Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 543, 2025 г.

В. Р. Крым

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ТЕОРИИ КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА

§1. Введение

О. Клейн в статье "Атомистичность электричества как закон квантовой теории" выдвинул гипотезу, что пространство теории Калуцы замкнуто в направлении пятой координаты с периодом l_{cgs}

$$l_{\text{cgs}} = \frac{hc\sqrt{2\varkappa}}{e} \approx 0.8 \cdot 10^{-30} \text{ cm}, \tag{1}$$

где $\varkappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, G_N – гравитационная постоянная Ньютона, e – фундаментальный заряд, c – скорость света, h – постоянная Планка [1, 2]. В единицах SI

$$l_{\text{Klein}} = \frac{hc\sqrt{2\varkappa 4\pi\varepsilon_0}}{e} = 8\pi\frac{h\sqrt{G_N\varepsilon_0}}{ec}, \tag{2}$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

Пространство теории Калуцы–Клейна является расслоенным пространством со структурной группой $U(1)$. Так как дополнительная координата на этой группе пространственноподобна, период вдоль этой координаты можно интерпретировать как длину, хотя возможны и другие интерпретации, которые обсуждаются в настоящей статье. Оператор электрического заряда в этой теории является оператором 5-импульса и коммутирует с оператором Дирака. Поэтому собственные значения оператора заряда всегда кратны фундаментальному заряду. Это объясняет квантование электрического заряда без гипотезы о существовании монополя.

Ключевые слова: теория Калуцы–Клейна; квантование электрического заряда; квазипериодичность по времени.

§2. Метрический тензор

Рассмотрим расслоенное пространство $P(M^4, U(1))$, где M^4 – гладкое 4-мерное многообразие. Метрический тензор задан на всем расслоенном пространстве:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \phi^2(A_\mu dx^\mu + kdx^4)^2, \tag{3}$$

где $g_{\mu\nu}$ – 4-мерный метрический тензор, A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля, k – масштабирующий множитель, ϕ^2 – некоторая постоянная. Обычно требуют, чтобы все компоненты метрического тензора были безразмерными. Однако, достаточно потребовать, чтобы инвариантный 5-мерный элемент длины (3) имел размерность квадрата длины. В матричных обозначениях

$$\left(\overline{g}_{ij}\right)_{i,j=0,..,4} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & k\phi^2 A_\mu \\ \hline k\phi^2 A_\nu & k^2\phi^2 \end{array}\right). \tag{4}$$

Предположим, что $g_{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $(-,+,+,+)$ [1]. Определитель 5-метрического тензора $\det(\overline{g}_{ij})_{i,j=0,..,4} = k^2\phi^2 \det g$, поэтому 5-мерный метрический тензор имеет сигнатуру $(-,+,+,+,+)$. Матрица обратного метрического тензора

$$\left(\overline{g}^{ij}\right)_{i,j=0,..,4} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & -A^\mu/k \\ \hline -A^\nu/k & A_\alpha A^\alpha/k^2 + 1/(k^2\phi^2) \end{array}\right). \tag{5}$$

Греческие индексы поднимаются с помощью 4-мерного метрического тензора $g^{\mu\nu}$ как обычно.

Эйнштейн и Бергман предложили следующие три гипотезы [4]:

1. Рассматривается 5-мерное многообразие с метрическим тензором, который приводит к правильным уравнениям движения и уравнениям поля.

2. Это многообразие замкнуто в направлении пятой координаты, т.е. пятая координата x^4 периодична. Следовательно, макроскопические физические величины не зависят от пятой координаты, но волновые функции квантовой механики периодически зависят от x^4.

