

Ван Шивэй, А. В. Зорин, М. А. Коняева, М. Д. Малых,
Л. А. Севастьянов

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании консервативных динамических систем периодические решения играют исключительно важную роль. По существу это – единственный класс решений, который весьма просто описывается качественно и характеризуется количественно одним числом – периодом. В тех немногих случаях, когда консервативные динамические системы интегрируются явно, но решение не является периодическим, качественное его описание вызывает значительные сложности. Примером такой ситуации служит волчок Ковалевской [1]. Напротив, если задача не интегрируется аналитически, то частные периодические решения пытаются использовать как своего рода “скелет” для описания всего множества решений. Самым известным примером такой задачи является задача многих тел. Со времен Эйлера ищут ее частные периодические решения и к настоящему моменту разработаны численные методы, позволившие найти многие тысячи решений [2, 3]. Безусловным прорывом стало отыскание в конце прошлого века решения в форме восьмерки [4, 5, 6]. Поиск периодических решений задачи многих тел в настоящее время ведется на суперкомпьютерах [7, 8], так на ММСР’2024 было представлено более 5 тысяч таких решений, найденный на HybriLIT platform [9].

В 1990-х годах возникла концепция геометрических интеграторов дифференциальных уравнений [10] и встал вопрос о поиске таких разностных схем, которые не только аппроксимируют исходную динамическую системы, но и подражают некоторым свойствам ее точных решений. В конце прошлого века в центре внимания были наследование

Ключевые слова: динамические системы, волчок, эллиптические функции, конечные разности, периодические решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект No. 20-11-20257).

интегралов движения (консервативность) и гамильтоновой структуры (симплектичность) [10]. Однако с практической точки зрения разностную схему можно признать подражающей исходной задаче, если она наследует в некотором смысле периодические решения исходной динамической задачи.

Для случая линейного осциллятора простейшая симплектическая схема – схема средней точки – не только сохраняет интеграл энергии и симплектическую структуру задачи, но и подражает периодическим решениям: приближенное решение за шаг по времени Δt проходит на фазовой плоскости дугу окружности фиксированной длины [11, п. 2]. Все отличие дискретного описания от непрерывного сводится к тому, что длины дуг, который проходит тело в дискретном и непрерывном случае, отличаются на величину порядка Δt^2 . Для нелинейных осцилляторов, интегрируемых в эллиптических функциях, наследование периодичности нам удалось проследить для схемы Кагана [11, п. 5]. Сами схемы Кагана вошли в употребление относительно недавно [12, 13, 14].

Возможны различные подходы к определению понятия периодического приближенного решения [11, п. 5.3]. На наш взгляд самым простым и в то же время самым общим является представление о периодическом приближенном решении как периодической последовательности, предложенное в [15]. Удобство этого определения состоит в том, что оно естественным образом формулируется для любой разностной схемы, а задача отыскания периодических решений становится чисто алгебраической.

Приступая к компьютерным экспериментам, мы полагали, что 1.) приближенные решения, найденные по схеме Кагана, всегда наследуют периодичность точного решения, и 2.) приближенные решения, найденные по схеме средней точки и ей подобным, наследуют ее только в линейном случае. Нам казалось, что между обратимостью схемы – важнейшим свойством схемы Кагана [11] – и наследованием периодичности должна быть прямая связь. Представленные ниже эксперименты опровергают это предположение.

§2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1)$$

По методу конечных разностей эта система заменяется системой алгебраических уравнений

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}, \Delta t) = 0, \quad (2)$$

связывающей значения переменной $\mathbf{r}$ при t и при $t + \Delta t$, последнее далее обозначается как $\hat{\mathbf{r}}$. Здесь и далее будем считать шаг Δt положительным числом. Приближенное решение представляет собой последовательность $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots$, элементы которой вычисляются рекуррентно как решения системы

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}, \Delta t) = 0$$

относительно $\mathbf{r}_{n+1}$.

