

Е. Ю. Аксенова, Д. В. Карпов

УДАЛЕНИЕ ДЕРЕВА ИЗ n -СВЯЗНОГО ГРАФА С СОХРАНЕНИЕМ СВЯЗНОСТИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем применять стандартные обозначения. Для графа G будем обозначать через $V(G)$ множество его вершин, а через $v(G)$ – количество вершин.

Определение 1. Граф называется n -связным, если в нем не менее $n + 1$ вершины и он остается связным при удалении любого множества из менее чем n вершин.

Мы будем считать, что $n \geq 3$: большинство рассматриваемых вопросов для двусвязного графа достаточно просты, или не имеют смысла.

1.1. Немного истории и основные результаты. Насколько известно авторам, у вопросов, которым посвящена данная статья, нет длинной истории. Расскажем, откуда пришла идея такие вопросы исследовать.

Хорошо известно, что двусвязный граф на n вершинах для любого $k < n$ можно разбить на связный граф с k вершинами и связный граф с $n - k$ вершинами. Дьори [1] в 1976 году и Ловас в 1977 году обобщили это утверждение: k -связный граф G можно представить как объединение k связных графов с любыми заданными количествами вершин, в сумме дающими $v(G)$.

В 1995 году Мак-Квейг и Ота [2] высказали гипотезу, что для любого t из любого трехсвязного графа с достаточно большим числом вершин можно удалить связный подграф на t вершинах так, чтобы остался двусвязный граф. На настоящий момент гипотеза доказана только для $k \leq 5$ ([2, 3, 7]), причем даже для $k = 4$ доказательство весьма технически сложное. Аналогичные утверждения для большей связности неверны, как показал Мадер [4].

Возникла идея вернуться к более простому вопросу, немного его изменив. Из n -связного (даже из двусвязного графа) можно удалить

Ключевые слова: вершинная связность графа, n -связный граф, дерево.

подграф любого размера так, чтобы остался связный граф. А можно ли удалить конкретный подграф, например, изоморфный конкретному дереву-шаблону? Конечно, нужно, чтобы такие подграфы вообще в любом n -связном графе были. Вспомним классическое утверждение.

Лемма 1. *Пусть T – дерево на не более чем $n+1$ вершине, а G – граф с минимальной степенью вершины не менее n . Тогда можно найти в G подграф, изоморфный T . Более того, если w – фиксированная вершина T , а a – фиксированная вершина G , то можно выбрать этот подграф так, чтобы соответствующая w вершина подграфа совпала с a .*

Мы знаем, что степени всех вершин n -связного графа не менее n , значит, он содержит в качестве подграфа любое дерево на не более чем $n+1$ вершине. Если в таком подграфе-дереве менее n вершин, то их удаление не нарушает связность. Совсем несложно доказать, что это верно для любого дерева на n вершинах (теорема 1).

Оказалось, что для $n+1$ вершины ситуация интереснее: для любого n -связного графа G и любого дерева T на $n+1$ вершине, кроме ежа $K_{1,n}$, можно удалить из G дерево T так, чтобы остался связный граф (теорема 2), а для ежа это утверждение неверно при $n \notin \{3, 5\}$.

Остановимся подробнее на возможности удаления ежа $K_{1,n}$ из n -связного графа так, чтобы остался связный граф. Для $n=3$ это утверждение несложно доказывается (теорема 3). Для $n=4$ и $n \geq 6$ в статье приводится серия n -регулярных n -связных графов, из которых нельзя удалить $K_{1,n}$ так, чтобы остался связный граф. Для $k=5$ вопрос остается открытым. И, наконец, если $n \geq 4$ и n -связный граф G имеет вершину степени более n , из него можно удалить $K_{1,n}$ так, чтобы остался связный граф (теорема 4).

Хорошо известно, что любой n -связный граф G не менее чем с $2n$ вершинами содержит путь не менее чем с $2n$ вершинами. Мы докажем, что для любого $k \leq 2n-1$ из G всегда можно удалить путь с k вершинами так, чтобы остался связный граф (теорема 5). Аналогичное утверждение для пути на $2n$ вершинах неверно: контрпримером является любой полный двудольный граф $K_{m,n}$, где $m \geq n+2$.