---

[1] 4-метрика $g_{\mu\nu}$ также может иметь сигнатуру $(+,-,-,-)$. Выбор такой сигнатуры эквивалентен замене $g_{\mu\nu} \mapsto -g_{\mu\nu}$ [3]. Некоторые физические величины, в том числе тензор энергии-импульса электромагнитного поля, при такой замене меняют знак. Замена 5-метрики $\overline{g}_{ij} \mapsto -\overline{g}_{ij}$ эквивалентна замене $g_{\mu\nu} \mapsto -g_{\mu\nu}$ и $\phi^2 \mapsto -\phi^2$. Тогда $\det(\overline{g}_{ij}) = -k^2\phi^2 \det(g_{\mu\nu})$ и следовательно, 5-мерный метрический тензор $\overline{g}_{ij}$ имеет сигнатуру $(+,-,-,-,-)$. *Итак, пятая координата x^4 оказывается пространственноподобной в обоих случаях.*

3. Через каждую точку многообразия проходит замкнутая и гладкая геодезическая (координатные линии x^4).

Уравнения движения заряженной частицы как уравнения геодезических. Рассмотрим функционал

$$S(x(\cdot)) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} L(x(\tau), \dot{x}(\tau))\, d\tau, \quad \text{где} \quad L(x,u) = \frac{m}{2}\overline{g}_{ij}u^i u^j \tag{6}$$

и $u^i = \dfrac{dx^i}{d\tau}$. Символы Кристоффеля симметричной римановой связности

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \frac{\phi^2}{2}(A_\nu F_\mu{}^\alpha + A_\mu F_\nu{}^\alpha), \tag{7}$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Big(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\Big)$, что совпадает с обычной формулой для 4-мерной метрики $g_{\mu\nu}$. Другие компоненты связности имеют вид

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\nu 4} = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{4\nu} = \frac{k\phi^2}{2}F_\nu{}^\alpha, \tag{8}$$

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{44} = 0, \qquad \overline{\Gamma}^{4}_{44} = 0, \tag{9}$$

$$\overline{\Gamma}^{4}_{\mu\nu} = -\frac{1}{k}A_\alpha\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{\phi^2}{2k}A_\alpha\big(A_\nu F_\mu{}^\alpha + A_\mu F_\nu{}^\alpha\big) + \frac{1}{2k}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right), \tag{10}$$

$$\overline{\Gamma}^{4}_{\nu 4} = \overline{\Gamma}^{4}_{4\nu} = -\frac{\phi^2}{2}A_\alpha F_\nu{}^\alpha. \tag{11}$$

В силу уравнений Эйлера $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial u^k} = \dfrac{\partial L}{\partial x^k}$, $k = 0, \ldots, 4$, получаем

$$\dot{u}^\alpha + \sum_{i,j=0}^{4} \overline{\Gamma}^{\alpha}_{ij}u^i u^j = 0.$$

Так как $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{44} = 0$,

$$\dot{u}^\alpha + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{4\nu}u^4 u^\nu + \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\mu 4}u^\mu u^4 = 0. \tag{12}$$

В силу условия цилиндричности, $\dfrac{\partial L}{\partial u^4} = m\phi^2(A_\mu u^\mu + ku^4) = Q = \text{const}$ и $A_\mu\dot{x}^\mu + k\dot{x}^4 \equiv \dfrac{Q}{m\phi^2}$. Поэтому для пятой координаты вектора скорости

$$ku^4 = \frac{Q}{m\phi^2} - A_\alpha u^\alpha. \tag{13}$$

Уравнения геодезических

$$\dot{u}^\alpha + \overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + 2\overline{\Gamma}^\alpha_{4\nu} u^\nu \frac{1}{k}\left(\frac{Q}{m\phi^2} - A_\mu u^\mu\right) = 0, \tag{14}$$

$$\dot{u}^\alpha + \sum_{\mu,\nu=0}^{3}\left(\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{k}A_\mu\overline{\Gamma}^\alpha_{4\nu} - \frac{1}{k}A_\nu\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu 4}\right)u^\mu u^\nu + 2\frac{Q}{km\phi^2}\sum_{\nu=0}^{3}\overline{\Gamma}^\alpha_{4\nu}u^\nu = 0. \tag{15}$$

