Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 543, 2025 г.

В. В. Корняк

ГРУППЫ ВЕЙЛЯ–ГЕЙЗЕНБЕРГА И КЛИФФОРДА И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

§1. Введение

Конструктивную версию физической теории можно построить, заменив бесконечные множества, присутствующие в формализме теории, конечными. Такая замена не создаст проблем с описанием эмпирической реальности, поскольку конечные множества могут быть сколь угодно большими.

Стандартная квантовая механика базируется на непрерывных подгруппах общей унитарной группы, то есть на унитарных представлениях групп Ли. Непрерывная унитарная группа выполняет в стандартной квантовой механике двойную функцию: (1) её одномерные подгруппы описывают эволюции замкнутых квантовых систем; (2) группа в целом описывает симметрии квантовых систем.

Мы рассматриваем версию квантовой механики, где вместо групп Ли используются конечные группы [1, 2]. В этой модификации квантовой механики для описания унитарной эволюции вместо непрерывной одномерной группы используется конечная группа циклических перестановок.

Учет дополнительных условий, обеспечивающих возможность описания квантовых интерференций, приводит к конечной группе Вейля–Гейзенберга. В этой группе с целью устранения ненаблюдаемых глобальных фазовых эффектов выделяется подмножество элементов, называемых операторами смещения. Фактически операторы смещения образуют факторгруппу группы Вейля–Гейзенберга по её центру. Операторы смещения порождают конечные циклические группы, описывающие все возможные в конструктивном контексте унитарные квантовые эволюции.

Группой симметрий квантовых систем в нашем подходе выступает конечная группа Клиффорда, представляющая собой группу автоморфизмов группы Вейля–Гейзенберга.

Ключевые слова: конечная циклическая группа, группа Вейля–Гейзенберга, группа Клиффорда, квантовая эволюция, конструктивные квантовые состояния.

Замена непрерывных групп конечными приводит к ряду физически значимых последствий:

- Отсутствие наблюдений квантовых интерференций и запутанности между элементарными частицами разных типов в экспериментах получает естественное объяснение.
- Между подсистемами квантовой системы с гильбертовыми пространствами взаимно простых размерностей не существует ни квантовых корреляций, ни энергетических взаимодействий.
- Существенно квантовое поведение проявляется только в тех (под)системах, размерности гильбертовых пространств которых являются степенями простых чисел.

Отказ от непрерывной унитарной симметрии предполагает модификацию понятия квантовых состояний. С помощью компьютерных вычислений мы изучаем возможный подход к построению конструктивных квантовых состояний, основанный на учете симметрий состояний относительно группы Клиффорда и требовании рациональности борновских вероятностей переходов между состояниями в соответствии с естественной в конструктивном контексте частотной интерпретацией вероятности.

§2. Описание квантовой эволюции конечной циклической группой

В стандартной квантовой механике эволюция замкнутой системы описывается уравнением Шредингера

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_t\right\rangle = H\left|\psi_t\right\rangle,$$

где H – оператор Гамильтона. Решение этого уравнения приводит к непрерывной однопараметрической унитарной группе

$$U_t = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{H}{\hbar}t} = \left(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{H}{\hbar}}\right)^t = \mathrm{E}^t. \tag{1}$$

Без потерь для описания физической реальности можно предположить, что время t – целочисленный параметр, а оператор E – элемент представления конечной циклической группы $\mathbb{Z}_N$, где N большое натуральное число. В [3], в предположении, что время t задано в единицах Планка, приведены оценки $N \sim \begin{cases} \mathrm{Exp}(\mathrm{Exp}(20)) & \text{для 1 см}^3\text{ вещества} \\ \mathrm{Exp}(\mathrm{Exp}(123)) & \text{для всей Вселенной.} \end{cases}$.

2.1. Непрерывная и конечная группы. Единственная одномерная компактная группа Ли изоморфна унитарной группе $\mathsf{U}(1)$, обычно реализуемой как единичная окружность в комплексной плоскости. В приложениях эту группу часто аппроксимируют конечной группой, $\mathsf{U}(1) \approx \mathbb{Z}_N$, выбрав число N достаточно большим[1].

Однако конечная циклическая группа $\mathbb{Z}_N$ – значительно более сложный математический объект по сравнению с непрерывной группой $\mathsf{U}(1)$. Если $N = n_1 n_2$ и $\gcd(n_1, n_2) = 1$, т.е. n_1 и n_2 – взаимно простые числа, то справедлив изоморфизм

$$\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}.$$

Проведя подобные разложения до конца мы придем к изоморфизму

$$\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\ell_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_M^{\ell_M}}, \tag{2}$$

где $N = p_1^{\ell_1} \cdots p_M^{\ell_M}$ – произведение степеней различных простых чисел.