Здесь нужно сделать одно важное для дальнейшего уточнение. Если исходная задача линейна или если используется схема Кагана, то система (2) является линейной относительно $\hat{\mathbf{r}}$ и поэтому вопрос о выборе корня при вычислении $\mathbf{r}_{n+1}$ не возникает. Однако в общем случае мы сталкиваемся с проблемой лишних корней [11, п. 3]. В численном анализе эта проблема решается следующим образом. Для решения системы относительно $\hat{\mathbf{r}}_{n+1}$ используется метод итераций, который сходится при достаточно малых шагах Δt возвращает корень, близкий к $\mathbf{r}_n$. Это правило выводит нас за рамки чистой алгебры. По аналогии с терминологией, принятой в элементарной математике, будем называть определенную рекуррентно последовательность $\{\mathbf{r}_n\}$ приближенным решением, найденным по схеме (2), вне зависимости от способа выбора корня.

В рамках компьютерных экспериментов [15] мы заметили, что приближенные решения осциллятора Якоби, найденные по схеме Кагана, не просто аппроксимируют периодические решения, но и при некоторых значениях шага Δt образуют периодическую последовательность, то есть при некотором n удовлетворяют условию

$$\mathbf{r}_{n+m} = \mathbf{r}_m \quad \forall m = 0, 1, \dots$$

При этом величина $T = n\Delta t$ не совпадает с периодом точного решения, но при малых Δt близко к нему. В [11] мы доказали этой свойство схемы Кагана при помощи ее квадратурного представления.

Ничто не мешает перенести это определение на случай произвольных разностных схем.

Определение 1. Решение, найденное по схеме (2), будем называть периодическим, если оно удовлетворяет условию

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0.$$

Под периодом такого решения будем понимать или n , или величину $T = n\Delta t$ в зависимости от контекста.

Поскольку одна точка решения полностью определяет остальные, разностная схема (2) имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \Delta t) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Delta t) = 0 \dots, \mathbf{g}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_0, \Delta t) = 0 \quad (3)$$

совместна. Поэтому исследование периодических приближенных решений всегда сводится к решению систем алгебраических уравнений и, по крайней мере в теории, выполнимо за конечное число действий. Это прямо следует из конечности алгоритма Бухбергера [16].

Следует сразу заметить, что при произвольных значениях шага Δt и начального условия $\mathbf{r}_0$ система (3), содержащая $n - 1$ неизвестных $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}$ и $n + 1$ уравнений, не совместна. Задачу об отыскании периодического приближенного решения задачи Коши

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (4)$$

разумно сформулировать так. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ найти такое значение шага $\Delta t > 0$, что система (3) совместна.

Вообще говоря, число неизвестных больше числа уравнений, поэтому периодические решения, вообще говоря, должны существовать. Однако на практике наблюдаемы только вещественные периоды, поэтому в существенном вопрос сводится к тому, будут ли корни системы (3) вещественны или нет.

§3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Используя встроенную в Sage реализацию алгоритма Бухбергера, мы исследовали задачу об отыскании периодического решения задачи Коши для нескольких случаев. В дальнейших вычислениях вместо символьной переменной Δt мы будем использовать период $T = n\Delta t$. Иными словами, мы исследовали совместность системы

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, T/n) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, T/n) = 0 \dots, \mathbf{g}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_0, T/n) = 0. \quad (5)$$

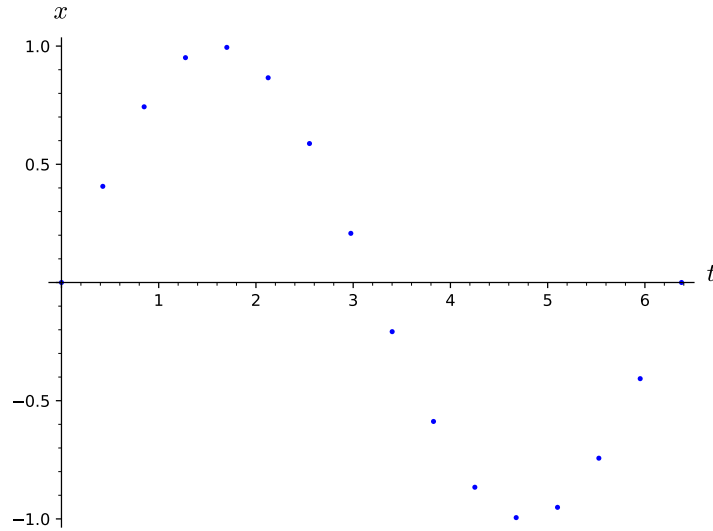


Рис. 1. Приближенное периодическое решение уравнения (6) с периодом $n = 15$, найденное по схеме средней точки.

