Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 543, 2025 г.

Д. В. Карпов

СПИСОЧНАЯ ВЕРШИННАЯ ДРЕВЕСНОСТЬ ГРАФА: АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БОРОДИНА О d-РАСКРАСКАХ

§1. Введение. Основные результаты

В настоящей работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, изучаются раскраски вершин таких графов.

Как обычно, множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, а их количество через $v(G)$.

Максимальную степень вершин графа G мы, как обычно, будем обозначать через $\Delta(G)$. Для любой вершины $v \in V(G)$ через $d_G(v)$ будем обозначать степень вершины v в графе G, а через $\mathrm{N}_G(v)$ – *окрестность* вершины v, то есть, множество всех вершин, смежных с v. Так как в рассматриваемом графе нет петель, $v \notin \mathrm{N}_G(v)$.

Определение 1. Раскраска вершин графа называется *древесной*, если для любого цвета индуцированный подграф на вершинах этого цвета не имеет циклов.

Через $a(G)$ обозначим (вершинную) *древесность* графа G – минимальное количество цветов, для которого существует древесная раскраска вершин G.

Через $a_l(G)$ обозначим *списочную древесность* графа G – минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что если вершинам графа G поставить в соответствие произвольные списки цветов длины не менее k, то будет существовать древесная раскраска вершин в цвета из этих списков.

Как и с классическими правильными раскрасками, для любого графа G очевидно неравенство $a_l(G) \geqslant a(G)$.

В 1968 году Чартранд, Кронк и Волл [3] доказали, что $a(G) \leqslant \frac{\Delta(G)+1}{2}$, доказательство является аналогом очевидного неравенства на хроматическое число $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Классическая теорема Брукса [1] говорит, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$, если G – связный граф, отличный от полного графа и нечетного цикла. Очевидно, полный граф K_{2d+1} имеет степени всех вершин $2d$ и не имеет

Ключевые слова: вершинная древесность, списочная древесность, d-раскраски.

древесной раскраски в d цветов. По аналогии с классической теоремой Брукса, в 1974 году Кронк и Митчелл [4] доказали аналогичное утверждение для древесности: $a(G) \leqslant \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$, если G – связный граф, отличный от полного графа на нечетном числе вершин и нечетного цикла.

В 2012 году Ху и Ву [5] доказали аналогичное утверждение для списочной древесности: $a_l(G) \leqslant \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$, если G – связный граф, отличный от полного графа на нечетном числе вершин и нечетного цикла. Этот результат является аналогом "списочной теоремы Брукса", доказанной Визингом в 1976 году [7].

Мы докажем аналог более общей теоремы Бородина о d-раскрасках (доказанной Бородиным в 1977 году, в 1979 году этот результат повторили Эрдеш, Рубин и Тейлор [6]).

Далее мы будем работать со списочными раскрасками. Пусть каждой вершине $v \in V(G)$ соответствует список $L(v)$, *длины* $\ell(v) = |L(v)|$.

Определение 2. Назовем связный граф G *деревом Галлаи*, если каждый его блок – нечетный цикл или полный граф.

Назовем связный граф G *четным деревом Галлаи*, если каждый его блок – простой цикл или полный граф на нечетном количестве вершин.

Определение 3. Пусть G – граф, а $L = \{L(v)\}_{v \in V(G)}$ – список цветов.

1) Назовем L *d-списком*, если $\ell(v) \geqslant d_G(v)$ для любой вершины v.

2) Назовем L *$d/2$-списком*, если $\ell(v) \geqslant d_G(v)/2$ для любой вершины v.

Бородин доказал, что граф G имеет правильную раскраску в цвета любого d-списка, если G не является деревом Галлаи, а для дерева Галлаи привел пример d-списка, для которого раскраска невозможна. Мы докажем аналогичную теорему для древесных раскрасок.

Теорема 1. *Пусть связный граф G не является четным деревом Галлаи. Тогда для любого $d/2$-списка L существует древесная раскраска вершин в цвета списка.*

Также будет показано, что для четного дерева Галлаи это утверждение неверно.

§2. Списочные раскраски. Доказательство основной теоремы

Наш подход в целом аналогичен доказательству теоремы Бородина о d-раскрасках, приведенному в [9]. Доказательство использует блоки и точки сочленения. Мы приведем здесь необходимые определения, а подробности и доказательства можно прочитать в [9], в [8] или в других книгах.

Определение 4. Пусть G – связный граф.

1) Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.

2) *Блоком* называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

3) *Внутренняя* вершина блока B – это его вершина, не являющаяся точкой сочленения графа G.

Определение 5. Построим граф $B(G)$, вершины которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \ldots, a_n$ графа G и всем его блокам $B_1, \ldots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V(B_j)$. Других рёбер в этом графе нет. Граф $B(G)$ называется *деревом блоков и точек сочленения* графа G.