Топологически группа $\mathbb{Z}_N$ представляет собой дискретный многомерный тор, топология которого напоминает одномерную топологию окружности только если N – простое число.

Группу $\mathbb{Z}_N$ можно отождествить с кольцом целых чисел по модулю N, расширив набор операций: $\{+\} \to \{+, \times\}$.

2.2. Поля Галуа и квантовая физика. Циклическую группу вида $\mathbb{Z}_{p^\ell}$ можно рассматривать как подструктуру поля Галуа $\mathbb{F}_{p^\ell}$. Преимуществом поля $\mathbb{F}_{p^\ell}$ над кольцом $\mathbb{Z}_{p^\ell}$ является мультипликативная обратимость всех ненулевых элементов.
Поля Галуа [4] можно описать рекурсией по делителям числа ℓ:

$\ell = m \cdot n$ **::** Если $\ell = m \cdot n$, то поле Галуа $\mathbb{F}_{p^\ell}$ можно построить как расширение степени n поля Галуа $\mathbb{F}_{p^m}$, т.е. как n-мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_{p^m}$, базис которого образуют степени корня произвольно выбранного неприводимого полинома степени n над $\mathbb{F}_{p^m}$.

Произвольный элемент поля Галуа (“число Галуа”) имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \cdots + \alpha_{\ell-1} \varepsilon^{\ell-1} \in \mathbb{F}_{p^\ell},$$

[1]Фактически подобные аппроксимации лежат в основе дифференциального исчисления и анализа в целом.

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_{\ell-1}$ – элементы подполя $\mathbb{F}_{p^m}$, а ε – корень неприводимого полинома вида $\Phi(x) = \phi_0 + \phi_1 x + \cdots + \phi_{\ell-1}x^{\ell-1} + x^\ell$, где $\phi_0, \ldots, \phi_{\ell-1} \in \mathbb{F}_{p^m}$.

Умножение элементов $\mathbb{F}_{p^\ell}$ определяется как полиномиальное умножение по модулю выбранного полинома $\Phi(x)$, а сложением является обычное векторное сложение.

Следом относительно расширения $\mathbb{F}_{p^\ell} \supset \mathbb{F}_{p^m}$ называется отображение $\mathbb{F}_{p^\ell} \to \mathbb{F}_{p^m}$, определяемое для $\alpha \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ формулой

$$\mathrm{tr}(\alpha) \equiv \mathrm{tr}_{\ell/m}(\alpha) = \alpha + \alpha^{p^m} + \alpha^{p^{m\cdot 2}} + \cdots + \alpha^{p^{m\cdot(n-1)}} \in \mathbb{F}_{p^m}.$$

$\ell = 1 \cdot n$ **::** Если $m = 1$, то подполе $\mathbb{F}_{p^m}$ является *простым полем* $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}_p$.

Поля Галуа являются естественным средством описания **многочастичных квантовых систем** неразличимых частиц. Квантовую систему с числом степеней свободы $N = p^\ell$ можно представить как совокупность n идентичных подсистем, каждая из которых имеет p^m степеней свободы. Переменные такой системы принимают значения в поле $\mathbb{F}_{p^\ell}$, а ее гильбертово пространство имеет структуру

$$\mathcal{H}_{p^\ell} \cong \underbrace{\mathcal{H}_{p^m} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{p^m}}_{n}.$$

2.3. Перестановочное представление группы $\mathbb{Z}_N$. Стандартным порождающим элементом *регулярного* представления группы $\mathbb{Z}_N$ в N-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$ является матрица циклической перестановки

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Общепринятое обозначение X для этой матрицы связано с тем, что при $N = 2$ она совпадает с матрицей Паули σ_x

$$X|_{N=2} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Регулярное представление $\mathbb{Z}_N$ порождается также любым элементом вида X^v при условии, что целое число v является мультипликативно обратимым элементом кольца $\mathbb{Z}_N$, т.е. $\gcd(v, N) = 1$.

Базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$

$$\mathrm{B}_X = (|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle)\ , \tag{4}$$

ассоциированный с матрицей X, называется базисом *координат* или *онтическим* ('т Хоофт [5]) или *вычислительным* (квантовая информатика) базисом.

