Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 543, 2025 г.

Ю. А. Блинков, А. А. Мамонов, С. И. Салпагаров

РЕАЛИЗАЦИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ И ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ БАЗИСОВ ГРЁБНЕРА

§1. Введение

В современной математической науке и её приложениях алгоритмы компьютерной алгебры играют ключевую роль в решении широкого спектра задач. Особое место занимают алгоритмы вычисления базисов Грёбнера, которые стали фундаментальным инструментом для решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Актуальность проблемы тестирования этих алгоритмов обусловлена несколькими факторами:

- Возрастающая сложность математических моделей в различных областях науки и техники требует эффективных методов решения нелинейных систем уравнений.
- Экспоненциальный рост вычислительной сложности при увеличении размерности задач создаёт необходимость в оптимизации алгоритмов и тщательной оценке их производительности.
- Разнообразие модификаций базовых алгоритмов требует систематического подхода к сравнению их эффективности на различных классах задач.

Развитие методов решения нелинейных алгебраических уравнений ознаменовалось очень важным прорывом в 1965 году, когда Б. Бухбергер разработал фундаментальный алгоритм построения базиса Грёбнера. Данный алгоритм представил принципиально новый подход к трансформации полиномиальных систем, позволяющий приводить их

Ключевые слова: базисы Грёбнера, компьютерная алгебра, система тестирования, классификация задач.

к более удобной для анализа канонической форме. Несмотря на теоретически доказанную сходимость метода, его практическая реализация сталкивалась с существенными вычислительными ограничениями, связанными с экспоненциальным ростом сложности при увеличении размерности задачи [1]. Известно, что 1990-е годы характеризовались интенсивным развитием модификаций алгоритма Бухбергера, направленных на повышение его эффективности. Некоторые оптимизации, разработанные в этот период, оказались настолько значимыми, что даже в настоящее время сохраняются компаниями в качестве интеллектуальной собственности. Существенный вклад в развитие этой теории внесли российские математики В. П. Гердт, А. Ю. Жарков и Ю. А. Блинков, предложившие инволютивный подход к построению базисов Грёбнера [2–5]. Описанный этими учеными метод, основанный на синтезе классического алгоритма Бухбергера и теории дифференциальных уравнений начала XX века, продемонстрировал очень высокую эффективность для определенных классов математических задач [6–8]. В 2000-х годах теоретические разработки получили практическую реализацию в виде программного комплекса GInv, который стал эффективным инструментом для исследований в области компьютерной алгебры [9–11]. Значительная модернизация системы в 2010-х годах, включавшая оптимизацию управления памятью, привела к созданию версии GInv 2.0, которая находится в открытом доступе `https://github.com/blinkovua/GInv`. Одним из значительных достижений данной системы стало аналитическое решение задачи Попова о кубатурных формулах на сфере, ранее решавшейся только численными методами с использованием суперкомпьютеров [12]. Современное развитие математического программного обеспечения требует тщательной оптимизации как производительности вычислений, так и эффективности использования вычислительных ресурсов, что особенно критично при решении задач высокой размерности. В результате проведенных исследований и разработок математическое сообщество получило мощный инструментарий для решения широкого класса задач, ранее считавшихся вычислительно неразрешимыми. Продолжающиеся исследования в данной области направлены на дальнейшее совершенствование существующих методов и алгоритмов.

На сегодняшний день существует ряд систем компьютерной алгебры, специализирующихся на работе с базисами Грёбнера. Коммерческие системы: Maple, Mathematica, MAGMA. Системы с открытым исходным кодом: Sage, Singular, Macaulay2. Специализированные системы: GInv (версии 1.0 и 2.0)

Особое место среди этих систем занимает Sage, который интегрирует возможности многих специализированных систем компьютерной алгебры. GInv отличается использованием инволютивных базисов Жане и Жане-подобных, что обеспечивает более эффективное решение определённых классов задач [9–11].

Основной целью данной работы является разработка комплексной системы для классификации и оценки эффективности алгоритмов вычисления базисов Грёбнера.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- Разработка методологии классификации тестовых задач по:
  - Структурной сложности
  - Вычислительным характеристикам
  - Тематической принадлежности
- Создание автоматизированной системы тестирования, включающей:
  - Модуль импорта и классификации данных
  - Модуль вычисления базисов Грёбнера
  - Систему анализа и визуализации результатов
- Реализация механизмов оптимизации использования памяти и повышения производительности вычислений
- Проведение комплексного тестирования системы `GInv 2.0` на репрезентативном наборе задач

Особое внимание в работе уделяется созданию универсальной системы формализации тестов, которая может быть использована различными системами компьютерной алгебры.

§2. Методология классификации тестовых задач

2.1. Структурная сложность задач.

2.1.1. *Анализ размерности систем уравнений.* Размерность системы является одним из ключевых параметров, определяющих сложность вычисления базиса Грёбнера. В рамках исследования предлагается выделить следующие категории: малые системы (3–4 переменные); средние системы (5–7 переменных); большие системы (8–10 переменных).

Известно, что время вычисления базиса Грёбнера экспоненциально возрастает с увеличением числа переменных, что делает этот параметр критически важным при классификации задач. При этом наблюдается значительная корреляция между количеством переменных и объемом требуемой оперативной памяти, что особенно заметно при работе с системами высокой размерности. Дополнительным фактором, влияющим на вычислительную сложность, является структура связей между переменными в системе уравнений, которая может существенно варьироваться даже в пределах одной размерностной категории. Стоит отметить, что для систем с более чем 10 переменными вычисление базиса Грёбнера классическими методами становится практически неосуществимым на современных персональных компьютерах без применения специальных методов оптимизации. Тестирование показало, что даже незначительное увеличение числа переменных в диапазоне от 8 до 10 может привести к увеличению времени вычислений на несколько порядков.

2.1.2. *Классификация по степени полиномов.* Степень входящих в систему полиномов существенно влияет на сложность промежуточных вычислений. Выделяются следующие классы: линейные системы (степень 1); квадратичные системы (степень 2); кубические системы (степень 3); системы высших степеней (степень > 3).

Особое внимание будет уделено однородным системам, где все члены полиномов имеют одинаковую степень. Установлено, что увеличение степени полиномов приводит к значительному росту числа промежуточных членов при вычислении S-полиномов и выполнении операций редукции. При работе с полиномами высших степеней наблюдается существенное увеличение размера коэффициентов в промежуточных вычислениях, что создает дополнительную нагрузку на вычислительные ресурсы. Важным моментом является тот факт, что комбинация высокой размерности системы с высокими степенями полиномов может привести к экспоненциальному росту требований к памяти даже на ранних этапах вычислений. В случае неоднородных систем сложность вычислений дополнительно возрастает из-за необходимости учета взаимодействия членов различных степеней.

2.1.3. *Оценка количества уравнений.* Количество уравнений в системе рассматривается в соотношении с числом переменных: недоопределенные системы (уравнений меньше, чем переменных); определенные системы (число уравнений равно числу переменных); переопределенные системы (уравнений больше, чем переменных). В процессе исследования будет предпринята попытка выявления соотношения между количеством уравнений и числом переменных, которые могут влиять на структуру базиса Грёбнера и сложность его вычисления. Нами в явном виде пока не установлено, но для недоопределенных систем должно быть характерно наличие бесконечного множества решений, что потребует специальных методов параметризации при анализе результатов. В случае определенных систем вычислительная сложность наиболее предсказуема и может быть эффективно оценена на основе размерности и степени полиномов. Переопределенные системы представляют для нас особый интерес, так как могут содержать избыточные или противоречивые условия, что существенно усложнит процесс редукции и потребует дополнительных проверок на совместность. Эффективность различных модификаций алгоритма Бухбергера может существенно варьироваться в зависимости от типа системы по данной классификации [13].

2.2. Вычислительные характеристики. Для оценки временной сложности предлагается использовать следующие показатели: быстрые вычисления (до 1 секунды); средние по времени вычисления (1–60 секунд); длительные вычисления (более 60 секунд); сверхдлительные вычисления (более часа). Представленная классификация временных метрик основана на экспериментальных данных и практических потребностях исследователей. При проведении вычислительных экспериментов выявлено, что распределение задач по временным категориям существенно коррелирует с размерностью систем и степенью входящих в них полиномов. Быстрые вычисления характерны преимущественно для линейных и квадратичных систем малой размерности, в то время как системы высших степеней даже при небольшом числе переменных могут потребовать значительных временных затрат. Особого внимания заслуживают сверхдлительные вычисления, где критическим фактором становится не только общее время работы, но и стабильность процесса вычислений, требующая специальных механизмов контроля и возможности сохранения промежуточных результатов. Практика показывает, что для эффективной организации вычислительного процесса необходимо предварительное тестирование на малых подсистемах для прогнозирования времени выполнения полного расчета.