Дерево блоков и точек сочленения – действительно дерево, а всем его листьям соответствют блоки, они называются *крайними*.

Начнем с двух вспомогательных утверждений. Везде в разделе G – граф, а L – его $d/2$-список.

Определение 6. Назовем вершину $v \in V(G)$ *избыточной*, если $2\ell(v) > d_G(v)$.

Лемма 1. *Пусть G – связный граф, причем вершина $a \in V(G)$ избыточная. Тогда существует древесная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L.*

Доказательство. Индукция по количеству вершин. База для графа с одной вершиной (естественно, избыточной) очевидна. Будем считать, что утверждение доказано для любого связного графа с меньшим чем $v(G)$ количеством вершин.

Рассмотрим граф $G - a$. Пусть $G_1, \ldots, G_k$ – все компоненты графа $G - a$. В каждом графе G_i (где $i \in \{1, \ldots, k\}$) ввиду связности графа G обязательно есть вершина a_i, смежная с a. Рассмотрим граф

G_i, оставив списки вершин неизменными. Тогда a_i станет избыточной вершиной:

$$2\ell(a_i) \geqslant d_G(a_i) \Rightarrow 2\ell(a_i) > d_G(a_i) - 1 = d_{G-a}(a_i).$$

Тогда по индукционному предположению вершины всех графов $G_1, \ldots, G_k$ можно древесно покрасить в соответствии со списками.

Остается покрасить вершину a. Так как $d_G(a) < 2\ell(a)$, существует цвет $j \in L(a)$, встречающийся среди ее соседей не более чем один раз. В цвет j мы и покрасим вершину a: ее степень в подграфе, индуцированном на множестве вершин цвета j будет равна 1, а значит, покраска a в цвет j не привела к образованию циклов. □

Лемма 2. *Если существуют две такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что граф $G-a$ связен и $L(a) \not\subset L(b)$, то существует древесная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L.*

Доказательство. Пусть $1 \in L(a) \setminus L(b)$. Покрасим вершину a в цвет 1 и подвесим граф $G-a$ за вершину b (то есть разобьем вершины на уровни $L_0 = \{b\}$, $L_1, \ldots$, где номер уровня вершины x равен $\mathrm{dist}_{G-a}(b, x)$).

Будем красить вершины $G - a$ по уровням, начиная с больших. Пусть нам нужно покрасить очередную вершину $x \neq b$, тогда $x \in L_k$, где $k \geqslant 1$. То есть, x имеет непокрашенного соседа из L_{k-1}. Значит, покрашено не более чем $d_G(x) - 1 \leqslant 2\ell(x) - 1$ соседей вершины x. Тогда есть цвет $j \in L(x)$, в который покрашено не более одного соседа x. Покрасим вершину x в цвет j: тогда степень x в подграфе, индуцированном на множестве вершин цвета j будет равна 1, а значит, покраска x в цвет j не привела к образованию циклов.

Действуем таким образом, пока не останется непокрашенной только вершина b. У нее покрашены все соседи, но a покрашена в цвет не из $L(b)$. Тогда не более чем $d_G(b) - 1 \leqslant 2\ell(b) - 1$ соседей b имеют цвета из $L(b)$ и опять же есть цвет $j \in L(b)$, в который покрашено не более одного соседа b. Как и выше, можно покрасить b в этот цвет, циклов не образуется. □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1. *Граф G двусвязен.*

Если не у всех вершин списки одинаковы, то существуют две смежные вершины a и b с $L(a) \neq L(b)$ и искомая древесная раскраска существует по лемме 2. Значит, все списки одинаковы, пусть в них, скажем,

d цветов. Тогда и все степени вершин одинаковы и равны $2d$ (более чем $2d$ степени не могут быть по условию теоремы, а если есть вершина меньшей степени, то она избыточна и искомая древесная раскраска существует по лемме 1).

Таким образом, мы имеем дело с древесной раскраской регулярного графа степени $2d$ в d цветов. Так как $G \neq K_{2d+1}$ (иначе G – четное дерево Галлаи), существование искомой раскраски доказано в работе [4].

Случай 2. *Граф G недвусвязен.*

Докажем утверждение по индукции, в качестве базы будет случай 1. Итак, пусть для меньшего чем G графа теорема доказана. Рассмотрим крайний блок B графа G, отделяемый от остального графа точкой сочленения a. Можно считать, что в графе G есть блок, отличный от B, от нечетного цикла и полного графа на нечетном числе вершин (иначе рассмотрим в качестве B другой крайний блок, ведь их хотя бы два).

Граф $B - a$, очевидно, связен, а все смежные с a вершины этого графа (такие есть!) – избыточны. Поэтому по лемме 1 его вершины можно покрасить в соответствие со списками.

