned} E_6(k,l)p^{l-1} &= (p^{k-1}(1+(r-1)p^{kr}-rp^{k(r-1)})/(1-p^k) \\ &\quad + rp^{rk-1}-rp^{(r+1)k-1}-rp^{(r+1)k-1}-rp^{l-1}+rp^{l+k-1}) \\ &= (p^{k-1}(1+(r-1)p^{kr}-rp^{k(r-1)})+rp^{rk-1}-rp^{(r+1)k-1}-rp^{l-1}+rp^{l+k-1})/(1-p^k). \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} E_6(k,l) &= (p^{k-1}(1+(r-1)p^{kr}-rp^{k(r-1)}) \\ &\quad + rp^{rk-1}-rp^{(r+1)k-1}-rp^{l-1}+rp^{l+k-1})/(1-p^k)p^{l-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

7) Перейдем к числу успехов $N_7(m)$, полученных до появления серии из m или большего числа неудач, т.е. к моменту появления первой группы из m неудачных испытаний.

Если $X_1=1$, то условное распределение случайной величины $N_7(m)$ при этом условии совпадает с безусловным распределением случайной величины $N_7(m)+1$. Если имеют место события

$$\{X_1=0,\dots,X_r=0,X_{r+1}=1\},\quad r=1,2,\dots m-1,$$

то условное распределение $N_7(m)$ также совпадает с безусловным распределением $N_7(m)+1$. Отметим также, что $N_7(m)=0$ в случае события $\{X_1=0,\dots,X_m=0\}$, вероятность которого q^m. Для математического ожидания $\mathbf{E}\,N_7(m)$ получаем равенство

$$\mathbf{E}\, N_7(m) = (1 - q^m)(\mathbf{E}\, N_7(m) + 1), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

из которого следует, что

$$\mathbf{E}\, N_7(m) = (1 - q^m)/q^m, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

и, в частности, $\mathbf{E}\, N_7(1) = p/q$, что представляет собой классическое равенство для среднего значения числа успехов до первой неудачи.

Пусть $\pi_7(m, s)$ обозначает производящую функцию для случайной величины $N_7(m)$. Рассмотрение приведенных выше ситуаций приводит к равенству

$$\pi_7(m, s) = (1 - q^m)s\pi_7(m, s) + q^m. \tag{15}$$

Получаем, что

$$\pi_7(m, s) = q^m/(1 - s + sq^m), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

и, в частности, $\pi_7(1, s) = q/(1 - ps)$, что соответствует производящей функции для геометрического распределения числа успехов до первой неудачи.

8) Немного изменим условия. Пусть теперь $N_8(m)$ – число успехов, полученных к моменту фиксирования первой серии из m неудач ровно. Заметим, что такая конкретная серия из неудач может появиться намного позже появления первой группы, состоящей из не менее m последовательных неудачных испытаний.

В случае, когда имеем событие

$$\{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_m = 0, X_{m+1} = 1\},$$

вероятность которого pq^m, получаем, что $N_8(m) = 1$. В остальных ситуациях условное распределение случайной величины $N_8(m)$ совпадает с безусловным распределением случайной величины $N_8(m) + 1$. Приходим к равенству

$$\mathbf{E}\, N_8(m) = (1 - pq^m)(1 + \mathbf{E}\, N_8(m)) + pq^m, \tag{17}$$

из которого следует, что

$$\mathbf{E}\, N_8(m) = 1/pq^m, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Аналогичные рассуждения при рассмотрении производящих функций $\pi_8(m,s)$ случайных величин $N_8(m)$ позволяют написать соотношения

$$\pi_8(m,s) = pq^m s + (1-pq^m)s\pi_8(m,s) \tag{19}$$

и получить равенства

$$\pi_8(m,s) = pq^m s/(1-s+spq^m), \quad m = 1,2,\dots. \tag{20}$$

В частности,

$$\pi_8(1,s) = pqs/(1-ps). \tag{21}$$

9) Рассмотрим число серий из m успехов до момента завершения первой серии из k успехов. Обозначим эту случайную величину $N_9(m,k)$ и рассмотрим два варианта.

а) Пусть $m < k$. Можем, не умаляя общности, принять за достоверное событие $\{X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_m = 1\}$. Рассмотрим полную группу событий

$$A_0 = \{X_{m+1} = 0\}$$

и

$$A_r = \{X_{m+1} = 1, X_{m+2} = 1, \dots, X_{m+r} = 1, X_{m+r+1} = 0\}, \quad r = 1,2,\dots.$$

Если имеет место событие A_{k-m}, то завершена серия из k успехов и до нее не было серий длины m. В случае события A_0 получаем, что условное распределение случайной величины $N_9(m,k)$ совпадает с безусловным распределением величины $N_9(m,k)+1$, а появление остальных событий из данной последовательности сохраняет распределение случайной величины $N_9(m,k)$. Рассматривая эти варианты и учитывая, что

$$\mathbf{P}\{A_r\} = qp^r, \quad r = 0,1,\dots,$$

приходим к равенству

$$\mathbf{E}\,N_9(m,k) = q(1+\mathbf{E}\,N_9(m,k)) + (1-q-p^{k-m}q)\mathbf{E}\,N_9(m,k), \tag{22}$$

из которого следует, что

$$\mathbf{E}\,N_9(m,k) = 1/p^{k-m}, \quad m = 1,2,\dots,k-1. \tag{23}$$

Для производящей функции $\pi_9(m,k,s)$, учитывая рассматриваемые варианты, получаем соотношение

$$\pi_9(m,k,s) = p^{k-m}q + qs\pi_9(m,k,s) + (1-q-p^{k-m}q)\pi_9(m,k,s). \quad (24)$$

Следовательно,

$$\pi_9(m,k,s) = p^{k-m}/(1+p^{k-m}-s), \quad m = 1,2,\ldots,k-1. \quad (25)$$

b) Пусть $m > k$.