Квантовый оператор координаты в базисе B_X имеет диагональный вид

$$\widehat{x} = \sum_{x=0}^{N-1} x\,|x\rangle\,\langle x| = \mathrm{diag}\,(0, 1, \ldots, N-1)\,.$$

Заметим, что эволюция оператора $\widehat{x}$ порождаемая элементом $X_v = X^v$

$$\widehat{x}_t = X_v^t \widehat{x}_0 X_v^{-t} \tag{5}$$

представляет собой "равномерное движение со скоростью v", поскольку в компонентах уравнение (5) имеет вид

$$x_t = x_0 + vt \mod N.$$

В размерности $N = p^\ell$ с каждой степенью свободы $\nu \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ связан генератор циклической группы $\mathbb{Z}_N$ вида

$$X_\nu = \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_{p^\ell}} |\gamma + \nu\rangle\,\langle\gamma|\ .$$

2.4. Разложение на неприводимые компоненты. Регулярное представление любой конечной группы содержит все её неприводимые представления. Для циклической группы $\mathbb{Z}_N$ эти представления одномерны и порождаются степенями примитивного корня из единицы $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/N}$. Разложение генератора X в прямую сумму генераторов неприводимых компонент можно получить с помощью преобразования Фурье

$$Z = FXF^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{N-1} \end{pmatrix}\ , \tag{6}$$

где матрица Фурье имеет вид

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\omega^{ij}\right), \quad i, j = 0, \ldots, N-1\,. \tag{7}$$

Матрица Z является обобщением матрицы Паули σ_z

$$Z|_{N=2} = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

С матрицей Z связан *базис импульсов*

$$\mathrm{B}_Z = \left(\left|\widetilde{0}\right\rangle, \left|\widetilde{1}\right\rangle, \ldots, \left|\widetilde{N-1}\right\rangle \right), \tag{8}$$

являющийся Фурье-образом базиса B_X. В этом базисе квантовый оператор импульса имеет диагональный вид

$$\widehat{p} = \sum_{p=0}^{N-1} p \left|\widetilde{p}\right\rangle \left\langle\widetilde{p}\right| = \operatorname{diag}(0, 1, \ldots, N-1).$$

Если $N = p^\ell$, то каждой степени свободы $\mu \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ соответствует диагональная матрица

$$Z_\mu = \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_{p^\ell}} \exp\left(\frac{2\pi \mathbf{i}}{p} \operatorname{tr}(\mu\gamma) \right) |\gamma\rangle \langle\gamma| .$$

2.5. Описание квантовых интерференций. Циклические группы не обладают необходимыми для описания квантовых интерференций нетривиальными проективными представлениями. Однако оператор X и его диагональная форма Z в паре порождают проективное представление группы $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$. Прямое вычисление приводит к коммутационному соотношению

$$ZX = \omega XZ,$$

которое Вейль получил, обратив внимание на то, что каноническое коммутационное соотношение Гейзенберга для операторов координаты и импульса

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \mathbf{i}\hbar \mathbb{1},$$

а следовательно, и стандартную квантовую теорию в целом, можно реализовать только в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Анализ Вейля [6] квантового поведения в N-мерном гильбертовом пространстве с необходимостью приводит к матрицам X и Z.

Базисы B_X и B_Z, ассоциированные с операторами X и Z, являются *взаимно несмещенными*. Этот термин означает, что борновские вероятности переходов между элементами разных базисов одинаковы для

любых пар элементов:

$$\left|\left\langle \widetilde{\ell} \mid k \right\rangle\right|^2 = \frac{1}{N}, \quad |k\rangle \in \mathrm{B}_X\,, \ \left|\widetilde{\ell}\right\rangle \in \mathrm{B}_Z, \quad k, \ell = 0, \ldots, N-1.$$

Иными словами, для квантового состояния, являющегося вектором одного из базисов, измерение в другом базисе не даст никакой информации поскольку результаты измерений будут разбросаны с равной вероятностью по всем N возможностям.

Фактически, понятие взаимно несмещенных базисов, впервые четко сформулированное Швингером [7], представляет собой математическую формализацию принципа дополнительности Бора.

