Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 543, 2025 г.

$\boxed{\text{С. А. Васильев}}$, **И. В. Левичев, М. Д. Малых**

О ВЫЧИСЛЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Введение

Дифференциальные уравнения, при старшей производной которого стоит малый параметр, называют сингулярно возмущенными. Исследования таких уравнений восходят к работам А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой [1]. В работах А. Б. Васильевой, подытоженных в монографии [2], решения начальных задач для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений были представлены в виде асимптотических рядов по малому параметру. При этом был предложен метод вычисления коэффициентов этих рядов, который в теории позволяет вычислить коэффициенты сколь угодно большого порядка.

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения возникают во многих прикладных задачах, в том числе небесной механике, где массы тел могут различаться на многие порядки. Однако исследовании этих задач методами асимптотических рядов проводится далеко не всегда по причине громоздкости выкладок. Это особенно заметно по учебным курсам [3, 4], в которых приходится довольствоваться исключительно линейными примерами. Мы задались целью автоматизировать эти громоздкие выкладки.

Однако, прежде чем заниматься векторной задачей, необходимо понять принципы реализации разложения в асимптотические ряды в системах компьютерной алгебры на простом примере одного сингулярно возмущенного уравнения. Ранее в центре внимания был вопрос о асимптотической сходимости этих рядов. Вопрос же о том, всегда ли вычисления могут быть выполнены в конечном виде, ранее не исследовался. Хотя вполне очевидно, что некоторые моменты, описанные А. Б. Васильевой, не могут быть в общем случае выполнены в символьном виде. К их числу относится, например, решение дифференциальных уравнений для погранслойных коэффициентов.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, асимптотические ряды, компьютерная алгебра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект No. 20-11-20257).

В настоящей работе мы исследуем вопрос о том, какая часть вычислений может быть сделана в символьном виде, и представим наше программное обеспечение для работы с асимптотическими рядами — пакет Canberra для системы компьютерной алгебры Sage [5].

§2. Задание сингулярно-возмущенной начальной задачи

В пакете Canberra независимая переменная обозначается как t, малый параметр – как μ. В настоящий момент пакет ориентирован на решение простейшей сингулярно-возмущенной начальной задачи

$$\mu\frac{dx}{dt} = f(x,t,\mu), \quad x(0) = g(\mu), \tag{1}$$

подробно рассмотренной в учебных пособиях [3, 4].

Для описания этой задачи в системе Canbderra имеется класс `singular_problem`. Для задания его элемента – начальной задачи – следует указать тройку (x, f, g), где x – имя зависимой переменной, может быть любым, f и g – символьные выражения. При этом f может содержать x, t, μ, а g – только μ. Допустимо рассмотрение начальных задач с дополнительными параметрами, входящими в f и g.

Например, мы можем задать задачу Коши

$$\begin{cases} \mu\dfrac{dx}{dt} = 2\,(t+1)^2 - x^2 + \mu, \\ x(0) = 10 \end{cases} \tag{2}$$

под именем `pr` следующим образом:

```
var('x,y,t,tau,mu')
pr=singular_problem(x,-(x^2-2*(t+1)^2)+mu,10)
```

При необходимости, можно узнать, правильно ли система поняла наше описание, посмотрев на описание `pr` в формате LaTeX:

```
pr.latex()
```

Следует заметить, что задача (2) – нелинейная, и ее решение выходит на наклонную асимптоту, близкую к одному из двух корней уравнения

$$x^2 = 2(t+1)^2,$$

которое получается, если формально подставить в (2) значение $\mu = 0$. Иными словами, корень $x = \sqrt{2}(t+1)$ притягивает решение начальной задачи. Асимптотический метод и призван описать это притяжение.