3.1. Линейный осциллятор. Прежде всего, чтобы верифицировать наш подход, мы рассмотрели периодические решения линейного осциллятора

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (6)$$

найденные по схеме средней точки. Из геометрических соображений ранее было доказано, что таковые существуют при всех $n \in \mathbb{N}$ и при стремлении n к бесконечности период $T = n\Delta t \rightarrow 2\pi$ [17, 18]. Проверим это.

Для (6) система (5) – линейная относительно неизвестных $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}$, их исключение приводит к уравнению относительно T^2 . Для схемы средней точки это уравнение имеет положительные корни. Например, при $n = 15$ таковым будет $T = 6.3767 \simeq 2\pi$. При этом при $x_0 = 0, y_0 = 1$ график решения (рис. 1) весьма схож с графиком обычного синуса. Это вполне согласуется с геометрической интерпретацией решения гармонического осциллятора по схеме средней точки [17, 18].

Вопрос о том, имеет ли задача (6) периодическое решение при аппроксимации по явной схеме Эйлера ранее не исследовался. Наши вычисления показали, что при n в районе 10 уравнение для T не имеет вещественных корней, отличных от нуля, поэтому явная схема Эйлера не дает периодических решений. Отсюда можно сделать первый важный вывод: наличие точных периодических решений не гарантирует существование приближенных периодических решений.

3.2. Нелинейный осциллятор. Обратимся теперь к нелинейному осциллятору

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x^3. \quad (7)$$

На существование периодического решения, полученного по схеме Кагана, было указано [15]. Куда более интересным является вопрос о существовании периодических решений, найденных по схеме средней точки.

Возьмем для простоты небольшое n , а именно, $n = 5$. Для схемы средней точки получается система, из которой после исключения $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_4$ получается уравнение, связывающее начальную точку и T . Так и должно быть, поскольку в нелинейном случае период всегда зависит от начальных условий. Зафиксируем начальную точку

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) = (0, 1),$$

тогда получается уравнение для отыскания T^2 , которое, помимо нуля, имеет два положительных корня. Оба значения для T дают периодические решения, представленные на рис. 2. В первом случае на фазовой плоскости получается пятиугольник, во втором – пентаграмма. Точно такую же ситуацию мы наблюдали для периодических решений эллиптического осциллятора, найденных по схеме Кагана [15].

Отсюда следует, что схема средней точки подражает периодичности эллиптического осциллятора (7) ничуть не хуже, чем схема Кагана. Особенно интересно здесь то, что схема средней точки для нелинейных осцилляторов задает многозначное соответствие между $\mathbf{r}$ и $\hat{\mathbf{r}}$. Для построения численного решения к системе (2) добавляют правило выбора корня, без него мы бы на каждом шаге получали лишние корни [11]. При составлении системы (5) это правило никак не учитывалось и тем не менее никаких лишних решений эта система не дает. Таким образом получается, что условие периодичности $\mathbf{r}_{n+m} = \mathbf{r}_m$ содержит в себе правило выбора корня.