Использование произведения $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ при описании квантового поведения – несмотря на то, что для описания унитарной эволюции достаточно одной циклической группы $\mathbb{Z}_N$ – связано с включением идеи наблюдения в теоретическую схему. С квантовой наблюдаемой ассоциируется базис, в котором эта наблюдаемая диагональна. Сопряжённым квантовым наблюдаемым соответствуют взаимно несмещённые базисы. Две копии циклической группы обеспечивают потенциальную возможность измерения квантовых наблюдаемых в различных базисах в процессе эволюции. В гильбертовом пространстве основной для реализации квантового поведения размерности $N = p^\ell$ всегда существует полный набор взаимно несмещенных базисов максимально возможного числа $N+1$. Однако все такие базисы можно построить с помощью пары операторов X и Z, порождающих изоморфные циклические группы. Таким образом, двух копий циклической группы достаточно для описания квантовых эффектов.

2.6. Формализм Вейля–Швингера. Идеи Вейля [6] и Швингера [7] в последние годы активно развиваются в различных областях, включая основания квантовой теории, квантовую информатику [8] и теорию обработки сигналов [9]. Игнорируя для краткости изложения специфику “размерностей Галуа”, опишем основные элементы формализма для случая кольца $\mathbb{Z}_N$.

Пусть $\mathbb{K}_n$ обозначает группу корней из единицы степени n. Элемент $\tau = -\,\mathrm{e}^{\pi \mathbf{i}/N}$ порождает $\mathbb{K}_N$, если $N = 2k+1$ и $\mathbb{K}_{2N}$, если $N = 2k$.

Элементы τ, X и Z порождают ***группу Вейля–Гейзенберга***

$$\mathrm{WH}(N) = \langle \tau, X, Z \rangle\,.$$

Порядок группы $\mathrm{WH}(N)$ равен N^3 или $2N^3$ в зависимости от чётности размерности N.

Квантовые эволюции порождаются *операторами смещения*, которые определяются как

$$\mathrm{D}_{\mathbf{p}} = \tau^{p_1 p_2} X^{p_1} Z^{p_2}, \ \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2.$$

Формула композиции операторов смещения имеет вид

$$\mathrm{D}_{\mathbf{p}} \mathrm{D}_{\mathbf{q}} = \tau^{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle} \mathrm{D}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

где $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ – симплектическая форма

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_2 q_1 - p_1 q_2 = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}. \tag{9}$$

N^2 операторов смещения образуют **проективную группу Вейля–Гейзенберга** $\mathrm{PWH}(N)$, являющуюся факторгруппой $\mathrm{WH}(N)$ по ее центру, который изоморфен группе корней из единицы $\mathbb{K}_N$ (или $\mathbb{K}_{2N}$ в чётных размерностях). Как абстрактная группа $\mathrm{PWH}(N)$ изоморфна произведению двух циклических групп

$$\mathrm{PWH}(N) \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N.$$

Конечное фазовое пространство. представляет собой двумерный дискретный тор

$$\mathrm{T}^2 = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N,$$

снабженный симплектической структурой (9).

Операторы смещения на этом торе порождают квантовые эволюции. В частности, смещения вдоль образующих, $\mathrm{D}_{(v,0)} = X^v$ и $\mathrm{D}_{(0,m)} = Z^w$, порождают эволюции Шредингера, соответственно, в “координатном” $|\psi_t\rangle = (X^v)^t |\psi_0\rangle$ и “импульсном” $|\psi_t\rangle = (Z^w)^t |\psi_0\rangle$ представлениях.

Преобразования фазового пространства, сохраняющие симплектическую форму (9), образуют симплектическую группу

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_N) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_N)\,.$$

Эти преобразования, являющиеся квантовым прототипом канонических преобразований в гамильтоновой механике, образуют группу внешних автоморфизмов группы Вейля–Гейзенберга $\mathrm{PWH}(N)$.

Объединяя внутренние и внешние автоморфизмы, мы приходим к полупрямому произведению, называемому **группой Клиффорда**

$$\mathrm{CL}(N) = \mathrm{Aut}(\mathrm{WH}(N)) \cong \mathrm{WH}(N) \rtimes \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_N)\,.$$

Традиционно группу Клиффорда определяют как нормализатор группы Вейля–Гейзенберга в унитарной группе $\mathsf{U}(N)$. Потребность в $\mathsf{U}(N)$, сохранившаяся как рудимент непрерывной теории, не вытекает ни из рассматриваемого здесь описания квантовой эволюции конечными циклическими группами, ни из аргументов Вейля. Мы будем рассматривать группу Клиффорда исключительно как группу симметрий группы Вейля–Гейзенберга не прибегая к ссылке на непрерывную группу $\mathsf{U}(N)$.