В этой ситуации можем принять за достоверное событие

$$\{X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1\}.$$

Если $X_{k+1} = 0$, то $N_9(m,k) = 0$.

Если имеет место событие

$$\{X_{k+1} = 1, \ldots, X_r = 1, X_{r+1} = 0\},\ r = k+1, \ldots, m-1, m+1, m+2, \ldots,$$

то условное распределение случайной величины $N_9(m,k)$ совпадает с ее безусловным распределением. Еще в одном случае, когда

$$X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 1, \ldots, X_m = 1, X_{m+1} = 0,$$

условное распределение $N_9(m,k)$ совпадает с безусловным распределением случайной величины $N_9(m,k)+1$.

Приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, N_9(m,k) &= qp^{m-k}(\mathbf{E}\, N_9(m,k)+1) + (1-q-qp^{m-k})\,\mathbf{E}\, N_9(m,k)\\ &= (1-p)p^{m-k} + p\,\mathbf{E}\, N_9(m,k).\end{aligned} \quad (26)$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\, N_9(m,k) = p^{m-k}. \quad (27)$$

Для производящей функции получаем аналогично, что

$$\pi_9(m,k,s) = 1-p+(1-p)p^{m-k}s\pi_9(m,k,s) + (p-(1-p)p^{m-k})\pi_9(m,k,s) \quad (28)$$

и

$$\pi_9(m,k,s) = 1/(1+p^{m-k}(1-s)), \quad m = k+1, k+2, \ldots. \quad (29)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\pi_9(m,k,s) &= p^{k-m}/(1+p^{k-m}-s), \quad m = 1,2,\ldots,k-1,\\ \pi_9(k,k,s) &= s,\\ \pi_9(m,k,s) &= 1/(1+p^{m-k}(1-s)), \quad m = k+1, k+2, \ldots.\end{aligned}$$

10) Изучим число различных серий успешных испытаний, сформированных к моменту появления серии из k успехов. Пусть $N_{10}(k)$ обозначает число таких серий. Рассмотрим два варианта – когда $X_1 = 1$ и когда $X_1 = 0$. Если $X_1 = 0$, то условное распределение $N_{10}(k)$ совпадает с безусловным распределением этой случайной величины. Пусть $X_1 = 1$. Если имеет место событие $\{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0\}$, вероятность которого qp^{k-1}, то $N_{10}(k) = 1$, поскольку в этом случае интересующая нас серия сформировалась, а до ее появления никаких других серий успехов не было. Для любого другого набора вида $\{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_r = 1, X_{r+1} = 0\}$ получаем, что условное распределение $N_{10}(k)$ совпадает с распределением случайной величины $1 + N_{10}(k)$. Учитывая эти варианты, получаем, в частности, что

$$\mathbf{E}\, N_{10}(k) = q\,\mathbf{E}\, N_{10}(k) + p(qp^{k-1} + (1 - qp^{k-1})(1 + \mathbf{E}\, N_{10}(k)). \qquad (30)$$

Из (29) следует, что

$$\mathbf{E}\, N_{10}(k) = 1/qp^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (31)$$

Переходя к рассмотрению производящей функции $\pi_{10}(k, s)$ случайной величины $N_{10}(k)$ и рассматривая те же ситуации, получаем аналогично соотношению (29) равенство

$$\pi_{10}(k, s) = q\pi_{10}(k, s) + p(qp^{k-1}s + (1 - qp^{k-1})s\pi_{10}(k, s)), \qquad (32)$$

из которого следует, что

$$\pi_{10}(k, s) = qp^{k-1}s/(1 - s + qp^{k-1}s), \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (33)$$

В частности,

$$\pi_{10}(1, s) = qs/(1 - ps) = \sum_{n=1}^{\infty} qp^{n-1}s^n, \qquad (34)$$

т.е.

$$\mathbf{P}\{N_{10}(1) = n\} = qp^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (35)$$

что соответствует появлению событий вида

$$\{X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = 0\}.$$

Литература

1. J. Bernoulli, *Ars conjectandi, opus posthumum.* Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis, Basel, Thurneysen Brothers, 1713.
2. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, М., Мир (1984).
3. С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров, *О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли.* — Вестник Санкт-Петербургского университета, Математика. Механика. Астрономия **9(67)**, вып. 2 (2022), 201–208.
4. С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров, *О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли. II.* — Вестник Санкт-Петербургского университета, Математика. Механика. Астрономия **10(68)**, вып. 1 (2023), 14–20.
5. С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров, *О сериях успехов и неудач в схемах Бернулли.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **515** (2023), 30–38.
6. С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров, *Об одном обобщении схемы Бернулли.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **535** (2024), 24–31.
7. M. Ahsanullah, S. M. Ananjevskii, V. B. Nevzorov, *About successes and failures in Bernoulli schemes.* — Africa Statistika **18**, No. 2 (2023), 3467–3474.

Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On groups and series of successes in Bernoulli sequences of random variables.

The paper considers sequences of independent identically distributed random variables $X_1, X_2, \dots$, taking values 0, 1 with probabilities

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - p, \quad \mathbf{P}\{X_n = 1\} = p,$$

where $0 < p < 1$.

The distributions and their properties for series and groups of successes are studied. The research started in the authors' previous papers is continued.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9
199034, С.-Петербург,
Россия

E-mail: `ananjevskii@mail.ru`, `valnev@mail.ru`

Поступило 9 сентября 2025 г.