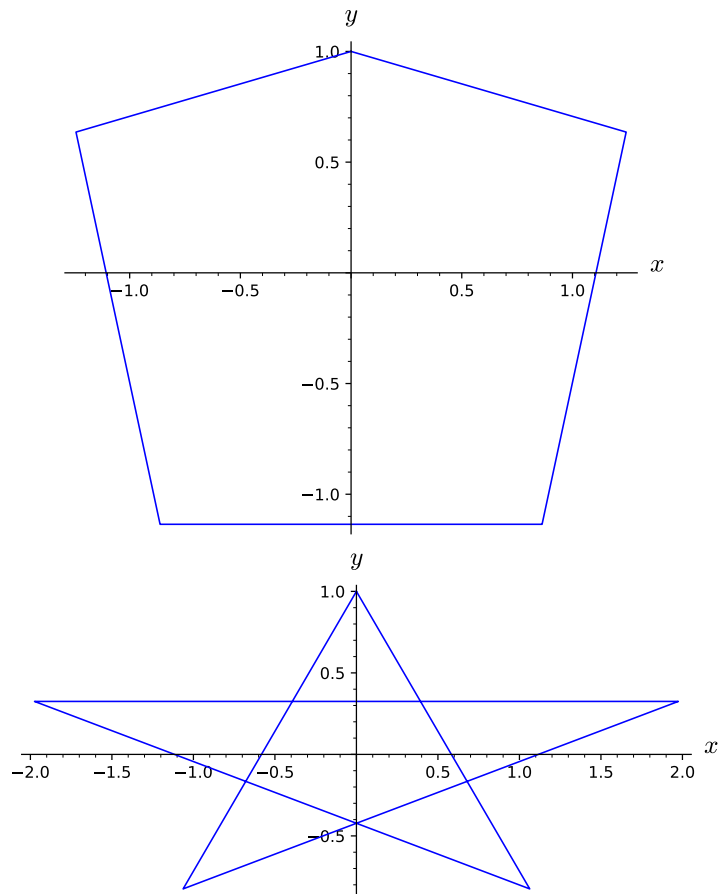


Рис. 2. Приближенное периодическое решение уравнения (7) с периодом $n = 5$, найденное по схеме средней точки при $T = 7.59556885597975$ (сверху) и $T = 60.7538695639458$ (снизу).

3.3. Система Вольтерры–Лотки. Обратимся теперь к системе Вольтерры–Лотки, взяв для определенности следующие числовые

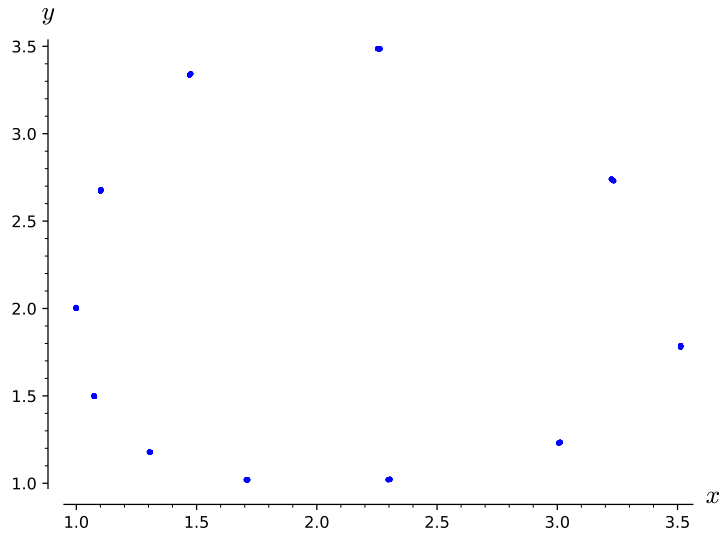


Рис. 3. Приближенное периодическое решение задачи (8), найденное по схеме Кагана при $\Delta t = 0.30083\dots$. Указаны первые 400 точек.

значения для ее параметров:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = -x(y-2), & \frac{d}{dt}y = (x-2)y, \\ x(0) = 1, & y(0) = 2 \end{cases} \quad (8)$$

Эта задача имеет периодическое решение, период равен примерно $3.24\dots$. Его нетрудно найти, решив задачу численно по методу Рунге–Кутты с достаточно малым шагом.

Экспериментируя со схемой Кагана, мы случайно нашли, что эта задача имеет приближенное решение при $\Delta t = 0.30083\dots$, представленное на рис. 3. Кажется, что $\mathbf{x}_{11} = \mathbf{x}_0$, а небольшие расхождения в значениях связаны с ошибкой округления или неточным определением шага Δt . Более того, для периода $T = 11\Delta t$ получается вполне разумное значение $3.31\dots$

Мы исследовали совместность системы (5) для задачи (8). Вопреки нашим ожиданиям, эта система не имеет ненулевых вещественных решений в т.ч. при $n = 11$. Это означает, что схема Кагана не всегда

наследует периодический характер решения. Заметим, что в случае системы Вольтерры–Лотки, эта схема не может унаследовать и интеграл движения, который не является алгебраическим. Тем не менее, точки приближенного решения выстраиваются вдоль некоторого овала. При этом при больших значения Δt отличие этого овала от интегральной кривой уравнения (8) хорошо заметно.