Группа Клиффорда порождается матрицами X, F и S:

$$\mathrm{CL}(N) = \langle X, F, S \rangle \,,$$

где матрица $S = \mathrm{diag}\Big(\tau^{i(i+N)}\Big)$ представляет собой унитарный образ в N-мерном гильбертовом пространстве матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_N)$ [9].

Проективная группа Клиффорда. – факторгруппа группы $\mathrm{CL}(N)$ по её центру $\mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N))$ – порождается теми же элементами, но матрицы, отличающиеся только фазовым множителем, рассматриваются как эквивалентные[2]:

$$\mathrm{PCL}(N) = \langle X, F, S \rangle / \mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N)) \ .$$

§3. Разложение квантовой системы общей размерности на подсистемы

Гильбертово пространство *глобальной* системы разлагается в тензорное произведение *локальных* пространств

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{n_M} \,,$$

если глобальная размерность разлагается в произведение взаимно простых чисел, например, $N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_M$, где $n_i = p_i^{\ell_i}$ – степени различных простых чисел.

Класс эквивалентности данного разложения относительно произвола в выборе координат в гильбертовых пространствах можно символически описать как

$$G(N)\, \mathcal{H}_N = G(n_1)\, \mathcal{H}_{n_1} \otimes \ldots \otimes G(n_M)\, \mathcal{H}_{n_M} \,,$$

[2]Алгоритм построения группы из образующих легко организовать таким образом, что проективная версия группы и центр будут вычислены одновременно – это наиболее эффективный подход к построению групп, имеющих большие центры.

где $G(n)$ – группа симметрий n-мерного пространства. Это описание можно упростить до

$$G(N)\,\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{n_M} \tag{10}$$

воспользовавшись тождеством для тензорных произведений

$$AX \otimes BY = (A \otimes B)\,(X \otimes Y)$$

и тем фактом, что произведение локальных групп является подгруппой глобальной группы

$$G(n_1) \times \cdots \times G(n_M) < G(N)\,.$$

Из соотношения (10) видно, что разложения, лежащие на орбите глобальной группы $G(N)$, эквивалентны и класс эквивалентности полностью определяется разложением размерности в произведение взаимно простых чисел.

Предположение $G(N) = \mathsf{U}(N)$ может привести к артефактам, поскольку непрерывная группа $\mathsf{U}(N)$ свободно "перемешивает" состояния между различными компонентами тензорного произведения, что привело бы к не наблюдающейся в природе запутанности между фундаментальными, то есть не составными, частицами различных типов.

Предположение $G(N) = \mathrm{CL}(N)$ проблем подобного рода не вызывает, поскольку в группе Клиффорда глобальной системы отсутствуют преобразования, перемешивающие состояния между локальными гильбертовыми пространствами взаимно простых размерностей. Математически это выражается тем фактом, доказываемым с помощью китайской теоремы об остатках [10], что глобальная группа Клиффорда разлагается в прямое произведение локальных

$$\mathrm{CL}(N) = \mathrm{CL}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{CL}(n_M)\,.$$

Отсутствие квантовых запутанностей между подсистемами означает, что при любых эволюциях глобальной системы возможны лишь квантовые состояние, являющееся тензорным произведением состояний подсистем (или их классические комбинации, называемые сепарабельными состояниями).

Из китайской теоремы об остатках также следует [11] соотношение между энергетическими уровнями глобальной квантовой системы и её локальных подсистем

$$E_{k/N} = E_{k_1/n_1} + \ldots + E_{k_M/n_M}\,, \tag{11}$$

где $E_\nu = h\nu$ – соотношение Планка, связывающее энергию с частотой. Равенство (11) означает, что энергия глобальной системы равна сумме энергий составляющих, а энергии взаимодействий отсутствуют.

Таким образом, подсистемы взаимно простых размерностей можно изучать отдельно и независимо друг от друга, так как между ними нет ни квантовых запутанностей, ни энергетических взаимодействий.

В системах простых размерностей квантовые интерференции возможны, однако, ввиду отсутствия подсистем, невозможна квантовая запутанность, возникающая только в системах размерности которых – нетривиальные степени простых чисел. Таким образом, основной интерес для изучения представляют системы простых размерностей $N = p$ и их комбинации, имеющие размерности вида $N = p^\ell,\ \ell > 1$ в которых реализуется квантовая запутанность.