1.2. Инструмент доказательств: блоки и точки сочленения.

Доказательства используют точки сочленения и блоки. Мы дадим необходимые определения, а подробности и доказательства можно прочитать в [6], в [5] или в других книгах.

Определение 2. Пусть G – связный граф.

1) Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.

2) *Блоком* называется любой максимальный по включению подграф графа G , не имеющий точек сочленения.

3) *Внутренность* $\text{Int}(B)$ блока B – множество всех вершин блока B , не являющихся точками сочленения графа G .

Блоки и точки сочленения несвязного графа – это блоки и точки сочленения его компонент связности.

Определение 3. Построим граф $B(G)$, вершины которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G и всем его блокам $B_1, \dots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V(B_j)$. Других рёбер в этом графе нет. Граф $B(G)$ называется *деревом блоков и точек сочленения* графа G .

Дерево блоков и точек сочленения – действительно дерево, а всем его листьям соответствуют блоки, они называются *крайними*.

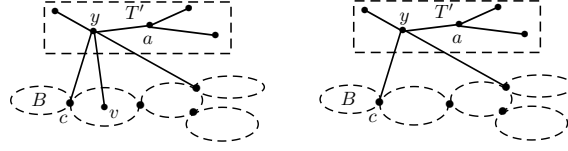
Внутренность блока может быть пустой. Но в крайний блок входит ровно одна точка сочленения (которая отделяет его от остальных вершин графа), поэтому внутренность крайнего блока всегда непуста.

§2. УДАЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ С n И $n + 1$ ВЕРШИНАМИ

Теорема 1. Пусть T – дерево на n вершинах, а G – n -связный граф. Тогда G имеет такой изоморфный T подграф, что при удалении его вершин связность сохраняется. Более того, если w – фиксированная вершина T , а a – фиксированная вершина G , то можно выбрать этот подграф так, чтобы соответствующая w вершина подграфа совпала с a .

Доказательство. Пусть x – лист T , отличный от w , а $T' = T - x$. Возьмем изоморфный T' подграф в G (обозначим этот подграф просто T'). Сделаем это так, чтобы соответствующая w вершина попала в a . Пусть y – вершина T' , к которой надо добавить лист x . Рассмотрим граф $G' = G - T'$. Граф G' связан.

Заметим, что y смежна в G хотя бы с n вершинами, то есть, точно смежна хотя бы с одной вершиной графа G' .

Рис. 1. Добавление n -й вершины к дереву.

Если y смежна с такой вершиной v графа G' , что $G' - v$ связан, то добавим v к T' , получится изоморфный T подграф T^* , а $G - T^* = G' - v$ — связный граф (см. рис. 1 слева).

Значит, G не двусвязен, а y смежна только с его точками сочленения. Рассмотрим крайний блок B графа G' , отделяемый от остальных вершин точкой сочленения c . $\text{Int}(B)$ не содержит точек сочленения, а значит, не смежна с y . Поэтому, $\text{Int}(B)$ отделяется от остальных вершин графа G в результате удаления $n-1$ вершины: это c и все вершины T' , кроме y . Противоречие с n -связностью графа G . $\square$

Несложно заметить, что с деревьями на $n+1$ вершине аналогичное доказательство не пройдет. Тут нам помогут другие подходы. Оказалось, что из общей картины выбивается дерево-еж (центральная вершина, смежная с n листьями).

Начнем со случая, когда наше дерево — не еж.

Теорема 2. Пусть T — отличное от ежа дерево на $n+1$ вершинах, а G — n -связный граф. Тогда G имеет такой изоморфный T подграф, что при удалении его вершин связность сохраняется.

Доказательство. Выше уже сказано, что G имеет подграфы, изоморфные T . Рассмотрим все возможные способы удаления из G такого подграфа и выберем подграф T_1 так, что одна из компонент связности графа $G - T_1$ — наибольшая возможная (по всем способам удаления). Пусть это компонента M . Предположим, что граф $G - T_1$ несвязен, пусть U — отличная от M компонента графа $G - T_1$.