Пусть $U = V(B) \setminus \{a\}$, $G' = G - U$. Граф G' имеет те же самые блоки, что G, кроме B, а значит, среди них есть блок, отличный от нечетного цикла и полного графа. Списки всех отличных от a вершин не изменились, а их степени – такие же, как в графе G. Новый список $L'(a)$ будет содержать все цвета списка $L(a)$, кроме тех, что не менее чем два раза использованы для раскраски вершин из $\mathrm{N}_B(a)$. Таких цветов не более чем $\frac{d_B(a)}{2}$. Так как $d_G(a) = d_B(a) + d_{G'}(a)$, мы имеем

$$\ell'(a) \geqslant \ell(a) - \frac{d_B(a)}{2} \geqslant \frac{d_G(a)}{2} - \frac{d_B(a)}{2} = \frac{d_{G'}(a)}{2},$$

и по индукционному предположению существует древесная раскраска вершин G' в цвета из списка.

Остается понять, что вместе древесные раскраски графов $B - a$ и G' образуют древесную раскраску графа G. Единственная вершина G', смежная с $B - a$ – это a. Но даже если a покрашена в цвет j, использованный при покраски ее соседей из $\mathrm{N}_B(a)$, то в $\mathrm{N}_B(a)$ может быть только одна вершина цвета j, то есть, при склеивании раскрасок цикла цвета j не образуется (такого цикла нет в G' по построению и нет в B, а пересекать разные блоки цикл не может). $\square$

Покажем, что утверждение неверно для случая, когда G – четное дерево Галлаи. Тогда пусть $B_1, \ldots, B_n$ – все блоки G. Каждый блок B_i – регулярный граф четной степени $2k_i$, создадим для него список L_i из k_i цветов. Единственное условие – списки блоков, имеющих общую точку сочленения, не должны пересекаться. Каждой внутренней вершине блока B_i дадим список L_i, а список точки сочленения a будет объединением списков всех блоков, содержащих a (у этих списков как раз нет общих цветов). Тогда список каждой вершины содержит ровно в два раза меньше цветов, чем степень этой вершины.

Покажем индукцией по размеру графа, что древесной раскраски в цвета таких списков нет. База для двусвязного графа очевидна: нет древесной раскраски цикла в один цвет, нет древесной раскраски полного графа K_{2t+1} в t цветов (в какой-то цвет было бы покрашено хотя бы три вершины, а они образуют треугольник).

Пусть B_n – крайний блок. Тогда степени его $2k_n$ внутренних вершин равны $2k_n$ и покрасить их в k_n цветов списка L_n можно только по две вершины в каждый цвет (иначе будет одноцветный треугольник, а это цикл). Значит, отрезающую этот блок точку сочленения a нельзя покрасить в цвет из списка L_n: у нее нашлось бы два соседа того же цвета в B_n, а это запрещенный треугольник. Тогда можно удалить все внутренние вершины крайнего блока B_n и цвета L_n из списка вершины a, и перейти к задаче раскраски меньшего графа: степень a уменьшится на $2k_n$, а ее список на k_n, и получится ровно такой список, как нам нужен.

Список литературы

1. R. L. Brooks, *On coloring the nodes of network.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941), 194–197.
2. P. D. Seymour, *A Note on List Arboricity.* — J. Comb. Theory, Ser. B, **72** (1998), 150–151.
3. G. Chartrand, H. V. Kronk, C. E.Wall, *The point arboricity of a graph.* — Isreal J. Math. **6** (1968), 169–175.
4. H. V. Kronk, J. Mitchem, *Critical point arboritic graphs.* — J. London Math. Soc. **9** (1974/75), 459–466.
5. N. Xue, B. Wu, *List point arboricity of graphs.* — Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, **4**, No. 2 (2012). doi 10.1142/S1793830912500279.
6. P. Erdos, A. L. Rubin, H. Taylor, *Choosability in graphs.* — Proc. West-Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Arcata, California, Congressus Numerantium XXVI (1979), 125–157.

7. В. Г. Визинг, *Раскраска вершин графа в предписанные цвета.* — Методы дискрет. анализа в теории кодов и схем. Сб. науч. Тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, Вып. 29 (1976), 3–10.
8. Ф. Харари, *Теория графов.* Москва, “Мир,” 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)
9. Д. В. Карпов, *Теория графов.* Москва, МЦНМО, 2022.

Karpov D. V. List vertex arboricity: an analog of Borodin's theorem on d-colorings.

We prove an analog of Borodin's Theorem on d-colorings for arboricity. A *tree vertex coloring* is a coloring of vertices of a graph such that the induced subgraph on any color is acyclic. A connected graph G is an *even Gallai tree*, if each its block is either a simple cycle or a complete graph on odd number of vertcices. A list $L = \{L(v)\}_{v \in V(G)}$ is a $d/2$-*list*, if $|L(v)| \geqslant d_G(v)/2$ for any vertex v. It is proved that if a connected graph is not an even Gallai tree, then it has a tree coloring according to any $d/2$-list.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

Поступило 20 ноября 2025 г.