В скобках заметим, что исследование совместности системы для $n = 11$ является трудной задачей для встроенных в Sage функций. Мы исключали переменные, используя тот факт, что схема Кагана задает преобразования Кремоны, тем же путем, который мы использовали в [15].

§4. КУВЫРКИ ВОЛЧКА

В процессе отыскания периодических решений, мы находим не только приближенное решение, но и его период. Кажется, что это дает в наши руки естественный масштаб по времени и, взяв десяток точек, мы можем, пусть и грубо, описать периодическое движение. Однако в действительности ситуация намного драматичнее.

Возьмем для примера волчок Джанибекова [19]. Эта система описывается тремя дифференциальными уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = \frac{C-B}{A}qr, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{A-C}{B}pr, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{B-A}{C}pq,$$

где A, B, C – главные моменты инерции и интегрируется в эллиптических функциях [20]. Случай, описанный Джанибековым, интересен резкими кувырками волчка, представляющими очевидную трудность при численном интегрировании. В этом случае берут главные моменты инерции из пропорции $A : B : C = 8 : 7 : 2$. Тогда, если закрутить волчок относительно средней (неустойчивой) оси инерции и слегка возмутить начальные условия, то есть взять $p(0) = 0$, $q(0) = 1$ и $r(0) = \varepsilon$, где ε – малый параметр, то волчок будет кувыркаться: пол периода $q \simeq 1$, вторую половину периода $q \simeq -1$. Переход между этими значениями происходит тем быстрее, чем меньше ε , а сам период растет как $\ln \varepsilon^{-1}$ [19].

Связь между точным решением в эллиптических функциях и приближенным решением по схеме Кагана для волчка описана в [11, п. 5]. Вычислим теперь периодическое решение для $n = 12$. Чтобы сделать

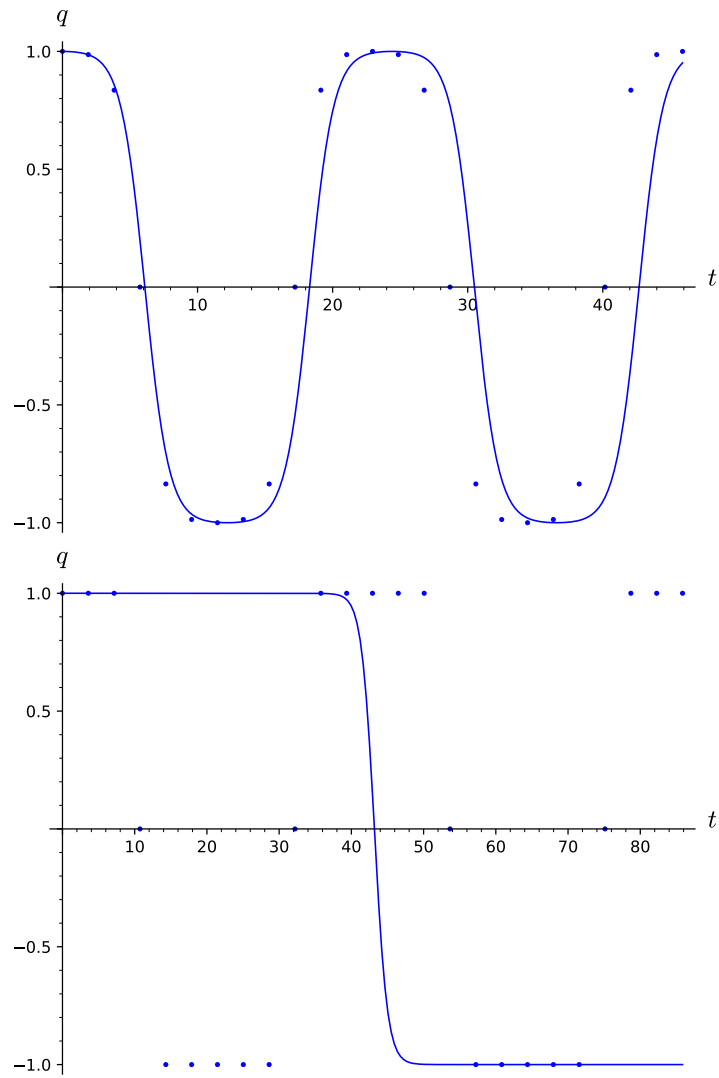


Рис. 4. Точное и приближенное периодические решения, описывающие кувьрки волчка при ε , равном 10^{-1} (сверху) и 10^{-10} (снизу).