Так как T_1 — не еж, в этом дереве есть два ребра без общих концов ведущие к листьям. Пусть это ax и by (где x и y — листья).

Так как граф G — n -связен, а $v(T_1) = n+1$, каждая компонента графа $G - T_1$ может быть несмежна максимум с одной вершиной из T_1 . Рассмотрим случай.

Случай 1. И x , и y смежны с M .

Как минимум одна из вершин a, b смежна с U — пусть, скажем, a . Заменив в T_1 лист x на вершину из U , смежную с a , мы получим изоморфное T_1 дерево T_2 , но в графе $G - T_2$ к компоненте M добавляется вершина x , что противоречит максимальнойности M (см. рис. 2а).

Случай 2. Лист x смежен с M , а лист y несмежен с M .

Рассмотрим подслучай.

Случай 2.1. a смежна с U .

Тогда построим дерево T_2 точно так же, как в случае 1 и опять получим то, что нужно.

Случай 2.2. a несмежна с U .

Тогда M смежна со всеми вершинами T_1 , кроме y (в том числе с a), а U смежна со всеми вершинами T_1 , кроме a (в том числе с x , см. рис. 2с).

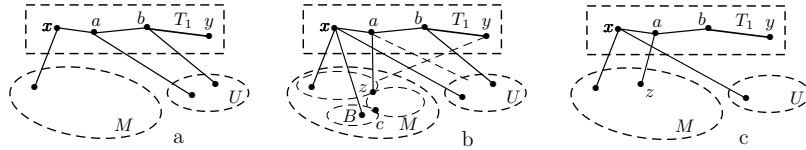


Рис. 2. Добавление $(n + 1)$ -й вершины к дереву.

Наша ближайшая цель — доказать, что a смежна в M с такой вершиной z , что граф M^* , полученный из M заменой z на x , связан. (Иными словами, M^* — индуцированный подграф G на множестве вершин $(V(M) \cup \{x\}) \setminus \{z\}$.)

Если $v(M) = 1$, то единственная вершина этой компоненты смежна с a и, очевидно, подходит в качестве z . Далее считаем, что $v(M) \geq 2$.

Отметим, что от $\{a, x\}$ к M должно вести два независимых ребра — иначе можно отрезать M , удалив $n - 1$ вершину (вместо $\{a, x\}$ взять общий конец ребер от них к M). Значит, если M двусвязен или $v(M) = 2$, то можно выбрать смежную с a вершину z так, чтобы кроме нее в M осталась вершина, смежная с x , что нам и нужно.

Пусть граф M не связен и $v(M) \geq 3$. Рассмотрим любой такой крайний блок B графа M , что x смежна в M с чем-то, кроме вершин

$\text{Int}(B)$ (это можно сделать, так как крайних блоков хотя бы два и множества их внутренних вершин не пересекаются, см. рис. 2b).

Если a смежна в M с вершиной $z \in \text{Int}(B)$, то такая вершина z нам подходит (см. рис. 2с). Пусть a несмежна с $\text{Int}(B)$. Тогда x смежна с $\text{Int}(B)$ (иначе вершины $\text{Int}(B)$ отделяются от остальных вершин графа G при удалении $n-1$ вершины: это отрезающая B от остального графа точка сочленения и вершины дерева T_1 , кроме a, x и y , противоречие с n -связностью G).

Таким образом, в единственном случае, когда мы не смогли найти нужную вершину z , внутренность каждого крайнего блока графа M смежна с x , а вершина a смежна с какой-то точкой сочленения z графа G (см. рис. 2b). Тогда z нам подходит: каждая компонента связности графа $M - z$ содержит крайний блок, внутренность которого смежна с x , поэтому и на этот раз граф M^* окажется связным (все компоненты графа $M - z$ связаны через x).

Итак, мы нашли нужную нам вершину z (см. рис. 2с). Теперь построим изоморфное T_1 дерево T_3 , заменив лист x на z . В графе $G - T_3$ есть максимальная компонента, большая, чем M : вершины из $M^* \cup U$ связаны в $G - T_3$. Противоречие с выбором M завершает доказательство. $\square$

§3. УДАЛЕНИЕ ЕЖЕЙ

А что же делать с ежами? А с ежами почти для всех n ответ другой. Существуют графы-контрпримеры на сколь угодно большом количестве вершин. Отметим, что все известные нам контрпримеры — это n -регулярные n -связные графы.