§4. Конструктивные квантовые состояния

В непрерывной квантовой механике множеством чистых состояний в N-мерном гильбертовом пространстве является комплексное проективное пространство

$$\mathbf{P}(\mathcal{H}_N) = \mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1},$$

представляющее собой однородное пространство унитарной группы $\mathsf{U}(N)$. Это означает, что $\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1}$ является орбитой произвольного единичного вектора, например $|0\rangle$, относительно действия унитарной группы:

$$\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1} \cong \mathrm{Orb}_{\mathsf{U}(N)}(|0\rangle) = \mathsf{U}(N)\,|0\rangle\,.$$

В нашем подходе группой симметрий квантовых систем является конечная группа Клиффорда, которая действует на множестве квантовых состояний нетранзитивно, разбивая его на непересекающиеся орбиты.

Заменив $\mathsf{U}(N)$ на $\mathrm{CL}(N)$ в качестве группы симметрий, мы предполагаем, что конструктивное множество чистых квантовых состояний, которое мы обозначим как $\mathrm{CQS}(N)$, образуют элементы вида

$$|a\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i \alpha_i\,|i\rangle\,,$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i^2 = 1$, $\varphi_i \in \mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N))$, т.е. фазовые множители принадлежат центру группы Клиффорда $\mathrm{CL}(N)$.

Множество $\mathrm{CQS}(N)$ должно 1) быть $\mathrm{CL}(N)$-инвариантным; 2) содержать онтические векторы; 3) состоять только из элементов с рациональными борновскими вероятностями переходов между собой; 4) содержать все суперпозиции векторов с фазовыми множителями из $\mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N))$, удовлетворяющие требованию рациональности.

Формально:

(1) $|a\rangle \in \mathrm{CQS}(N) \implies \mathrm{Orb}_{\mathrm{CL}(N)}(|a\rangle) \subseteq \mathrm{CQS}(N)$;
(2) $|0\rangle \in \mathrm{CQS}(N)$;
(3) $|a\rangle, |b\rangle \in \mathrm{CQS}(N) \implies |\langle a \mid b\rangle|^2 \in \mathbb{Q}$;
(4) $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_k\rangle \in \mathrm{CQS}(N) \implies |A\rangle/||A\rangle| \in \mathrm{CQS}(N)$,
где $|A\rangle = |a_1\rangle + \varphi_2 |a_2\rangle + \ldots + \varphi_k |a_k\rangle, \quad \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N))$.

Для изучения свойств квантовых состояний, соответствующих этим требованиям, мы реализовали процедуру последовательного построения орбит, составляющих множество $\mathrm{CQS}(N)$.

В начале процедуры строится орбита $\mathcal{O}_1 = \mathrm{Orb}_{\mathrm{CL}(N)}(|0\rangle)$. В размерностях $N = p^\ell, \ell \geqslant 1$, эта орбита состоит из $N(N+1)$ векторов, образующих полное множество из $N+1$ взаимно несмещенных базисов и, в частности, содержит онтический базис. Ясно, что вероятности переходов между элементами орбиты $\mathcal{O}_1$ рациональны: для двух различных элементов вероятность перехода равна 0 или $1/N$.

Далее мы строим другие орбиты с помощью суперпозиций уже имеющихся элементов. Отбор суперпозиций, удовлетворяющих требованию рациональности – трудная для теоретического анализа задача, поскольку при нормализации векторов возникают сложные коэффициенты, содержащие вложенные квадратные корни.

Априори множество $\mathrm{CQS}(N)$ может быть конечным, или счётно бесконечным и плотным в $\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1}$, или счётно бесконечным, но не плотным в непрерывном пространстве квантовых состояний. Результаты компьютерных экспериментов, возможно, свидетельствуют в пользу формирования плотного подмножества.

4.1. Вычисления в размерностях 2 и 3. Генераторы, центры и размеры групп Клиффорда в этих размерностях приведены в таблице $\left(\omega = \exp(2\pi\mathbf{i}/3) = -\dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

N	X	F	S	$\mathrm{Z}(\mathrm{CL}(N))$	$\lvert\mathrm{CL}(N)\rvert$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$	$\mathbb{K}_8$	192
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\mathbb{K}_{12}$	2592

Для квантовых состояний $|a\rangle, |b\rangle \in \mathrm{CQS}(N)$ введём функцию расстояния $\mathrm{Dist}(a,b) = 1 - \mathbf{P}(a,b)$, где $\mathbf{P}(a,b) = |\langle a \mid b\rangle|^2$ – борновская вероятность перехода между состояниями. Заметим, что это расстояние можно представить в виде

$$\mathrm{Dist}(a,b) = \sin^2 \mathrm{D}_{\mathrm{FS}}(a,b)\,,$$

где $\mathrm{D}_{\mathrm{FS}}(a,b)$ – расстояние Фубини–Штуди между точками комплексного проективного пространства, т.е. длина геодезической линии в естественной для $\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1}$ метрике Фубини–Штуди. В нашем случае функция $\mathrm{Dist}(a,b)$ принимает только рациональные значения.