вычисления быстро, мы, конечно, как и в задаче многих тел, рассмотрим не период, а половину периода, приняв за начальную точку $p = r = 0, q = 1$, а за конечную $p = r = 0, q = -1$. При $\varepsilon = 10^{-1}$ мы получили три периодических решений с периодами 22.952, 42.569 и 42.932. Наименьшему из них отвечает периодическое решение, которое прекрасно подражает точному, см. рис. 4. Всего 12 точек за период на схеме второго порядка дают хорошую точность в определении периода (ошибка менее 5 %) и прекрасное качественное повторение движения.

Однако с уменьшением параметра ε ситуация не меняется качественно, но существенно меняется количественно. Напр., при $\varepsilon = 10^{-10}$ решение с наименьшим периодом в 42.925 качественно схоже с точным, но величина этого периода в несколько раз отличается от периода точного решения, см. рис. 4. Глядя на это решение, нельзя не заметить, что переход от $q = 1$ к $q = -1$ описывается одной промежуточной точкой $q = 0$. Это означает, что точность определения периода зависит не от числа точек за период, а от числа точек, приходящихся на переходный слой.

Таким образом, при кувырках мы сталкиваемся с весьма необычной ситуацией. Качественно приближенное решение совпадает с точным: волчок действительно периодически кувыркается, переходный слой очерчен резко. Однако при этом ошибка в определении величины периода весьма приметна.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итог проделанным экспериментам.

Прежде всего мы выяснили, что приближенные решения, найденные по схеме Кагана, не всегда наследуют периодичность точного решения. Сказанное верно для линейных и эллиптических осцилляторов и не верно, например, для системы Вольтерры-Лотки.

Во-вторых, приближенные решения, найденные по схеме средней точки, наследуют периодичность точного решения не только в случае линейных осцилляторов, но и в случае эллиптических осцилляторов. В то же время разностные схемы, вносящие в модель диссипацию или антидиссипацию, напр., явная схема Эйлера не могут давать периодических решений. Поэтому можно сказать, что класс разностных схем, дающих периодические решения для заданной динамической системы, шире класса схем Кагана. Вопрос о том, на сколько он шире, требует дополнительного изучения.

Мы оставили в стороне, безусловно, важный вопрос о численном решении системы уравнений (5). В том случае, когда за период должно уместиться несколько десятков точек, аналитическое решение системы становится весьма затратным. Наши эксперименты с системой Вольтерры–Лотки показали, что решение этой системы с малой невязкой может существовать даже тогда, когда в действительности система не совместна.

В рамках предложенного подхода к отысканию периодических решений, мы задаем число точек решения за период, а получаем не только периодическое решение, но и его период. К сожалению, полученная таким путем оценка для периода точного решения может отличаться от периода точного решения весьма значительно. Ключевым препятствием к близости этих периодов является быстрое изменение точного решения за короткие отрезки времени, например, резкие кувырки волчка.