Опишем самую простую серию контрпримеров — для четных $n = 2k \geq 4$. Рассмотрим большой цикл Z и заменим каждую его вершину на независимое множество из k вершин, пусть эти множества по циклу $A_1, A_2, \dots, A_s$ (см. рис 3 слева). Соединим все пары вершин любых двух соседних множеств. В результате у каждой вершины ровно $2k$ соседей: у вершин множества A_i это в точности все вершины множеств A_{i+1} и A_{i-1} (нумерация циклическая). Нетрудно проверить, что этот граф $2k$ -связен. С другой стороны, попробуем удалить из него ежа с $2k$ листьями-иголками. Это будет центр s , скажем, из A_t и все $2k$ его соседей — то есть, полностью множества A_{t-1} и A_{t+1} . Но тогда любая из оставшихся $k-1$ вершин множества A_t будет изолированной, то есть граф окажется несвязным! Верно даже более сильное утверждение —

из этого графа невозможно удалить $2k$ соседей одной вершины так, чтобы граф остался связным.

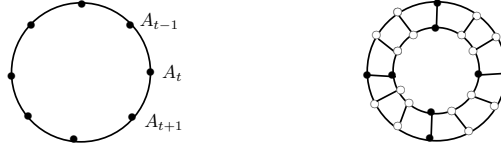


Рис. 3. Контрпримеры.

Чуть сложнее серия примеров, которая подойдет для нечетных n начиная с 7. Любое такое n представимо в виде $n = 2a + b$, где $a, b > \frac{n}{4}$ и $a, b \geq 2$. Изобразим два больших цикла длины кратной 3, как на рис. 3 справа, соединив ребром соответствующие вершины разных циклов. Покрасим вершины в черный и белый цвета, как на рисунке, после чего каждую белую вершину заменим на независимое множество из a вершин, а каждую черную — на независимое множество из b вершин. Получится n -регулярный граф ($n = 2a + b$), который, очевидно, n -связен. Аналогично первой серии контрпримеров, удаление вершины x из любого множества и всех n вершин из ее окрестности приведет к потере связности: все “клоны” x окажутся изолированными.

Остаются два значения: $n = 3$ и $n = 5$.

Теорема 3. Пусть G — трехсвязный граф, отличный от $K_{3,3}$, с более чем 4 вершинами. Тогда из G можно удалить вершину и трех ее соседей так, что получится связный граф.

Доказательство. По теореме 1 существует путь P из 3 вершин abc такой, что $G' = G - \{a, b, c\}$ — связный граф. Вершина b имеет степень не менее 3, а значит, смежна с G' .

Если в G' есть такая смежная с b вершина x , что $G' - x$ связан, то добавим к P вершину x , получим ежа на 4 вершинах, а граф $G - \{a, b, c, x\} = G' - x$ связан, что нам и нужно.

Значит, граф G' не двусвязен, а b смежна в нем только с точками сочленения. Рассмотрим любой крайний блок B графа G' — пусть он отделяется от остального графа точкой сочленения d . Тогда в $\text{Int}(B)$ есть вершина смежная с a и вершина смежная с c (иначе можно отрезать $\text{Int}(B)$ от остального графа G двумя вершинами: d и одной из a, c).

Более того, если $|\text{Int}(B)| \geq 2$, то есть две разные вершины, смежные с a и с соответственно, иначе получим то же самое противоречие.

Случай 1. Граф G имеет такой крайний блок B , что $|\text{Int}(B)| \geq 2$.

Отметим такие вершины $x, y \in \text{Int}(B)$, что x смежна с a , а y смежна с b . В другом крайнем блоке B' отметим вершину $x' \in \text{Int}(B')$, смежную с a (см. рис. 4а). Теперь удалим из графа ежа T с центром a и листьями b, x, x' . Граф $G' - \{x, x'\}$, очевидно, связан и содержит вершину y , смежную с c . Поэтому и граф $G - T$ связан.