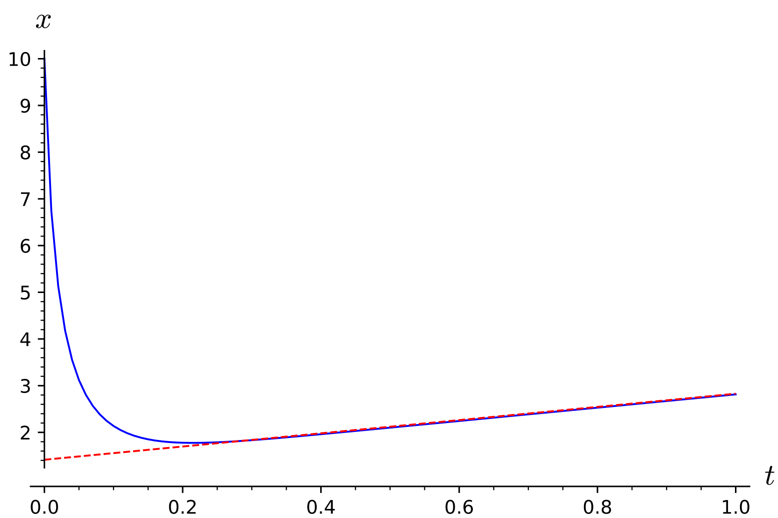

Рис. 1. Решение задачи (2), найденное численно при $\mu = \frac{1}{5}$.

§3. Асимптотическое разложение решения

В теории асимптотических рядов [2–4] вводят быструю переменную $\tau = t/\mu$ и ищут решение начальной задачи (1) в виде ряда

$$\begin{aligned} x &= rx_0(t) + \mu r x_1(t) + \dots + \mu^n r x_n(t) \\ &\quad + px_0(\tau) + \mu p x_1(\tau) + \dots + \mu^n p x_n(\tau) + \mathcal{O}(\mu^{n+1}). \end{aligned} \tag{3}$$

Ряд

$$rx = rx_0(t) + \mu r x_1(t) + \dots + \mu^n r x_n(t) + \dots$$

называют регулярной частью разложения, а ряд

$$px = px_0(\tau) + \mu p x_1(\tau) + \dots + \mu^n p x_n(\tau) + \dots$$

называют пограничной частью разложения. Пограничная часть описывает выход решения из начальной точки к точкам, близким к устойчивому корню уравнения

$$f(x, t, 0) = 0.$$

Обычно это происходит очень быстро и при $\tau \to \infty$ пограничные функции $px_i(\tau)$ стремятся к нулю экспоненциально. Регулярная часть описывает поведение решения возле устойчивого корня, то есть при t, больших некоторой величины, которая тем меньше, чем быстрее убывают пограничные функции.

Согласно методу А.Б. Васильевой, коэффициенты ряда (3) определяются путем подстановки его в дифференциальное уравнение

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu)$$

или

$$\mu \frac{drx}{dt} + \frac{dpx}{d\tau} = f(rx, t, \mu) + f(rx + px, t, \mu) - f(rx, \mu\tau, \mu)$$

Коэффициенты регулярной части подбираются из уравнения

$$\mu \frac{drx}{dt} = f(rx, t, \mu)$$

без учета начальных условий путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ слева и справа:

$$rx_{n-1} = [f(rx, t, \mu)]_{\mu^n}.$$

Отсюда получается, что px_0 – корень уравнения

$$f(x, t, 0) = 0,$$

а px_n выражается алгебраически через $px_0, \ldots, px_{n-1}$.

Коэффициенты пограничной части определяются из уравнения

$$\frac{dpx}{d\tau} = Pf$$

путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ слева и справа:

$$\frac{dpx_n}{d\tau} = [Pf]_{\mu^n}.$$

Здесь для краткости принято, что

$$Pf = f(rx + px, t, \mu) - f(rx, t, \mu)|_{t=\mu\tau}\,. \tag{4}$$

Таким образом, получается дифференциальное уравнение для определения px_n, для выделения решения которого требуется учесть начальные условия

$$px_n(0) = [x_0]_{\mu^n} - rx_n(0).$$

Тем самым, в дифференциальные уравнения и начальные условия для пограничных функций входят не сами rx_n, но только их значения в нуле.