Предложенный подход к отысканию периодических решений в равной мере применим к явным и к неявным разностным схемам. Условие периодичности в некотором смысле “регуляризует” неявную схему, убирая лишние корни. Это обстоятельство в равной мере неожиданно и любопытно. Дело в том, что лишние корни – главная проблема всех неявных схем, из-за которой расчеты по неявным схемам становится во много раз более сложным, чем расчеты по схемам явным. Результаты наших экспериментов позволяют надеяться, что эту проблему можно обойти при расчете периодических решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Козлов, *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, РХД, Москва–Ижевск (2000).
2. Ch. Marchal, *The three-body problem*, Elsevier (1990).
3. R. Montgomery, *Dropping bodies*. — Math. Intell. **45**, No. 2 (2023), 168–174.
4. C. M. Moor, *Braids in classical gravity*. — Phys. Rev. Lett., **70** (1993), 3675–3679.
5. A. Chenciner, R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*. — Annals Math. **152**, No. 4 (2000), 881–901.
6. R. Montgomery, *A New Solution to the three-body problem*. — Notices of the AMS **48**, No. 4 (2001), 471–481.
7. I. Hristov, R. Hristova, I. Puzynin, T. Puzynina, Z. Sharipov, Z. Tukhliev, *A Database of High Precision Trivial Choreographies for the Planar Three-Body Problem*. In: Numerical Methods and Applications, Springer Nature Switzerland (2023), pp. 171–180.

8. I. Hristov, R. Hristova, V. Dmitrasinovic, *Three-body periodic collisionless equal-mass free-fall orbits revisited*. — Celest. Mech. Dyn. Astron. **136**, No. 7 (2024).
9. I. Hristov, R. Hristova, N. Kutovskiy, T. Puzynina, Z. Sharipov, Z. Tukhliev, *A class of symmetric three-body periodic free-fall orbits*. — In: International Conference “Mathematical Modeling and Computational Physics” (MMCP 2024), Yerevan, Armenia, October 21-25, 2024. (2024), p. 99.
10. E. Hairer, G. Wanner, Ch. Lubich, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* Springer, Berlin Heidelberg New York (2000).
11. M. Malykh, M. Gambaryan, O. Kroytor, A. Zorin, *Finite difference models of dynamical systems with quadratic right-hand side*. — Mathematics **12**, No. 1 (2024), 167.
12. J. M. Sanz-Serna, *An unconventional symplectic integrator of W. Kahan*. — Appl. Numer. Math. **16** (1994), 245–250.
13. E. Celledoni, R. I. McLachlan, B. Owren, G. R. W. Quispel, *Geometric properties of Kahan’s method*. — J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013), 025201.
14. M. Petrerá, J. Smirin, Yu. B. Suris, *Geometry of the Kahan discretizations of planar quadratic Hamiltonian systems*. — year = 2019, Proc. R. Soc. A **475** (2019), 20180761.
15. A. Baddour, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, *On periodic approximate solutions of dynamical systems with a quadratic right-hand side*. — J. Math. Sci. **261**, No. 5 (2022), 698–708.
16. D. Cox, J. Little, D. O’Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, Springer (2007).
17. V. P. Gerdt, M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Yu Ying, *On the properties of numerical solutions of dynamical systems obtained using the midpoint method*. — Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science **27**, No. 3 (2019), 242–262.
18. Yu Ying, M. D. Malykh, *On conjugate difference schemes: the midpoint scheme and the trapezoidal scheme*. — journal = Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science **29**, No. 1 (2021), 63–72.
19. A. G. Petrov, S. E. Volodin, *Janibekov’s effect and the laws of mechanics*. — Dokl. Phys. **58**, No. 8 (2013), 349–353.
20. V. V. Golubev, *Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1960).

Wang Shiwei, Zorin A. V., Konyaeva M. A., Malykh M. D., Sevastianov L. A. On periodic approximate solutions of ordinary differential equations.

The issue of inheriting periodicity of an exact solution of a dynamic system by a difference scheme is considered. It is shown that some difference schemes (midpoint scheme, Kahan scheme) in some special cases provide approximate solutions of differential equations, which are periodic sequences. Such solutions are called periodic. A purely algebraic method of finding such solutions is developed. It is shown that midpoint scheme inherits

periodicity not only in case of linear oscillator, but also in case of nonlinear oscillator, integrable in elliptic functions.

Российский университет
дружбы народов имени Патриса Лумумбы,
Москва

E-mail: 1995wsw@gmail.com

E-mail: zorin_av@pfur.ru

E-mail: 1032217044@rudn.ru

Поступило 29 сентября 2025 г.

Российский университет
дружбы народов имени Патриса Лумумбы;
Объединённый институт
ядерных исследований, Дубна

E-mail: malykh_md@pfur.ru

E-mail: sevastianov_la@rudn.ru