Далее мы считаем, что внутренность каждого крайнего блока графа G' состоит из одной вершины, смежной с a , с и точкой сочленения, отделяющей этот крайний блок.

Случай 2. Граф G имеет хотя бы три крайних блока.

Пусть это B_1, B_2, B_3 , причем B_i имеет внутреннюю вершину x_i , отделяемую точкой сочленения b_i . Теперь удалим из графа ежа T_1 с центром a и листьями b, x_1, x_2 . Граф $G' - \{x_1, x_2\}$, очевидно, связан и содержит вершину x_3 , смежную с c . Поэтому и граф $G - T$ связан.

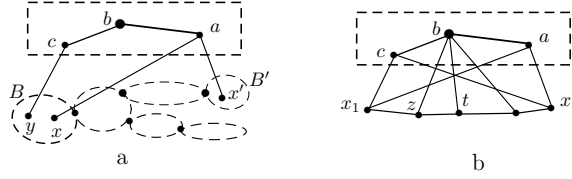


Рис. 4. Удаление ежа с тремя листьями.

Случай 3. Граф G имеет два крайних блока.

Пусть это B_1, B_2 , сохраним обозначения из предыдущего случая. Если вершина c смежна в G' чем-то, кроме x_1, x_2 , опять можно удалить из G ежа T_1 : граф $G' - \{x_1, x_2\}$ будет связан и будет содержать вершину, смежную с c . Значит, c смежна только с x_1, x_2 и аналогично a смежна только с x_1, x_2 .

Дерево блоков и точек сочленения графа G' представляет собой простой путь от B_1 до B_2 , в котором каждый некрайний блок содержит ровно две точки сочленения.

Предположим, что в G' есть некрайний блок B с непустой внутренностью. Тогда $\text{Int}(B)$ несмежна ни с одной из вершин a, b, c , а значит, отделяется двумя точками сочленения, входящими в B , от остальных вершин графа G , противоречие.

Значит, все некрайние блоки состоят лишь из двух смежных точек сочленения, тогда G' – простой путь от x_1 до x_2 . Все промежуточные вершины этого пути должны иметь степень хотя бы 3 в графе G и потому смежны с b (см. рис. 4b).

Если в этом пути ровно одна промежуточная вершина, то она смежна с b и наш граф – это $K_{3,3}$, противоречие. Значит, наш путь имеет вид $x_1 z t \dots x_2$. Нетрудно видеть, что удалив ежа с центром z и листьями x_1, b, t , мы получим связный граф. $\square$

• А что же в случае $n = 5$? Верно ли, что из достаточно большого 5-связного графа можно удалить вершину и 5 ее соседей так, что получится связный граф? Честный ответ: не знаем.

Однако, кое-что мы все-таки знаем. Начнем с частного случая теоремы 1.

Следствие 1. Пусть G – n -связный граф, a – его вершина. Тогда можно удалить из G вершину a и $n - 1$ ее соседей так, чтобы граф остался связным.

А вот что можно сказать положительного про удаление из n -связного графа вершины и n ее соседей.

Теорема 4. Пусть $n \geq 4$, а G – n -связный граф, который имеет вершину a степени более n . Тогда можно удалить из G вершину a и n ее соседей так, чтобы граф остался связным.

Доказательство. Удалим из графа G вершину a и множество B из n ее соседей, пусть $A = B \cup \{a\}$. Сделаем это так, чтобы количество компонент графа $G' = G - A$ было минимальным. Граф G' несвязен, иначе теорема доказана.

Каждая компонента графа G' несмежна не более чем с одной вершиной из A , так как граф G нельзя сделать несвязным, удалив менее n вершин.

Так как $d_G(a) \geq n + 1$, есть компоненты $U_1, \dots, U_k$ графа G' , смежные с a (возможно, $k = 1$). Предположим, что в компоненте U_i вершина a смежна с такой y , что граф $U_i - y$ связан. Тогда компоненты $G' - y$

— это $U_i - y$ и отличные от U_i компоненты G' . Понятно, что компонента $U_i - y$ смежна не менее чем с $n - 2$ вершинами из B . Так как $(n - 2) + (n - 1) > n$, то существует $z \in B$, смежная хотя бы с двумя компонентами $G' - y$. Тогда для $A^* = (A \cup \{y\}) \setminus \{z\}$ число компонент $G - A^*$ меньше, чем у G' (возвращение вершины z склеит как минимум две компоненты $G' - y$), противоречие.