Для оценки плотности состояний из подмножества $S \subset \mathrm{CQS}(N)$ в комплексном проективном пространстве введем функцию

$$\Delta(S) = \max_{a\in S} \min_{b\in S\setminus\{a\}} \mathrm{Dist}(a,b)\,.$$

Эта функция для каждой точки множества S находит расстояние до ближайшего соседа, а затем находит максимум для всех таких расстояний.

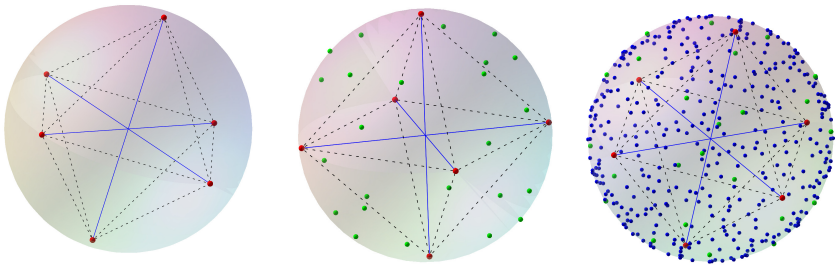
4.1.1. $N = 2$.. Результаты вычислений можно продемонстрировать наглядно, поскольку чистые состояния принадлежат комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, которую можно представить в виде сферы Римана (Блоха). Проективная группа Клиффорда $\mathrm{PCL}(2) = \mathrm{CL}(2)/\mathbb{K}_8$ имеет порядок 24. Возможные размеры орбит являются делителями этого числа.

Мы построили подмножество состояний $S \subset \mathrm{CQS}(2)$, представляющее собой объединение 986 орбит с общим числом элементов 23646.

Начальная орбита $\mathcal{O}_1 = \mathrm{Orb}_{\mathrm{CL}(2)}(|0\rangle)$ состоит из шести векторов, ортогональные пары которых образуют полное множество из трёх взаимно несмещённых базисов:

$$\mathcal{O}_1 = \left\{ |0\rangle\,, |1\rangle\,;\quad \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}};\quad \frac{|0\rangle + \mathbf{i}\,|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle - \mathbf{i}\,|1\rangle}{\sqrt{2}} \right\}.$$

На Рис. 4.1.1 (a) векторы орбиты $\mathcal{O}_1$ образуют вершины октаэдра, пространственные диагонали которого представляют три взаимно несмещенных базиса. Рисунки (b) и (c) иллюстрируют процесс пополнение множества состояний добавлением сначала одной, а затем еще 16 орбит, полученных из суперпозиций векторов орбиты $\mathcal{O}_1$.



(a) (b) (c)

Рис. 1. Построение конструктивных квантовых состояний.

Максимальные расстояния между соседними состояниями для исходной орбиты и для всего вычисленного множества состояний равны, соответственно, $\Delta(\mathcal{O}_1) = 1/2$ и $\Delta(S) = 1/1515 \approx 10^{-3}$.

4.1.2. $N = 3$.. Порядок проективной группы $\mathrm{PCL}(3) = \mathrm{CL}(3)/\mathbb{K}_{12}$ равен 216. Начальная орбита состоит из 12 векторов, образующих полное полное множество из четырёх взаимно несмещенных базисов:

$$\mathcal{O}_1 = \left\{ |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle; \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega^2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega\end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\\omega^2\end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\\omega\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega\\1\end{pmatrix}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega\\\omega\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\\omega^2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\\omega^2\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Вычисленное нами множество состояний $S \subset \mathrm{CQS}(3)$ состоит из 169 орбит суммарно содержащих 27237 векторов.

Максимальные расстояния между соседними состояниями для исходной орбиты и для всего вычисленного множества состояний равны, соответственно, $\Delta(\mathcal{O}_1) = 2/3$ и $\Delta(S) = 1/99 \approx 10^{-2}$.