Основной теоретический результат [3, теорема 3] состоит в том, что при выполнении известных условий на гладкость и устойчивость корня разность между решением и суммой первых n членов ряда (3) имеет порядок $\mathcal{O}(\mu^{n+1})$.

§4. Регулярная часть ряда

В нашей системе регулярная часть решения описывается рядом

$$x = rx_0(t) + rx_1(t)\mu + \dots + rx_n(t)\mu^n + \dots,$$

коэффициенты которого в нашей системе рассматриваются как функции t. Под регулярной частью разложения символьного выражения h мы понимаем разложение выражения

$$h(rx_0(t) + rx_1(t)\mu + \dots, t, \mu)$$

в ряд по степеням μ. Сумму первых членов этого ряда вплоть до члена μ^n будем обозначать как

$$R_n[h].$$

В нашей системе можно найти это выражение при помощи метода `r_series` класс `singular_problem`. Например,

```
pr.r_series(x^2+t,2)
    (rx1(t)^2 + 2*rx0(t)*rx2(t))*mu^2 + 2*mu*rx0(t)*rx1(t)
    + rx0(t)^2 + t
```

Выражение не упрощается в целях экономии ресурсов. При желании пользователь может это сделать сам, напр., при помощи стандартного метода `series`:

```
pr.r_series(x^2+t,2).series(mu,3)
    (rx0(t)^2 + t) + (2*rx0(t)*rx1(t))*mu + (rx1(t)^2 +
    2*rx0(t)*rx2(t))*mu^2 + Order(mu^3)
```

В ходе вычисления этого отрезка ряда система создает функции переменной t с именами `rx0`, ..., `rx3`. Эти функции – глобальные, к которым далее можно обращаться из Sage. Например, можно выполнить подстановку:

```
pr.r_series(x^2+t,2).subs(rx0(t)==pi)
    (rx1(t)^2 + 2*pi*rx2(t))*mu^2 + 2*pi*mu*rx1(t) +
```

```
pi^2 + t
```

Коэффициенты регулярной части ряда определяются из уравнения

$$\mu \frac{dR_{n-1}[x]}{dt} = R_n[f],$$

путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях μ слева и справа. В нашей системе мы можем записать это уравнение непосредственно так, как оно пишется в теории:

```
n=3
(mu*diff(pr.r_series(x,n-1),t)-pr.r_series(f,n)).series(mu,n+1)
  (-2*t^2 + rx0(t)^2 - 4*t - 2) + (2*rx0(t)*rx1(t) +
  diff(rx0(t), t) - 1)*mu + (rx1(t)^2 + 2*rx0(t)*rx2(t) +
  diff(rx1(t), t))*mu^2 + Order(mu^3)
```

Уравнения для отыскания rx_i получаются, если приравнять нулю коэффициенты этого разложения. Но проще воспользоваться встроенной функцией:

```
pr.r_odes(4)
   [-2*t^2 + rx0(t)^2 - 4*t - 2,
   2*rx0(t)*rx1(t) + diff(rx0(t), t) - 1,
   rx1(t)^2 + 2*rx0(t)*rx2(t) + diff(rx1(t), t),
   2*rx1(t)*rx2(t) + 2*rx0(t)*rx3(t) + diff(rx2(t), t),
   rx2(t)^2 + 2*rx1(t)*rx3(t) + 2*rx0(t)*rx4(t)
                              + diff(rx3(t), t)]
```