Значит, в каждой из компонент $U_1, \dots, U_k$ графа G' вершина a смежна только с точками сочленения. Отметим в каждой U_i вершину x_i , смежную с a .

Утверждение. Каждая компонента графа $U_i - x_i$ смежна со всеми вершинами множества B , кроме одной.

Доказательство. Как мы знаем, все смежные с a вершины U_i — точки сочленения U_i . Пусть W — компонента графа $U_i - x_i$. Тогда W содержит минимальную по включению компоненту W' , которую можно отделить в U_i точкой сочленения (скажем, y). Вершины W' несмежны с a (там нет точек сочленения U_i). Однако, W' должна быть смежна в графе G не менее чем с n вершинами вне себя, а это могут быть только y и $n - 1$ вершина из B — то есть, все вершины B , кроме одной. $\square$

Теперь рассмотрим случаи.

Случай 1. $k \geq 2$.

Пусть $p = n - 1$ при $k \geq n - 1$ и $p = k$ при $k \leq n - 2$. Центром искомого ежа S будет a , а вершины $x_1, \dots, x_p$ — листьями (пока не хватает $n - p$ листьев). Добавим в листья ежа S любые $n - p \leq n - 2$ вершин из B так, чтобы все оставшиеся $p \geq 2$ вершины были смежны с одной из компонент U графов $U_1 - x_1, \dots, U_p - x_p$ (так можно, ведь каждая из этих компонент смежна с $n - 1$ вершиной из B). В этом случае каждая компонента графа $G - (S \cup B)$ смежна с одной из оставшихся (не вошедших в S) вершин множества B , а все эти вершины смежны с U , значит, граф $G - S$ связан.

Случай 2. $k = 1$.

Пусть $W_1, \dots, W_s$ — все компоненты графа $U_1 - x_1$. Каждая из них может быть несмежна ровно с одной из вершин B . Рассмотрим подслучай.

Случай 2.1. $s < n$.

Тогда в B есть вершина c , смежная со всеми $W_1, \dots, W_s$. В этом случае нам подойдет еж с центром a и листьями x_1 и $B \setminus \{c\}$ (все компоненты $W_1, \dots, W_s$ соединены через c).

Случай 2.2. $s \geq n$.

В этом случае в каждой компоненте W_i выберем смежную с x_1 вершину y_i и удалим ежа S с центром x_1 и листьями $y_1, \dots, y_n$. Каждая из компонент каждого из графов $W_i - y_i$ должна быть смежна с какой-то вершиной множества A (иначе она отделяется от остального графа двумя вершинами: x_1 и y_i , что невозможно). Значит, граф $G - S$ связан. $\square$

§4. УДАЛЕНИЕ БОЛЬШИХ ПУТЕЙ

Теорема 5. Пусть $n \geq 3$, $k \leq 2n - 1$, а G — n -связный граф более чем с k вершинами. Тогда можно удалить из G вершины простого пути с k вершинами так, что связность сохранится.

Доказательство. Очевидно, в графе G есть циклы. Выберем из них самый длинный простой цикл Z . Если этот цикл гамильтонов, то можно удалить k его последовательных вершин — останется, очевидно, связный граф.

Пусть Z проходит не по всем вершинам. Тогда в графе $G - Z$ есть компоненты связности $U_1, \dots, U_n$. Компонента U_i не может быть смежна с двумя соседними вершинами a, b цикла Z : иначе мы заменили бы ребро ab на ab -путь через компоненту U_i и увеличили бы цикл Z , что невозможно. Значит U_i смежна не более чем с половиной вершин Z . Так как U_i смежна хотя бы с n вершинами (иначе, удалив все смежные с U_i вершины цикла Z , мы отделили бы оставшиеся вершины цикла от U_i и разделили бы граф не более чем $n - 1$ вершинами, что невозможно), в цикле Z не менее чем $2n$ вершин.