В силу (7) и (8),

$$\begin{cases} \dot{u}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \dfrac{Q}{m}F^\alpha_\nu u^\nu = 0 \\ ku^4 + A_\alpha u^\alpha = \dfrac{Q}{m\phi^2}. \end{cases} \tag{16}$$

Это релятивистские уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле [5]. Постоянная $\frac{Q}{m}$ – это отношение заряда к массе частицы. Эффективная связность $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, действующая на частицу, совпадает с симметричной римановой связностью для метрики $g_{\mu\nu}$. В единицах SI $F_{\mu\nu} = (\frac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B})$, поэтому размерность $[\frac{Q}{m}F^\alpha_\nu] = \frac{\text{Кл}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}}\frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{1}{\text{с}}$ и $[\Gamma^\alpha_{\mu\nu}] = \frac{1}{\text{м}}$. Поэтому $\frac{\text{м}}{[\tau]^2} = [\frac{Q}{m}F^\alpha_\nu u^\nu] = \frac{1}{\text{с}}\frac{\text{м}}{[\tau]}$. Следовательно, $[\tau] =$с и функционал (6) имеет размерность Дж·с, как и должно быть для функционала действия.

Уравнения геодезических на этом многообразии допускают произвольный 4-вектор начальной скорости, но пятая координата вектора начальной скорости определяется уравнением (13) и не является произвольной. Координатные линии x^4 имеют вектор скорости $(0,0,0,0{,}1)$, т.е. начальный вектор 4-скорости – это ноль-вектор. Решение уравнений (16) в этом случае будет координатными линиями x^4, если частица заряжена. Постоянная ϕ^2 определяется уравнениями поля (24): $\phi^2 = \dfrac{16\pi G_N}{c^4\mu_0} = 3.30424\cdot 10^{-37}\ \frac{\text{м}^2}{\text{В}^2\cdot\text{с}^2}$ и $\phi = 5.74826\cdot 10^{-19}\ \frac{\text{м}}{\text{В}\cdot\text{с}}$.

Полный набор начальных условий для уравнений геодезических (16) включает произвольный 4-вектор $\dot{x}^\alpha_0$ и отношение заряда к массе частицы (отношение пятой координаты импульса к массе). Этот набор начальных условий принадлежит *смешанному расслоению*, состоящему из подпространства 4-векторов и одномерного подпространства *ко*-векторов. Такие расслоения возникают в неголономных вариационных задачах для неинтегрируемых распределений. Это смешанное расслоение проф. А. М. Вершик предложил назвать *кентавром* [6–8].

Второе из уравнений (16) определяет несколько более общий объект, чем неголономное распределение. *Распределение* в касательном расслоении – это поле подпространств, заданное системой уравнений $\omega^l(X) = 0$, где ω^l – семейство дифференциальных 1-форм. Второе из уравнений (16) имеет вид $\omega(\dot{x}) = \text{const}$. Такой объект можно назвать *аффинным распределением*.

§3. Квантование электрического заряда

Пятая координата 5-импульса $p_4 = m\sum\limits_{j=0}^{4} \overline{g}_{4j}u^j = m\phi^2(A_\mu u^\mu + ku^4) = Q$ соответствует заряду частицы. Соотношение де Бройля для фундаментального заряда дает $\lambda = h/e = 4.135669 \cdot 10^{-15}$ В $\cdot$ с. Так как в единицах SI размерность 4-потенциала $\frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{м}}$ и размерность пространственных координат $[x^\mu]$ =м, то из (13) следует, что $[kx^4]$ =В·с.

В теории Калуцы–Клейна заряд частицы – это её импульс в направлении координаты x^4. Оператор импульса в квантовой механике имеет вид $\widehat{p}_\nu = -i\hbar\partial_\nu$. Оператор импульса, соответствующий координате x^4, имеет смысл оператора заряда и имеет вид $\widehat{p}_4 = -\frac{i\hbar}{k}\partial_4$, где k – масштабирующий множитель. Единица измерения (масштаб) вдоль пятой координаты пока не фиксирована. Волновая функция электрона должна быть собственной функцией оператора заряда с собственным значением, равным заряду электрона:

$$-\frac{i\hbar}{k}\frac{\partial}{\partial x^4}\psi = e\psi. \tag{17}$$

Тогда волновая функция ψ имеет вид

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}kx^4\right)\varphi(x), \tag{18}$$

где φ не зависит от x^4. Тогда период вдоль пятой координаты равен $\frac{2\pi\hbar}{ek}$.

О. Клейн использовал следующую метрику [2]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (\beta A_\mu dx^\mu + dx^4)^2. \tag{19}$$

Это эквивалентно выбору масштабирующего множителя $k = 1/\beta = 1/\phi$. При таком выборе размерность пятой координаты – это размерность длины. Период пятой координаты $l_{x^4} = (h/e)\phi = 2.37729 \cdot 10^{-33}$ м.

Таблица 1. Масштабирующий множитель k и интерпретация пятой координаты.

k	$\overline{g}_{44}$	$[x^4]$	*Физический смысл*	*Период*
$1/\phi$	1	м	длина	$(h/e)\phi$
$1/e$	ϕ^2/e^2	Дж·с	действие	h
1	ϕ^2	В·с	электрическая координата	h/e

Эйнштейн и Бергман использовали неявно тот же самый нормирующий множитель в силу их требования $\overline{g}_{44} = 1$. Соотношение с планковской длиной:

$$l_{x^4} = \frac{4\pi}{\sqrt{\alpha}}\, l_{\text{Planck}}, \tag{20}$$

где α – постоянная тонкой структуры. Период пятой координаты примерно в 147 раз больше, чем планковская длина.

Ю.Б. Румер использовал масштабирующий множитель $k = 1/e$. Период пятой координаты в его теории совпал с постоянной Планка h и размерность пятой координаты совпала с размерностью действия Дж·с [9].

Также возможен выбор масштабирующего множителя $k = 1$. Тогда пятая координата будет иметь размерность В·с и ее период будет равен длине волны де Бройля $h/e = 4.135669 \cdot 10^{-15}$ В · с (что совпадает с удвоенным квантом магнитного потока в эффекте Джозефсона [10]). Варианты интерпретации пятой координаты приведены в табл. 1.

§4. Уравнения поля

Вариационный принцип для поля метрического тензора имеет вид

$$\overline{S} = -\frac{c^3}{16\pi G_N} \int\limits_{\Omega} \overline{R}\, \sqrt{|\det g(x)|}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \;\to\; \min, \tag{21}$$

где $\overline{R}$ – скалярная кривизна для метрики (3). Тензор кривизны определяется, как обычно:

$$\overline{R}^i{}_{jkl} = \partial_k \overline{\Gamma}^i_{lj} - \partial_l \overline{\Gamma}^i_{kj} + \sum_{s=0}^{4} \left(\overline{\Gamma}^s_{lj} \overline{\Gamma}^i_{ks} - \overline{\Gamma}^s_{kj} \overline{\Gamma}^i_{ls} \right), \quad i,j,k,l = 0,\ldots,4. \tag{22}$$

Поэтому скалярная кривизна [11]

$$\overline{R} = R - \frac{\phi^2}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{23}$$

Варьирование метрики $g_{\mu\nu}$ в функционале (21) приводит к уравнениям Эйнштейна в присутствии электромагнитного поля:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\phi^2}{2} \left(F^{\alpha}_{\mu} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \tag{24}$$

Правая часть (24) – это тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Основной результат теории Калуцы–Клейна состоит в том, что это уравнение выводится из скалярной кривизны (23), а не из функционала действия, содержащего несколько слагаемых, отдельно для гравитационного поля и отдельно для электромагнитного. Так как тензор энергии-импульса электромагнитного поля $T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\alpha}_{\mu} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)$, то константа $\frac{\phi^2}{2} = \frac{8\pi G_N}{c^4 \mu_0}$ и следовательно, $\phi^2 = \frac{16\pi G_N}{c^4 \mu_0}$ $= 3.30424 \cdot 10^{-37} \frac{\text{м}^2}{\text{В}^2 \cdot \text{с}^2}$. Итак, $\phi = 5.74826 \cdot 10^{-19} \frac{\text{м}}{\text{В} \cdot \text{с}}$. Варьирование 4-потенциала A_μ в функционале (21) приводит к уравнениям Максвелла в пустоте: $\nabla_\alpha F^{\alpha\nu} = 0$.

§5. Локализация времени

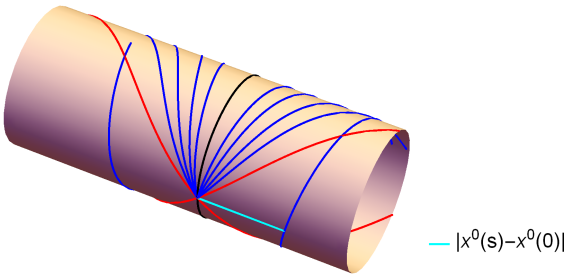

Рис. 1. Квазипериодичность по времени.

В классическом приближении материальная точка движется так, что ее касательный вектор $\gamma'(s)$ лежит в конусе будущего в касательном пространстве в точке $\gamma(s)$. Собственное время неподвижного наблюдателя – это интеграл от векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^0}$. Для другого наблюдателя это интеграл от векторного поля $\frac{\partial}{\partial x'^0}$. Если их мировые линии пересекаются, то эти касательные векторы лежат в одном конусе будущего в касательном пространстве в точке пересечения мировых линий. Будем говорить, что многообразие *квазипериодично по времени*, если $|x^0(s) - x^0(0)|$ сначала увеличивается, а затем достигает минимума. Значение $s = T$ в первом таком локальном минимуме будем называть *квазипериодом* (рис. 1). Будем говорить, что многообразие *планковски квазипериодично по времени*, если величина $|x^0(s) - x^0(0)|$ за квазипериод имеет планковский порядок величины. Квазипериод зависит от выбора наблюдателя.

Метрический тензор в случае планковски квазипериодичного по времени многообразия остается без изменений. Проблем с замкнутыми времениподобными путями не возникает. Физическое время – это интеграл от векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^0}$, т.е. число оборотов вокруг окружности, длина которой имеет планковский порядок. Обычное пространство-время оказывается накрывающим пространством для цилиндра $S^1 \times R^3$, рис. 1.

§6. Главное расслоение стандартной модели

Пусть $\mathcal{B}$ – связность в главном расслоении $P(M^4, G)$, где $G = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Рассмотрим расслоенное пространство $P(M^4, G)$. Распределение связности $\mathcal{B}$ – это поле четырехмерных касательных подпространств и его можно рассматривать как связность Эресмана. Форма связности имеет вид

$$\omega = \sum_{\nu=0}^{3} \left(ig_{\text{em}} \frac{Y}{2} B_\nu + ig_{\text{w}} \sum_{k=1}^{3} \frac{\tau^k}{2} W_\nu^k + ig_{\text{c}} \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda^a}{2} G_\nu^a \right) dx^\nu + dg, \qquad (25)$$

где g_{em}, g_{w} и g_{c} – константы связи электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий, B_ν, W_ν^k и G_ν^a – потенциалы соответствующих полей, Y – гиперзаряд, который можно рассматривать как координатное векторное поле на $U(1)$, τ^k – матрицы Паули, λ^a – матрицы Гелл–Манна. Обычно эта форма рассматривается в единице группы G, но ее можно продолжить по левоинвариантности на все расслоенное

пространство. Горизонтальный лифт производных ∂_ν имеет вид [12]

$$D_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} - ig_{\mathrm{em}}\frac{Y}{2}B_\nu - ig_{\mathrm{w}}\sum_{k=1}^{3}\frac{\tau^k}{2}W_\nu^k - ig_{\mathrm{c}}\sum_{a=1}^{8}\frac{\lambda^a}{2}G_\nu^a. \tag{26}$$

Выполнятся тождество $\omega(D_\nu) = 0$ (это нуль в алгебре Ли группы G). Известно, что фундаментальный заряд e связан следующим образом с константами электромагнитного и слабого взаимодействия:

$$e = g_{\mathrm{em}}\cos\theta_W = g_{\mathrm{em}}\frac{g_{\mathrm{w}}}{\sqrt{g_{\mathrm{w}}^2 + g_{\mathrm{em}}^2}}, \tag{27}$$

где θ_W – угол Вайнберга, $\sin^2\theta_W \approx 0.2397$ [12, стр. 99]. В этом расслоенном пространстве 12 операторов заряда, но с учетом этого соотношения нам понадобятся только $\widehat{p}_4 = -\frac{i\hbar}{k}\frac{\partial}{\partial x^4}$, где x^4 – координата на группе $U(1)$, и некоторый оператор, соответствующий левоинвариантному векторному полю на $SU(2)$, которое в единице группы обращается в $i\tau^3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Напомним, что векторные поля на гладком многообразии – это операторы типа дифференцирования, действующие на гладкие функции, заданные на этом многообразии. Матричная экспонента $\exp(i\tau^3 x^5) = \begin{pmatrix} e^{ix^5} & 0 \\ 0 & e^{-ix^5} \end{pmatrix}$. Левоинвариантное векторное поле $\begin{pmatrix} ie^{ix^5} & 0 \\ 0 & -ie^{-ix^5} \end{pmatrix} = \exp(i\tau^3 x^5)i\tau^3$. Соответствующий оператор типа дифференцирования $i\tau^3\frac{\partial}{\partial x^5}$. Тогда соответствующий оператор заряда $\widehat{p}_5 = -\frac{i\hbar}{k}\tau^3\frac{\partial}{\partial x^5}$.

Мы ищем волновую функцию, которая является собственной функцией этих операторов с собственными значениями $\xi_{\mathrm{em}} = e\cos\theta_W$ и $\xi_{\mathrm{w}} = e\sin\theta_W$. Она имеет вид

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i\xi_{\mathrm{em}}}{\hbar}kx^4\right)\exp\left(\frac{\xi_{\mathrm{w}}}{\hbar}i\tau^3 kx^5\right)\varphi(x), \tag{28}$$

где φ не зависит от x^4 и x^5. Тогда период вдоль координаты x^4 равен $\frac{2\pi\hbar}{\xi_{\mathrm{em}}k}$, а период вдоль координаты x^5 равен $\frac{2\pi\hbar}{\xi_{\mathrm{w}}k}$. Оператор электрического заряда (с собственным значением e) будет иметь вид (рис. 2)

$$\widehat{q} = \cos\theta_W\widehat{p}_4 + \sin\theta_W\widehat{p}_5. \tag{29}$$

Однако, на группе $SU(2)$ нет выделенной системы координат. В качестве координаты x^5 можно взять $\exp(i\tau^1 x^5)$ или $\exp(i\tau^2 x^5)$. Возможно,

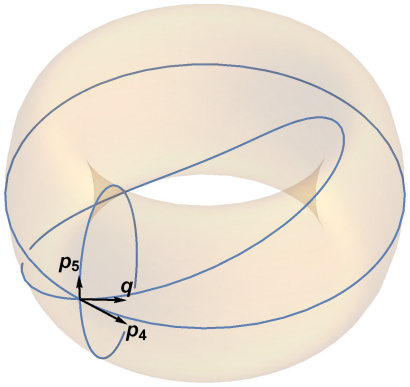

Рис. 2. Операторы заряда как векторы в алгебре Ли.

что трем базисным векторам алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ соответствуют три поколения фундаментальных частиц (лептонное число). Гомотопически эти пути эквивалентны. Есть процессы, в которых лептонное число изменяется.