§5. Заключение

Континуально бесконечная унитарная группа из-за своей неконструктивности является потенциальным источником артефактов при использовании в формализме квантовой механики. Мы показали, что квантовое поведение можно описать, используя только конечные группы. Более конкретно, квантовые эволюции описываются циклическими подгруппами группы Вейля–Гейзенберга, а группой симметрии квантовых систем является группа Клиффорда. Ограничение унитарных симметрий этими группами имеет эмпирически значимые последствия. В частности, отсутствие квантовой запутанности и интерференций между элементарными частицами разных типов находит естественное объяснение.

Разложение квантовой системы на подсистемы определяется разложением размерности её гильбертова пространства в произведение целых чисел. В простой размерности разложение на подсистемы невозможно. Когда размерность является произведением взаимно простых чисел, квантовое поведение подсистем можно изучать по отдельности, так как между ними нет энергетических взаимодействий и квантовых корреляций. Квантовое поведение проявляется полностью в размерностях, являющихся степенями простых чисел. Это случай многочастичных квантовых систем, состоящих из запутанных неразличимых частиц.

Отказ от непрерывной унитарной группы предполагает модификацию понятия квантового состояния: проективное гильбертово пространство следует заменить некоторой комбинаторной конструкцией. Мы полагаем, что множество состояний должно удовлетворять требованиям: (а) фазовые множители в состояниях должны быть элементами центра группы Клиффорда; (б) множество состояний должно быть инвариантным относительно группы Клиффорда и (в) содержать оптические векторы; (г) борновские вероятности переходов между элементами множества должны быть рациональными в соответствии с частотной концепцией вероятности. Приведены некоторые результаты компьютерных экспериментов с этим набором требований.

Благодарности. Я благодарен Ю. А. Блинкову, Н. Н. Васильеву и С. И. Виницкому за обсуждение работы и ценные советы.

Список литературы

1. V. V. Kornyak, *Quantum models based on finite groups.* — IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series **965**, 012023, 2018. `https://arxiv.org/pdf/1803.00408.pdf`arXiv:1803.00408 [physics.gen-ph]
2. V. V. Kornyak, *Modeling Quantum Behavior in the Framework of Permutation Groups.* EPJ Web of Conferences **173**, 01007, 2018. `https://arxiv.org/pdf/1709.01831.pdf`arXiv:1709.01831 [quant-ph]
3. T. Banks, *Finite Deformations of Quantum Mechanics.* `https://arxiv.org/pdf/2001.07662.pdf`arXiv:2001.07662 [hep-th], 20 p., 2020.
4. G. L. Mullen, D. Panario, *Handbook of Finite Fields.* — Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, Taylor & Francis Group, 1033 p., 2013.
5. G. 't Hooft, `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-41285-6.pdf` *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics.* Fundamental Theories of Physics 185. 296 p. Springer, 2016.
6. Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика.* Наука, Москва, 1986.
7. J. Schwinger, *Unitary Operator Bases.* — Proc Natl Acad Sci U S A, **46**, No 4, 570–579 (1960).
8. I. Bengtsson, K. Zyczkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement.* Cambridge University Press, 2006.
9. S. F. D. Waldron, *An Introduction to Finite Tight Frames.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2018.
10. A. Vourdas, *Finite and Profinite Quantum Systems.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer, Berlin, 2017.
11. В. В. Корняк, *Конструктивная квантовая механика и вычисления с конечными группами.* Программирование, **1**, 2025.

Kornyak V. V. Weyl–Heisenberg and Clifford groups and quantum physics.

The standard formulation of quantum mechanics uses continuously infinite sets, such as the continuous unitary group. However, the use of nonconstructive infinities can generate inconsistencies and artifacts when describing physical reality. In fact, to describe quantum behavior it is sufficient to use finite subgroups of the general unitary group, namely, the Weyl-Heisenberg group and its extension, the Clifford group. We explore a version of quantum theory based on these groups that completely excludes the use of the continuous unitary group. This approach has empirically significant consequences. For example, the absence of quantum entanglement and interference between elementary particles of different types in nature receives a natural explanation. The rejection of the use of continuously infinite sets requires a revision of the concept of quantum states, namely, the replacement of the continuous projective Hilbert space of quantum states by some combinatorial set. We propose a possible approach

to building constructive quantum states based on a certain set of natural criteria.

Лаборатория информационных технологий,
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, 141980,
Дубна, Россия
E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступило 16 сентября 2025 г.