2.2.1. *Анализ промежуточных вычислений.* При разботки системы оценивается объем и сложность промежуточных результатов следующими параметрами: количество генерируемых S-полиномов; степень промежуточных полиномов; число операций редукции; количество коэффициентов в промежуточных вычислениях.

В ходе вычисления базиса Грёбнера анализ промежуточных результатов играет весьма важную роль в оценке эффективности алгоритма и оптимизации вычислительных ресурсов. Устновлено, что количество генерируемых S-полиномов может экспоненциально расти даже при незначительном увеличении размерности исходной системы, что создает нагрузку на оперативную память. Степень промежуточных полиномов имеет тенденцию к росту в процессе вычислений, причем этот рост может быть особенно значимым при работе с неоднородными системами высокой степени. Анализ числа операций редукции выявляет критические точки алгоритма, где происходит наибольшая концентрация вычислительных затрат, что позволяет оптимизировать процесс за счет применения специализированных критериев отбора пар для редукции. Мониторить размер коэффициентов в промежуточных вычислениях необходимо для предотвращения переполнения и оценки требуемой точности вычислений.

2.2.2. *Требования к оперативной памяти.* Классификация по объему требуемой памяти: низкие требования (до 100 МБ); средние требования (100 МБ – 1 ГБ); высокие требования (более 1 ГБ).

Анализ потребления оперативной памяти при вычислении базисов Грёбнера показывает зависимость от характеристик входных данных и особенностей реализации алгоритма. Системы с низкими требованиями к памяти характерны для задач малой размерности с целочисленными коэффициентами, где промежуточные вычисления не приводят к значительному росту данных. При переходе к средним требованиям наблюдается качественное изменение характера использования памяти, связанное с необходимостью хранения большого числа промежуточных полиномов и их коэффициентов. Особую категорию представляют задачи с высокими требованиями к памяти, где критическим фактором становится необходимость эффективного управления памятью и реализации механизмов выгрузки неиспользуемых данных.

Практика показывает, что для таких задач существенное значение имеет реализация алгоритмов кэширования и оптимизация структур данных.

2.2.3. *Особенности редукции базисов.* Мы предлагаем анализировать характеристики процесса редукции следующими параметрами: сложность редукции промежуточных полиномов; степень минимизации базиса; эффективность применения критериев Бухбергера

Процесс редукции базисов Грёбнера представляет собой критически важный этап вычислений, который существенно влияющий на эффективность всего алгоритма. Известно, что сложность редукции промежуточных полиномов может варьироваться в широких пределах в зависимости от структуры исходной системы и выбранного порядка термов. При неоптимальном выборе стратегии редукции количество промежуточных вычислений может возрастать экспоненциально. Здесь важное значение приобретает эффективность применения критериев Бухбергера, которые позволяют существенно сократить число необходимых проверок и редукций. Правильный выбор и реализация этих критериев могут снизить вычислительную сложность на несколько порядков. Представим для удобства таблицу 1, в которой представлены различные системы по таким критериям как количество переменных, степень полиномов, требования к памяти и время вычисления, разделяя их на малые, средние и большие.

Таблица 1. Таблица классификации задач.

Категория	**Малые системы**	**Средние системы**	**Большие системы**
Количество переменных	3-4	5-7	8-10
Степень полиномов	1-2	2-3	>3
Требования к памяти	<100 МБ	100 МБ - 1 ГБ	>1 ГБ
Время вычисления	<1 сек	1-60 сек	>60 сек

2.3. Тематическая классификация.

2.3.1. *Экономические модели.* Рассматриваются системы, описывающие: модели равновесия; оптимизационные задачи; финансовые модели; модели распределения ресурсов. Применение базисов Грёбнера в экономическом моделировании открывает новые возможности для анализа сложных экономических систем. При исследовании моделей равновесия возникают нелинейные системы уравнений, решение которых традиционными методами может быть затруднительно или невозможно. Применение методов оптимизации в экономических задачах часто приводит к системам полиномиальных уравнений и неравенств, где базисы Грёбнера позволяют находить глобальные экстремумы целевых функций. В области финансового моделирования данные методы применяются для анализа сложных финансовых инструментов и оценки рисков, особенно в случаях нелинейных зависимостей между параметрами. Задачи распределения ресурсов, возникающие в экономическом планировании, также могут быть эффективно решены с использованием базисов Грёбнера, особенно когда требуется учет множественных нелинейных ограничений.