Здесь мы сталкиваемся с первой проблемой, которая в общем случае не может быть решена аналитически: первое уравнение

$$f(rx_0, t, 0) = 0 \tag{5}$$

задает $rx_0(t)$ как алгебраическую функцию t, которая может, во-первых, не выражаться в радикалах, во-вторых, требуется правило для определения нужной ветви. Однако нельзя не заметить, что второе уравнение является линейным относительно rx_1, третье – относительно rx_2 и т.д. Поэтому все функции $rx_1, rx_2, \ldots$ можно выразить как символьные выражения через rx_0 и ее производные. Дифференцируя (5) по t, мы получим уравнение, линейное относительно rx_0'. Поэтому производные всех порядков функции rx_0 выражаются через rx_0 в символьном виде. Это означает, что всегда возможно выразить функции $rx_1, rx_2, \ldots$ как символьные выражения через rx_0:

$$rx_i = S_i(rx_0, t).$$

В нашей системе выразить функции $rx_1, rx_2, \dots rx_n$ и их производные до n-го порядка через rx_0 позволяет метод `r_solve`:

```
pr.r_solve(1)
 [diff(rx0(t), t) == 2*(t + 1)/rx0(t),
  rx1(t) == -1/2*(2*(t + 1)/rx0(t) - 1)/rx0(t),
  diff(rx1(t), t) == ((t + 1)*(2*(t+1)/rx0(t) - 1)/rx0(t)^2
  + 2*(t + 1)^2/rx0(t)^3 - 1/rx0(t))/rx0(t)]
```

При разработке этого метода мы использовали то очевидное наблюдение, что уравнение для отыскания rx_i содержит не более чем i-ые производные $rx_0, \dots, rx_{i-1}$.

Удобно использовать этот метод в союзе с другими. Напр., выражение `pr.r_series(x,1)` возвращает просто $rx_0 + \mu rx_1$. Метод `r_solve` позволяет заменить rx_1 на его выражение через rx_0:

```
pr.r_series(x,1).subs(pr.r_solve(1)).series(mu,2)
     (rx0(t)) + (-t/rx0(t)^2 + 1/2/rx0(t) - 1/rx0(t)^2)*mu
     + Order(mu^2)
```

§5. Пограничная часть

Для вычисления пограничной части нам нужно выражение Pf. Однако нет никакой проблемы распространить определение (4), записанное для правой части f дифференциального уравнения, на любое символьное выражение. Поэтому в нашей системе пограничная часть символьного выражения h – это разложение выражения

$$P[h] = h(rx_0(\mu\tau) + \mu rx_1(\mu\tau) + \dots + px_0(\tau) + \mu px_1(\tau) + \dots, t, \mu) \\ - h(rx_0(\mu\tau) + \mu rx_1(\mu\tau) + \dots, t, \mu)$$

в ряд по степеням μ. Например для $x^2 + t$:

```
pr.p_series(x^2+t,1).series(mu,2)
    (px0(tau)^2 + 2*px0(tau)*rx0(0) + rx0(0)^2) +
    (2*px0(tau)*px1(tau) + 2*px1(tau)*rx0(0) + 5*tau +
    4*tau*px0(tau)/rx0(0) + px0(tau)/rx0(0)
    - 2*px0(tau)/rx0(0)^2 - 2/rx0(0) + 1)*mu +
    Order(mu^2)
```

Поскольку регулярные члены rx_i входят в выражение $P[h]$ только с аргументом $\mu\tau$, коэффициенты разложения $P[h]$ содержат rx_i и их производные в нуле. Способом описанным выше, мы можем выразить rx_i и их производные в нуле через $rx_0(0)$. Поэтому пограничная часть символьного выражения содержит константу $rx_0(0)$, которая в общем случае не может быть выражена в конечном виде, и пограничные функции $px_0, px_1, \ldots$ переменной τ.

Коэффициенты регулярной части ряда определяются из уравнения

$$\mu \frac{dP_{n-1}[x]}{dt} = P_n[f],$$

путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях μ слева и справа. Эти уравнения возвращает метод p_odes:

```
pr.p_odes(1)
    [px0(tau)^2 + 2*px0(tau)*rx0(0) + rx0(0)^2
    + diff(px0(tau), tau) - 2,
    2*px0(tau)*px1(tau) + 2*px1(tau)*rx0(0)
    + 4*tau*px0(tau)/rx0(0) - (2/rx0(0) - 1)*px0(tau)/rx0(0)
    - 2/rx0(0) + diff(px1(tau), tau)]
```

Таким образом, первое уравнение является дифференциальным уравнением для определения px_0, второе служит для определения px_1 и т.д.