Итак, мы представили *топологическое* объяснение известного факта, что электрический заряд любой частицы всегда кратен фундаментальному заряду e. Напомним, что магнитный монополь, предложенный Дираком также с целью объяснить это явление, никогда не был обнаружен экспериментально [13–15].

Метрический тензор на расслоенном пространстве с группой $SU(2)$ выписан в работе [16]. Координаты на $SU(2)$ оказываются времениподобными. В целом это многообразие должно быть квазипериодично по времени, причем векторное поле, соответствующее физическому времени, может поворачиваться не только по отношению к пространственным координатам, но и по отношению к координатам на $SU(2)$. Это соответствует G-инвариантному векторному полю на главном расслоении с ненулевой вертикальной проекцией.

Список литературы

1. O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensional relativitätstheorie.* — Zeits. f. Phys., **37** (1926), 895–906.
2. O. Klein, *The atomicity of electricity as a quantum theory law.* — Nature, **118** (1926), 516–516.
3. J. L. Singe, *Relativity: The General Theory.* — North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
4. A. Einstein, P. Bergmann, *On a Generalization of Kaluza's Theory of Electricity.* — Annals of Mathematics, **39(3)** (1938), 683–701.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т.* 2. *Теория поля.* — М.: Наука (1988).
6. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы, геометрия распределений и вариационные задачи.* — Итоги Науки и Техники, сер. Совр. Пробл. Мат., Фунд. Напр., **16** (1987), 5–85.
7. В. Р. Крым, *Тензор кривизны Схоутена и уравнение Якоби в субримановой геометрии.* — Записки Научн. Семин. ПОМИ РАН, **498** (2020), 121—134.
8. В. Р. Крым, *Об экспоненциальном отображении геодезических в субримановой геометрии.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ РАН, **528** (2023), 153–165.
9. Ю. Б. Румер, *Исследования по* 5*-оптике.* — М.: Гостехиздат, 1956.
10. B. D. Josephson, *The discovery of tunnelling supercurrents.* — Reviews of Modern Physics, **46** (1974), 251–254.
11. V. R. Krym, *Comparison of basic equations of the Kaluza–Klein theory with the nonholonomic model of space-time of the sub-Lorentzian geometry.* — International J. Modern Physics A, **38** (2023), 9–10, 2350049.
12. Г. Кейн, *Современная физика элементарных частиц.* Пер. с англ.: *G. Kane.* Modern elementary particle physics. Addison-Wesley, 1987. — М.: Мир, (1990).
13. P. A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field.* — Proc. Roy. Soc. Lond. A, **133(821)** (1931), 60–72.
14. K. A. Milton, *Theoretical and experimental status of magnetic monopoles.* — Reports on Progress in Physics, **69(6)** (2006), 1637–1711.
15. N. E. Mavromatos, V. A. Mitsou, *Magnetic monopoles revisited: Models and searches at colliders and in the cosmos.* — International J. Modern Physics A, **35(23)** (2020), 2030012.
16. В. Р. Крым, *Космология с биинвариантной метрикой на главном расслоении с неабелевой группой Ли* $SU(2)$. — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия, **12 (70)**, Вып. 4 (2025), 824–834.

Krym V. R. Topological quantization of the electric charge in the Kaluza–Klein theory.

The space of the Kaluza–Klein theory is the principal bundle with the structure group $U(1)$. The electric charge operator is the 5th component of the 5-momentum in this theory. Since the electric charge operator commutes with the Dirac operator, its eigenvalues are observables and due to the

structure group topology they are multiples of the fundamental charge. The magnetic monopole hypothesis is not necessary to explain quantization of the electric charge. We also consider the principal bundle with the structure group $U(1) \times SU(2)$. The fundamental charge can be expressed using the weak mixing angle (Weinberg angle) and the Lie algebra of this group. The quasiperiodic in time manifold instead of the cyclic time is suggested.

Санкт-Петербургский
Государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: v.krym@spbu.ru

Поступило 18 сентября 2025 г.