В целом предложенная классификация позволит систематизировать подход к анализу эффективности различных алгоритмов вычисления базисов Грёбнера и, на основе этого, формировать рекомендации по выбору оптимального метода решения для конкретных классов задач.

§3. Общая структура и реализация системы

Разрабатываемая нами система тестирования представляет собой комплексное программное решение, состоящее из трех основных функциональных блоков, взаимодействующих между собой для обеспечения полного процесса тестирования алгоритмов вычисления базисов Грёбнера: модуль импорта и классификации данных; модуль вычисления базисов Грёбнера и модуль анализа и визуализации результатов.

Преполагается, что архитектура системы будет построена по модульному принципу, что обеспечит высокую степень независимости компонентов системы и возможность их дальнейшей модификации без существенного влияния на работу других частей системы.

Система будет поддерживает механизм обновления результатов при повторном выполнении тестов, что позволяет накапливать статистику и отслеживать изменения производительности при модификации алгоритмов.

Архитектура системы обеспечивает высокую степень масштабируемости и позволяет легко интегрировать новые модули анализа и визуализации без существенных изменений в существующем коде.

Система будет реализована с учетом современных практик разработки программного обеспечения и включает следующие технические решения:

В качестве формата хранения и обмена данными выбран JSON, что обусловлено следующими преимуществами:

- Простота структуры ключ-значение
- Компактность хранения данных
- Кроссплатформенная совместимость
- Широкая поддержка в различных языках программирования
- Удобство ручного редактирования и анализа

Также важно, что будет разработан механизм подробного протоколирования процесса тестирования: запись всех этапов выполнения тестов; фиксация временных характеристик; сохранение промежуточных результатов; обработка и регистрация ошибок.

В версии `GInv 2.0` реализован оригинальный подход к управлению памятью. Все этапы реализации механизмов оптимизации использования памяти описаны в [14].

На рисунке 1. схематично показана общая структура разрабатываемой системы тестирования, отражающая взаимодействие основных функциональных блоков: модуля импорта и классификации данных, модуля вычисления базисов Грёбнера и модулей анализа и визуализации результатов.v

§4. Заключение

В рамках проведенного исследования была описана комплексная автоматизированная система для классификации и оценки эффективности алгоритмов вычисления базисов Грёбнера. Основные достижения работы можно разделить на несколько ключевых направлений.

Во-первых, была создана детальная методология классификации тестовых задач, учитывающая три основных аспекта: структурную сложность, вычислительные характеристики и тематическую принадлежность. Разработанная система классификации позволяет эффективно категоризировать задачи по размерности (от малых до больших систем), степени входящих полиномов и количеству уравнений относительно числа переменных см.таблицу 1.

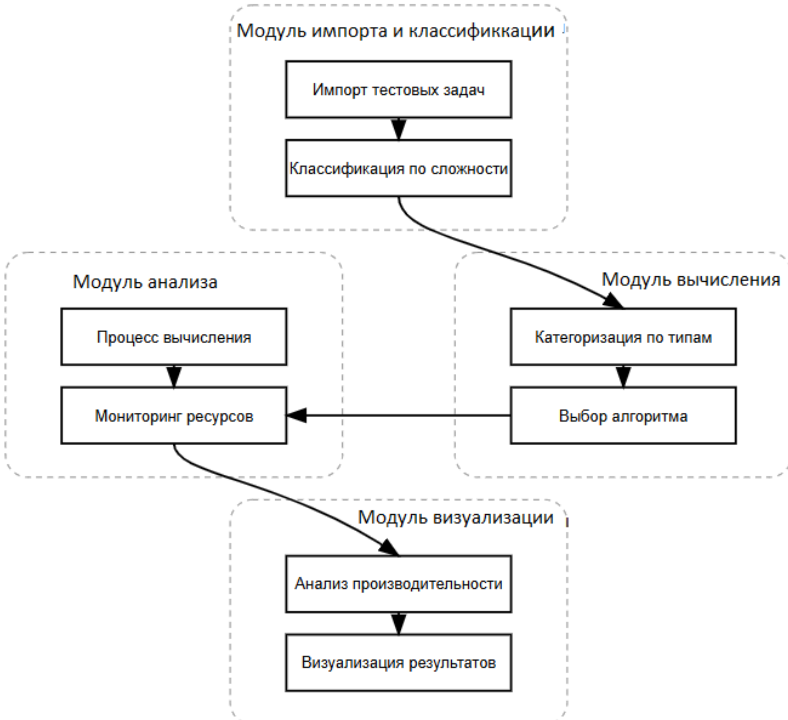

Рис. 1. Диаграмма модулей системы.

Во-вторых, была предложена система оценки вычислительных характеристик, включающая анализ временной сложности, требований к оперативной памяти и особенностей редукции базисов. Особое внимание было уделено анализу промежуточных вычислений, что позволит выявить критические точки алгоритмов и оптимизировать процесс вычислений.

В-третьих, был описан прототип программного комплекса с модульной архитектурой, обеспечивающей высокую степень масштабируемости и гибкости. Разработанная система позволяет не только проводить комплексное тестирование алгоритмов, но и накапливать статистику для дальнейшего анализа и оптимизации. Созданная система представляет собой универсальный инструмент для исследования и сравнения различных алгоритмов вычисления базисов Грёбнера, что открывает новые возможности для развития и оптимизации методов компьютерной алгебры. Результаты работы могут быть использованы как для практического применения при решении конкретных математических задач, так и для дальнейших теоретических исследований в области алгоритмов компьютерной алгебры.

Список литературы

1. D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, Springer (2007).
2. A. Yu. Zharkov, Yu. A. Blinkov, *Involution approach to solving systems of algebraic equations.* — In: Proceedings of the 1993 International IMACS Symposium on Symbolic Computation (1993), 11–16.
3. A. Yu. Zharkov, *Involutive Polynomial Bases: General Case*, Preprint JINR E5-94-224 Dubna (2024).
4. A. Yu. Zharkov, Yu. A. Blinkov, *Algorithm for constructing involutive bases of polynomial ideal.* — In: International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering (1994), pp. 258–260.
5. A. Yu. Zharkov, Yu. A. Blinkov, *Involutive bases of zero-dimensional ideals*, Preprint JINR E5-94-318, (1994).
6. A. Yu. Zharkov, Yu. A. Blinkov, *Solving zero-dimensional involutive systems.* — Progress in Mathematics **143** (1996), 389–399.
7. V. P. Gerdt, *Gröbner bases and involutive methods for algebraic and differential equations.* — Computer Algebra in Science and Engineering (1995), 117–137.
8. V. P. Gerdt, *Involutive divisions in mathematica: Implementation and some applications.* — In: Proceedings of the Rhein Workshop on Computer Algebra (1998), pp. 74–91.
9. C.Riquier, *Les Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles*, Gauthier-Villars, Paris (1910).
10. M. Janet, *Systèmes d'écquations aux dérivéces partielles.* — J. de mathématiques, 8e série, **3** (1920), 65–151.
11. J.Thomas, *Differential Systems*, American Mathematical Society, New York (1937).
12. B. Buchberger, *Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, in Recent Trends in Multidimensional System Theory.* — In: Multidimensional system theory (NK Bose ed.) (1985), 184–232.

13. Ю. А. Блинков, С. И. Салпагаров, А. А. Мамонов, И. А. Акопян, *Разработка системы для оценки производительности алгоритмов компьютерной алгебры при нахождении базисов Грёбнера.* — Компьютерные инструменты в образовании, вып. 2 (2024), 39–47.
14. Y. A. Blinkov, E. Y. Shchetinin, *Using Dynamic Memory Reallocation in GInv.* — Program Comput Soft **49** (2023), 355–359.

Blonkov Yu. A., Mamonov A. A., Salpagov S. I. Implementation of automated classification andefficiency evaluation systems for calculation algorithms of Grobner bases.

The article is devoted to the study of the computational complexity of the problem of finding the Grobner basis. The paper proposes to classify such tasks according to various criteria: structural complexity; computational characteristics; thematic affiliation. An automated testing system is also described. Special attention is paid to the creation of a universal test formalization system that can be used by various computer algebra systems.

Саратовский национальный
исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, Саратов
E-mail: blinkovua@gmail.com

Поступило 29 сентября 2025 г.

Саратовский национальный
исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, д. 83, Саратов;
Российский университет
дружбы народов имени Патриса Лумумбы,
Москва
E-mail: mamonov-aa@rudn.ru
E-mail: salpagarov-si@rudn.ru