Начальные условия для px_i определяются из начального условия исходной задачи (1):

$$P[x]|_{\tau=0} + R[x]|_{t=0} = g$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы получим линейные уравнения для определения $rx_i(0)$. Найденные из них начальные значения возвращает метод p_ics:

```
pr.p_ics(1)
    [px0(0) == -rx0(0) + 10,
    px1(0) == 1/2*(2/rx0(0) - 1)/rx0(0)]
```

Дифференциальное уравнение для px_0 всегда допускает разделение переменных и поэтому его можно переписать в виде квадратуры. В нашем частном примере интеграл

$$\frac{dp}{p^2 + 2rx_0(0) \cdot p + rx_0(0)^2 - 2} = \tau = C$$

берется и можно даже выразить px_0 через τ стандартными средствами Sage:

```
var('tau, a,b')
px0=function('px0')(tau)
de=px0(tau)^2 + 2*px0(tau)*a +a^2 + diff(px0(tau), tau) - 2
```

```
solve(desolve(de,px0, ivar=tau), px0)
    px0(tau) == -(a*(e^(-2*sqrt(2)*_C - 2*sqrt(2)*tau) - 1)
    + sqrt(2)*(e^(-2*sqrt(2)*_C - 2*sqrt(2)*tau) + 1))
    /(e^(-2*sqrt(2)*_C - 2*sqrt(2)*tau) - 1)
```

В общем случае мы столкнемся здесь с трудностями обращения квадратуры.

§6. Заключение

При решении простейшей сингулярно-возмущенной начальной задачи (1) пакет Canberra for Sage позволяет:

- выразить явно регулярные члены заданных порядков через нулевой регулярный член rx_0,
- составить начальную задачу для пограничного члена заданного порядка, коэффициенты которой содержат в качестве неизвестного $rx_0(0)$.

Продвинуться далее аналитически в общем случае невозможно: rx_0 – алгебраическая функция, которая может не выражаться в радикалах, начальные задачи для $px_0, \dots$ могут не решаться в элементарных функциях.

Поэтому следующим ходом нужно разработать численные инструменты для работы с rx_0 и предоставить пользователю возможность получить выражения в замкнутом виде, но содержащие или rx_0, или числа, найденные приближенно.

Список литературы

1. А. Н. Тихонов, *Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.* — Матем. сб. **73**, No. 3 (1952), 575–586.
2. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, Москва (1973).
3. В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов, В. Т. Волков, Н. Т. Левашова, Е. В. Полежаева, *Асимптотические методы в примерах и задачах*, ФФ МГУ (2019).
4. В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов, В. Т. Волков, Н. Т. Левашова, Е. В. Полежаева, *Введение в теорию сингулярных возмущений лекции*, ФФ МГУ (2019).
5. И. В. Левичев, М. Д. Малых, *Canberra*, https://github.com/malykhmd/canberra (2024).

Vasiliev S. A., Levichev I. V., Malykh M. D. On calculation of asymptotic series in computer algebra systems.

An initial-value problem for a singularly perturbed differential equation is considered. It is shown that not all calculations which are necessary to obtain an asymptotic expansion in an A.B. Vasilyeva series of a given order can be performed in finite form. However, the portion of the calculations that can be performed symbolically is implemented in the Sage computer algebra system. A program for calculating this part in Sage is presented, computational examples are given.

Российский университет
дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, Москва
E-mail: levichev_iv@pfur.ru

Поступило 20 октября 2025 г.

Российский университет
дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, Москва;
Объединённый институт
ядерных исследований, Дубна
E-mail: malykh_md@pfur.ru