Пусть $k \leq 2n - 2$. Выберем любой путь P из k последовательных вершин цикла Z и удалим их. Из доказанного выше, каждая компонента U_i смежна не более чем с $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq n - 1$ вершинами пути P , а значит, и не менее чем с одной вершиной из $Z - P$. Следовательно, граф $G - P$ связан.

Остается случай $k = 2n - 1$. Попробуем удалить подпуть $P = a_1 a_2 \dots a_{2n-1}$ цикла Z . Если это нельзя сделать, то существует компонента U графа $G - Z$, несмежная с $Z - P$. Значит, U смежна с n

вершинами пути P – а это могут быть только все его вершины с нечетными номерами (см. рис. 5 слева).

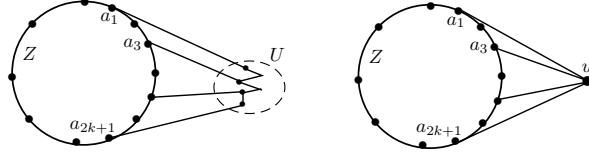


Рис. 5. Удаление пути длины $2k - 1$.

Докажем, что U состоит из одной вершины. Предположим противное. Тогда существует два независимых ребра, соединяющих Z с U (иначе ребра из $E(Z, U)$ можно покрыть одной вершиной, удаление которой нарушит связность графа, что невозможно). Тогда есть такие две вершины a_{2i-1} и a_{2i+1} пути P , что они смежны с разными вершинами $x, y \in U$. Тогда, заменив путь $a_{2i-1}a_{2i}a_{2i+1}$ на путь $a_{2i-1}x \dots ya_{2i+1}$ через компоненту U , мы удлиним максимальный цикл Z , противоречие.

Итак, $U = \{u\}$ (см. рис. 5 справа). Тогда рассмотрим путь $Q = ua_1a_2 \dots a_{2n-2}$. Теперь любая компонента $U' \neq U$ графа $G - Z$ смежна с $Z - Q$, а компонента U вошла в путь Q . Следовательно, граф $G - Q$ связан. $\square$

Оценка из теоремы 5 точна: при любом $m \geq n + 2$ из графа $K_{n,m}$, очевидно, нельзя удалить путь длины $2n$ так, чтобы граф остался связным (так как придется удалить всю долю размера n и оставить хотя бы две вершины из доли размера m).

На основе этого подхода можно рассмотреть и другие деревья, не сильно отличающиеся от пути. Рассмотрим случай, когда дерево имеет одну вершину, не лежащую на диаметре.

Теорема 6. Пусть $k \leq 2n - 2$, G – негамильтонов n -связный граф более чем с $k+1$ вершинами, а T – дерево на $k+1$ вершине, полученное присоединением листа к некрайней вершине пути длины k . Тогда G имеет такой изоморфный T подграф, что при удалении его вершин связность сохраняется.

Доказательство. Как и в теореме 5, рассмотрим наибольший простой цикл Z в графе G , он имеет длину не менее $2n$. Цикл Z негамильтонов, поэтому есть смежная с циклом вершина $a \notin V(Z)$. Выберем

подпуть $b_1 b_2 \dots b_k$ цикла Z так, чтобы a была смежна с вершиной b_i , образуя при этом изоморфное T дерево (которое обозначим тоже T).

Рассмотрим компоненту связности U графа $G' = G - Z - a$. Из n -связности графа G следует, что U смежна хотя бы с n вершинами из $V(Z) \cup \{a\}$. Если U несмежна с a , то аналогично доказательству предыдущей теоремы получаем, что U смежна с $Z - T$.

Пусть U смежна с a . Тогда U не может быть смежна с вершинами $b_{i-2}, b_{i-1}, b_{i+1}, b_{i+2}$, если такие есть (иначе заменим участок цикла от одной из этих вершин, смежных с U , до b_i на путь через U и a и увеличим Z , см. рис.6 слева). Докажем, что U смежна не более чем с $n - 1$ вершинами T . Рассмотрим случаи.

Случай 1. $k = 3$.

Тогда имеем $i = 2$ и U смежна не более чем с $2 \leq n - 1$ вершинами T (компонента U несмежна с b_1 и b_3).

Случай 2. $k \geq 4$, с одной из сторон от b_i в T всего одна вершина цикла Z .

Пусть, скажем, $i = k - 1$ (вершины b_{i+2} нет). Но вершины b_{i-2}, b_{i-1} есть и не смежны с U , значит, U смежна не более чем с $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq n - 1$ вершинами T (поскольку смежна в дереве T только с вершинами пути $b_1 \dots b_{k-1} a$ длины k).

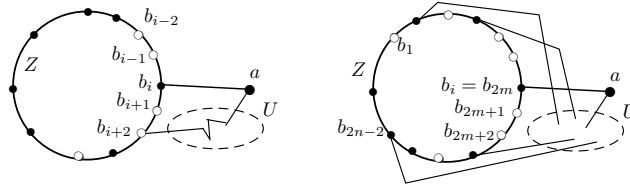


Рис. 6. Удаление пути длины $2n - 2$ с присоединенной вершиной.

Случай 3. $k \geq 4$, с каждой из сторон от b_i в T хотя бы по две вершины цикла Z .

Тогда все четыре несмежные с U вершины $b_{i-2}, b_{i-1}, b_{i+1}, b_{i+2}$ существуют (см. рис. 6 справа). При оценке количества смежных с U вершин можно считать, что $k = 2n - 2$ и $i = 2m$ четно. Тогда U смежна не более чем с $\frac{2n-2-(2m+2)}{2} = n - m - 2$ вершинами четного пути

$b_{2m+3} \dots b_{2n-2}$ и не более чем с m вершинами четного пути $b_1 b_2 \dots b_{2m}$. Добавив вершину a , мы получим не более чем $n - 1$ вершин, смежных с U , что нам и нужно.

Итак, U смежна не более чем с $n - 1$ вершинами T , а значит, смежна с $G - T$. Тогда все компоненты G' смежны с $Z - T$, значит, граф $G - T$ связан. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Györi, *On division of graphs to connected subgraphs*. — Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 18. Combinatorics, Keszthely (Hungary) (1976), p.485-494.
2. W. McCuaig, K. Ota, *Contractible triples in 3-connected graphs*. — J. Comb. Theory Ser.B, **60** (1994), 308–314.
3. M. Kriesell, *Contractible Subgraphs in 3-Connected Graphs*. — J. Comb. Theory Ser.B, **80** (2000), 32–48.
4. W. Mader, *High connectivity keeping sets in n -connected graphs*. — Combinatorica **24** (3) (2004), 441–458.
5. Ф. Харари, *Теория графов*. Москва, “Мир,” 1973. (Перевод с английского. F. HARARY, *Graph theory*, 1969.)
6. Д. В. Карпов, *Теория графов*. Москва, МЦНМО, 2022.
7. Н. Ю. Власова, *Каждый 3-связный граф на не менее чем 13 вершинах имеет стягиваемый 5-вершинный подграф*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **518** (2022), 5–93.

Aksenova E. Yu., Karpov D. V. Deletion a tree from a n -connected graph preserving connectivity.

Let G be a n -connected graph and let T be an arbitrary tree with $n + 1$ vertices, different from $K_{1,n}$. It is proved that G has a subgraph H isomorphic to T such that the graph $G - H$ is connected. It is proved that any 3-connected graph G has a subgraph H isomorphic to $K_{1,3}$ such that the graph $G - H$ is connected. Let $n \geq 4$ and let G be a n -connected graph G which has a vertex of degree more than n . We prove that G has a subgraph H isomorphic to $K_{1,n}$ such that the graph $G - H$ is connected. It is shown that, for $n = 4$ and $n \geq 6$, the similar statement for n -regular n -connected graphs fails. It is proved that, for any n -connected graph G and any $k \leq 2n - 1$, we can delete from G a simple path on k vertices such that the obtained graph is connected.

It is shown that the similar statement for a path on $2n$ vertices fails.

Президентский
Физико-математический лицей No. 239,
ул. Кирочная, д. 8,
191028, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: elizaveta.yu.aksenova@gmail.com

Поступило 20 ноября 2025 г.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru