Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 542, 2025 г.

Е. Р. Шафеев

ЛИНЕЙНЫЕ БИЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ЦЕПНОЙ ИНДЕКС

§1. Введение

Обозначение 1.1. Обозначим через $\mathbb{P}_n$ множество неотрицательных вещественных матриц без нулевых строк и столбцов.

Определение 1.2. *Неотрицательная матрица $A = (a_{ik}) \in \mathbb{P}_n$ называется цепной, если для каждой пары ее положительных элементов a_{ik}, a_{pq} существует цепочка, имеющая концами эти элементы, то есть последовательность положительных элементов $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_mk_m}$ такая, что*

(1) $i_1 = i,\ k_1 = k$;
(2) $i_m = p,\ k_m = q$;
(3) $i_l = i_{l+1}$ *или* $k_l = k_{l+1}$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$.

Если представить, что элементы матрицы – это клетки шахматной доски и ладье разрешено ходить только по положительным элементам, то определение можно переформулировать следующим образом. Матрица является цепной, если ладья может добраться от любой положительной клетки до любой другой.

Цепные матрицы были впервые рассмотрены в работах [13] и [15].

Определение 1.3. *Квадратная матрица A, для которой существует число $k \in \mathbb{N}$ такое, что A^k является цепной, называется потенциально цепной, а наименьшее такое k называется ее цепным индексом. Цепной индекс матрицы A обозначается через $\mathrm{CI}(A)$. Если матрица A не является потенциально цепной, то мы полагаем, что $\mathrm{CI}(A) = 0$.*

Понятия цепного индекса и потенциально цепной матрицы были введены Альпиным и Башкиным в [1].

Ключевые слова: цепные матрицы, цепной индекс, неотрицательные матрицы.

В работе [3] доказана верхняя оценка цепного индекса матриц из $\mathbb{P}_n$, равная $n-1$, см. также [5]. Цепной индекс – важный комбинаторный инвариант неотрицательных матриц, наряду со скрамблинг-индексом и экспонентой матрицы. Исследования экспоненты восходят к работе Виландта [16]. Скрамблинг-матрицы были введены Сенетой в [14], детали см. в работе [6] и цитируемой в ней литературе. Все три индекса определены как минимальная степень, в которой матрица соответственно становится положительной, скрамблинг-матрицей и цепной матрицей.

Изучение линейных отображений, сохраняющих различные инварианты матриц, является классической задачей в линейной алгебре и комбинаторной теории матриц, начало которой восходит к Фробениусу [10], и его характеризации линейных отображений, сохраняющих определитель. В работе [9] Бисли и Сонг охарактеризовали линейные отображения, сохраняющие экспоненту, а в работе [11] Гутерман и Максаев охарактеризовали линейные отображения, сохраняющие скрамблинг-индекс.

Линейные отображения, сохраняющие некоторый матричный инвариант, полезны при построении семейств матриц, для которых рассматриваемый инвариант имеет конкретное значение.

В данной работе мы охарактеризуем линейные биективные отображения множества матриц $\mathbb{P}_n$, сохраняющие минимальное, максимальное и все значения цепного индекса. Ограничение отображений на $\mathbb{P}_n$ необходимо, так как цепной индекс определен только для матриц без нулевых строк и столбцов. Рассмотрение отображений, сохраняющих максимальное значение цепного индекса, сложнее, чем в случае с экспонентой и скрамблинг-индексом, поскольку для цепного индекса граф Виландта не является единственным графом, на котором достигается максимальное значение (см. пример 2.27 графа, не являющегося сильно связным, и пример 2.21 графа с $n+2$ дугами). В связи с этим при анализе структуры отображения, сохраняющего максимальное значение цепного индекса, нельзя априори заключить, что оно отображает матрицу Виландта в матрицу, перестановочно подобную матрице Виландта. Эта трудность была преодолена на языке графов с помощью следующих двух фактов. Первый состоит в том, что граф с максимальным цепным индексом имеет всего несколько особых вершин, инцидентных более чем двум дугам. Второй факт состоит в том, что некоторые из дуг такого графа можно заменить другими дугами без потери максимальности цепного индекса, а рассматриваемые отображения должны сохранять отношение заменимости дуг, что и определяет вид этих отображений.

Отображения, сохраняющие минимальный цепной индекс, охарактеризованы на языке матриц. С этой целью строится особый класс матриц, который сохраняется рассматриваемыми отображениями и состоит из матриц, не являющихся цепными.

Доказано, что линейные биективные отображения, сохраняющие максимальное значение цепного индекса, имеют вид $T(A) = P(A \odot B)P^T$ или же $T(A) = P(A^T \odot B)P^T$ для некоторой перестановочной матрицы P и положительной матрицы B. Через $A \odot B$ обозначается адамарово произведение матриц. Отображения, сохраняющие минимальное значение, имеют вид $T(A) = P(A \odot B)Q$ или $T(A) = P(A^T \odot B)Q$, где P и Q – матрицы-перестановки, а B – положительная матрица. Отображения, сохраняющие все значения цепного индекса, совпадают с отображениями, сохраняющими его максимальное значение, в то время как сохранение минимального значения является более слабым условием.

Настоящая работа построена следующим образом. В §2 описаны свойства графов с максимальным цепным индексом, необходимые для характеризации отображений, сохраняющих максимальный цепной индекс. В §3 охарактеризованы все такие отображения. Независимо от этого, в §4 с помощью матричного подхода охарактеризованы отображения, сохраняющие минимальное значение (значение 1) цепного индекса. В заключение дано описание отображений, сохраняющих все значения цепного индекса.

§2. Свойства графов с максимальным цепным индексом

В этом параграфе для удобства и наглядности рассуждений параллельно с матрицами мы будем рассматривать соответствующие им ориентированные графы.

Для неотрицательной матрицы A соответствующий ей ориентированный граф (орграф) $D = D(A)$ строится следующим образом: $V(D) = \{1, 2, \ldots, n\}$, где n – размерность матрицы A, а $E(D) = \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\}$. Для построенного графа исходная матрица называется матрицей смежности.

Будем писать $D \in \mathbb{P}_n$, если $D = D(A)$ и матрица A не имеет нулевых строк и столбцов. Таким образом, $D \in \mathbb{P}_n$, если для любой вершины существует хотя бы одна входящая в нее и хотя бы одна исходящая из нее дуга.

Будем писать $u \to v$, если существует дуга $(u, v) \in E(D)$, и $u \xrightarrow{t} v$, если существует ориентированный путь длины t из u в v.

Определение 2.1. *Полустепень захода $d^-(v)$ вершины $v \in V(D)$ – это число дуг, входящих в эту вершину. Полустепень исхода $d^+(v)$ – это число дуг, выходящих из этой вершины.*

Определение 2.2. *Орграф D называется сильно связным, если для любой пары вершин u, v существует ориентированный путь $u \xrightarrow{t} v$. Граф D называется слабо связным, если для любой пары вершин существует неориентированный путь, соединяющий u и v. Иными словами, граф D слабо связен, если при замене дуг на неориентированные дуги полученный неориентированный граф связен.*

Цепными (потенциально цепными) будем называть графы с цепными (потенциально цепными) матрицами смежности.

Обозначение 2.3. Обозначим через D^k орграф, соответствующий матрице A^k. Через D^T будем обозначать орграф, соответствующий транспонированной матрице A^T; этот граф получается из D сменой направлений всех дуг.

Замечание 2.4. В графе D^k $u \to v$ тогда и только тогда, когда $u \xrightarrow{k} v$ в D.

Определение 2.5. *Цепным индексом $\mathrm{CI}(D)$ графа $D \in \mathbb{P}_n$ называется цепной индекс его матрицы смежности.*

С цепным индексом связан еще один комбинаторный инвариант матриц (и графов) – цепной ранг. Определим его сразу на языке графов.

Определение 2.6. *Говорят, что вершины $u, v \in V(D)$ пересекаются, если существует такая вершина w, что одновременно $u \to w$ и $v \to w$; при этом используется обозначение $u \wedge v$. Если же $u \xrightarrow{t} w$ и $v \xrightarrow{t} w$, то мы пишем $u \wedge^t v$.*

Определение 2.7. *Обозначим через $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ транзитивное замыкание отношения $u \wedge^t v$, то есть $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$, если существуют такие $w_1, \ldots, w_k$, что $u \wedge^t w_1, w_1 \wedge^t w_2, \ldots, w_k \wedge^t v$.*

Предложение 2.8. *Если $D \in \mathbb{P}_n$, то отношение $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ является отношением эквивалентности на множестве $V(D)$.*

Доказательство. Для графов из $\mathbb{P}_n$ отношение $\wedge^t$ симметрично и рефлексивно. Из этого следует, что отношение $\wedge^t \cdots \wedge^t$ тоже симметрично и рефлексивно. Из определения цепочки $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ непосредственно вытекает, что это отношение транзитивно. □

Определение 2.9. *Цепным рангом* $\operatorname{crk}(D)$ *называется количество классов эквивалентности по отношению $u \wedge^t \cdots \wedge^t v$ из предложения* 2.8. *Для матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ ее цепной ранг* $\operatorname{crk}(A)$ *определяется как цепной ранг соответствующего графа $D(A)$.*

Замечание 2.10. Равенство $\operatorname{crk}(D) = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда D – цепной граф.

Лемма 2.11. *Пусть $A \in \mathbb{P}_n$. Тогда*

- *если P, Q – матрицы-перестановки, то матрица PAQ цепная тогда и только тогда, когда A цепная;*
- $\mathrm{CI}(A) = \mathrm{CI}(A^T) = \mathrm{CI}(PAP^T)$.

Доказательство. Предложение 3.3 из [1] утверждает, что $\operatorname{crk}(PAQ) = \operatorname{crk}(A)$ для любых матриц-перестановок P, Q. Отсюда следует первое утверждение.

В предложении 3.2 той же работы доказано, что $\operatorname{crk}(A) = \operatorname{crk}(A^T)$. Поскольку $(A^T)^k = (A^k)^T$ и $PA^kP^T = (PAP^T)^k$, то, учитывая, что $\operatorname{crk}(PAP^T) = \operatorname{crk}(A)$, получаем необходимое утверждение. □

Интерпретация цепного ранга в терминах теории графов использовалась в работе [3] для доказательства верхней границы цепного индекса. Доказательство опирается на свойства цепного ранга степеней графа D.

Теорема 2.12 ([3]). *Пусть D – потенциально цепной граф с n вершинами. Тогда для произвольного r из равенства*

$$\operatorname{crk}(D^r) = \operatorname{crk}(D^{r-1})$$

следует равенство

$$\operatorname{crk}(D^{r+1}) = \operatorname{crk}(D^r),$$

откуда следует стабилизация цепного ранга:

$$\operatorname{crk}(D^{r-1}) = \operatorname{crk}(D^r) = \operatorname{crk}(D^{r+1}) = \operatorname{crk}(D^{r+2}) = \dots .$$

Максимальное значение цепного индекса достигается тогда, когда цепной ранг графа D^r при увеличении r убывает на единицу.

Следствие 2.13. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом. Тогда*

$$\mathrm{crk}(D) = n - 1.$$

Доказательство. Индекс $\mathrm{CI}(D)$ максимален, когда

$$\mathrm{crk}(D^k) = n - k, \quad k = 1, \ldots, n - 1. \qquad \square$$

Свойства цепного ранга изучались в работах [1–3, 5].

Лемма 2.14. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом. Тогда существует ровно одна пара вершин $u, v \in V(D)$, такая что $u \wedge v$.*

Доказательство. По следствию 2.13, $\mathrm{crk}(D) = n - 1$. Существует n вершин и $n - 1$ классов эквивалентности этих вершин. Ровно один из классов содержит две вершины, остальные – по одной. То есть, ровно для одной пары вершин $u, v \in V(D)$ верно $u \wedge v$. $\square$

Следствие 2.15. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом. Тогда существует ровно одна пара вершин $u, v \in V(D)$, такая что найдется такая вершина w, что $w \to u, w \to v$.*

Доказательство. Если D имеет максимальный цепной индекс, то по лемме 2.11 граф D^T тоже имеет максимальный цепной индекс. Следовательно, для графа D^T справедлива лемма 2.14, то есть найдется ровно одна пара вершин u, v, для которых существует такая w, что $u \to w, v \to w$ в D^T. Граф D^T получается из D сменой направлений дуг, поэтому в исходном графе D выполняется $w \to u, w \to v$. При этом других вершин u', v', для которых существует такая w', что $w' \to u'$, $w' \to v'$, в графе D нет. $\square$

Определение 2.16. *Граф Виландта W_n определяется следующим образом:*

$$1 \to 2 \to 3,$$

$$1 \to 3,$$

$$3 \to 4 \to \ldots \to n \to 1.$$

Предложение 2.17 ([1, 12, 16])**.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если D – граф с максимальной экспонентой, то D изоморфен W_n;*
(2) *если D – граф с максимальным скрамблинг-индексом, то D изоморфен W_n;*
(3) *W_n – граф с максимальным цепным индексом.*

Следующий пример иллюстрирует вычисление степеней вершин и цепного индекса графа.

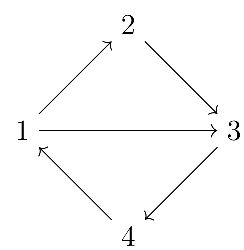

Рис. 1. Граф Виландта W_4.

Пример 2.18. Рассмотрим граф W_4, изображенный на рис. 1. В нем $d^-(1) = d^-(2) = d^-(4) = 1$, $d^-(3) = 2$, $d^+(1) = 2$, $d^+(2) = d^+(3) = d^+(4) = 1$. Граф W_4 является сильно связным, но при удалении дуги $(3,4)$ он становится только слабо связным. Если после этого удалить еще и дугу $(4,1)$, то полученный граф не будет и слабо связным.

Покажем, что $\mathrm{CI}(W_4) = 3$. Действительно, имеем

$$1 \wedge^1 2,$$
$$1 \wedge^2 2,\ 4 \wedge^2 1,$$
$$1 \wedge^3 2,\ 4 \wedge^3 1,\ 3 \wedge^3 4.$$

Лемма 2.19. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:*

(1) *существует ровно одна вершина z, для которой $d^-(z) = 2$, и ровно одна вершина w, для которой $d^+(w) = 2$; все остальные вершины удовлетворяют условию $d^+ = 1$, $d^- = 1$, при этом z и w могут совпадать;*
(2) *существуют ровно две вершины z_1, z_2, для которых $d^-(z_1) = d^-(z_2) = 2$, и ровно две вершины w_1, w_2, для которых $d^+(w_1) = d^+(w_2) = 2$; все остальные вершины удовлетворяют условию $d^+ = 1$, $d^- = 1$, при этом z_i может совпадать с w_j.*

Доказательство. Сначала докажем, что не может быть трех или более вершин, для которых выполняется $d^+ = 2$ или $d^- = 2$.

По лемме 2.14, существует ровно одна пара вершин u, v, для которых найдется такая вершина z, что $u \to z$, $v \to z$, откуда $d^-(z) = 2$. Любая другая вершина z', для которой $d^-(z') = 2$, должна иметь входящие дуги $(u, z'), (v, z')$, иначе получим противоречие с леммой 2.14.

Если существуют три (или более) вершины z, z', z'', у которых $d^- = 2$, то имеем

$$u \to z, \quad u \to z', \quad u \to z'',$$

откуда $d^+(u) = 3$, что противоречит следствию 2.15. Аналогичные рассуждения справедливы и для вершин, для которых $d^+ = 2$, откуда получаем, что вершин со свойством $d^+ = 2$ тоже не может быть более двух.

Мы доказали, что в графе D существует не более двух вершин, для которых $d^+ = 2$ и не более двух вершин, для которых $d^- = 2$, а для остальных вершин верно $d^+ = d^- = 1$, так как в графе $D \in \mathbb{P}_n$ каждая вершина имеет хотя бы одну входящую и хотя бы одну исходящую дугу.

В любом графе выполняется равенство

$$\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v).$$

Значит, количество вершин, для которых $d^+ = 2$ в графе D, должно совпадать с количеством вершин, для которых $d^- = 2$. □

Определение 2.20. *Граф D с максимальным цепным индексом, удовлетворяющий случаю 1 леммы 2.19, называется максимальным графом первого типа, а удовлетворяющий случаю 2 – максимальным графом второго типа.*

Граф W_n является графом первого типа. Следующий пример показывает, что графы второго типа существуют.

Пример 2.21. Рассмотрим граф W_4', полученный из W_4 добавлением петли $2 \to 2$, см. рис. 2. Этот граф является графом с максимальным цепным индексом второго типа, см. [4, пример 2.17].

Предложение 2.22. *Любой максимальный граф первого типа имеет $n+1$ дугу, а максимальный граф второго типа имеет $n+2$ дуги.*

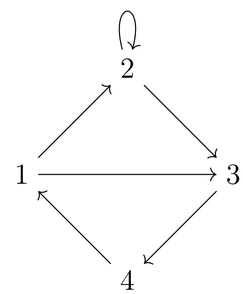

Рис. 2. W_4' – граф Виландта с добавленной петлей.

Доказательство. Как известно,

$$\sum_{v\in V} d^+(v) = \sum_{v\in V} d^-(v) = |E|.$$

Из леммы 2.19 следует, что в графе первого типа

$$|E| = \sum_{v\in V} d^+(v) = 2 + (|V| - 1) = |V| + 1.$$

Аналогично, для графа второго типа имеем

$$|E| = |V| + 2.$$ □

Предложение 2.23. *Пусть D – максимальный граф первого типа и $d^-(z) = 2$, $d^+(w) = 2$. Тогда для любой вершины $u \in V(D)$ существует путь из u в z, а также путь из w в u.*

Доказательство. 1. Граф D потенциально цепной. Поэтому для любой вершины $u \in V(D)$ существует такая вершина v, что $u \wedge^t v$ для некоторого t. Это значит, что $u \xrightarrow{t-1} u' \to z$ и $v \xrightarrow{t-1} v' \to z$, поскольку других вершин, в которые входят две дуги, кроме z в графе D не существует.

2. Так как D^T тоже является потенциально цепным, причем в D^T выполняется $d^-(w) = 2$, то, применяя доказанное в пункте 1, получаем, что существует путь из w в u. □

Определение 2.24. *Дуга (u, v) максимального графа D называется заменимой, если в граф D после удаления этой дуги можно добавить какую-то другую дугу (u', v'), такую что снова получится граф с максимальным цепным индексом.*

Такие дуги можно заменить на другие без потери максимальности цепного индекса. Это свойство позволит понять, как устроены отображения, сохраняющие максимальный цепной индекс.

Определение 2.25. *Заменимая дуга (u, v) называется ограниченно заменимой, если она заменяется только на дугу вида (u', v), либо только на дугу вида (u, v'). Заменимая дуга, не являющаяся ограниченно заменимой, называется неограниченно заменимой.*

Обозначение 2.26. Если дуга e заменима дугами $e_1, e_2, \ldots, e_k$, то мы будем записывать это как $e\mathcal{R}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$.

Пример 2.27 ([4, пример 2.20])**.** Рассмотрим вырожденный граф-гантель (dumbbell graph) с максимальным цепным индексом – граф K, в котором

$$1 \to 1 \to 2 \to \ldots \to n-1 \to n \to n.$$

В нем есть две ограниченно заменимые дуги: петли $(1, 1)$ и (n, n).

$$(1,1)\mathcal{R}\{(i,1)|i = 2, \ldots, n\},$$

$$(n,n)\mathcal{R}\{(n,j)|j = 1, \ldots, n-1\}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\mathrm{CI}(K) = n-1$ и что после любой замены дуги, указанной выше, цепной индекс полученного графа тоже будет равен $n-1$.

Граф K – слабо-связный граф, который показывает, что граф Виландта не является единственным графом с максимальным цепным индексом.

Предложение 2.28. *Пусть (u, v) – заменимая дуга максимального графа D. Тогда*

(1) $d^+(u) = 2$ *или* $d^-(v) = 2$;
(2) *если* $d^+(u) = 1$ *или* $d^-(v) = 1$, *то дуга является ограниченно заменимой.*

Доказательство. Пусть (u, v) заменима. Если она заменяется на дугу (u, v'), то вершина v в новом графе должна по-прежнему удовлетворять условию $d^-(v) \geqslant 1$, которое следует из того, что $D \in \mathbb{P}_n$. Поэтому в исходном графе $d^-(v) = 2$. Аналогично, если (u, v) заменяется на (u', v), то $d^+(u) = 2$.

Если $d^+(u) = 1$, то $d^-(v) = 2$, и дуга является ограниченно заменимой на дуги вида (u, v'), поскольку $d^+(u)$ не может уменьшиться. Аналогично для случая $d^-(v) = 1$. □

Лемма 2.29. *Пусть D – максимальный граф первого типа. Тогда в D существует не более одной неограниченно заменимой дуги.*

Доказательство. Необходимым условием неограниченной заменимости дуги (u, v) является равенство $d^+(u) = d^-(v) = 2$. В графах первого типа существует ровно одна вершина w, для которой $d^+(w) = 2$, и ровно одна вершина z, для которой $d^-(z) = 2$. Тогда в D может существовать не более одной неограниченно заменимой дуги – (w, z). □

Предложение 2.30. *Пусть D – максимальный граф первого типа, причем существуют две петли $(z, z), (w, w) \in E(D)$. Тогда D изоморфен K.*

Доказательство. Потенциально цепной граф обязан быть слабо связным, поэтому петля не может быть единственной дугой, инцидентной вершине. Следовательно, без ограничения общности, $d^+(w) = 2$ и $d^-(z) = 2$. Для оставшихся вершин справедливо $d^+ = d^- = 1$; следовательно, они образуют простой путь, соединяющий вершины w и z. □

Лемма 2.31. *Пусть граф $D \in \mathbb{P}_n$ устроен следующим образом:*

(1) $(z, z) \in D$;
(2) $d^-(z) = 2$, *а для всех остальных вершин* $d^- = 1$;
(3) *для любой вершины* $x \in V(D)$ *существует путь из* x *в* z;
(4) *существует такая вершина* y, *что кратчайший путь из* y *в* z *имеет длину* $n - 1$.

Тогда D – граф с максимальным цепным индексом.

Доказательство. По определению отношения $\wedge$, если $z \to z$ и $x \xrightarrow{t} z$ для некоторого x, то $x \wedge^t z$. При этом $y \wedge^{n-1} z$. Так как для всех вершин, кроме z, выполняется $d^- = 1$, не существует такой вершины z', что $y \wedge^{n-2} z'$. Следовательно, $\mathrm{CI}(D) = n - 1$. □

Предложение 2.32. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом первого типа и пусть $u \to z, v \to z, u \neq v$. Тогда дуги (u, z) и (v, z) заменимы.*

Доказательство. **(1)** Пусть граф D является сильно связным. Рассмотрим граф, полученный заменой дуги (u, z) на петлю (u, u). Для любой вершины x существует путь из x в u. При этом для всех вершин графа, кроме u, справедливо $d^- = 1$. Это значит, что существует единственный гамильтонов путь, заканчивающийся в u, содержащий все вершины. Таким образом, полученный граф с петлей – граф с максимальным цепным индексом по лемме 2.31. Те же рассуждения справедливы для дуги (v, z).

(2) Пусть граф D не является сильно связным. Для любой вершины u существует путь из u в z. Значит, существует путь из z в z. При этом не существует пути из z в w, поскольку это означало бы сильную связность графа, так как из w существует путь в любую вершину.

Компонента связности, содержащая z, обязана быть простым циклом, поскольку она не содержит вершину w, а для всех остальных вершин справедливо $d^+ = 1$. Без ограничения общности можно считать, что эта компонента связности содержит вершину u. Тогда дуга (u, z) заменима на петлю (u, u), так как полученный граф удовлетворяет условиям леммы 2.31. Дуга (v, z) заменима на (v, u), так как при такой замене получается граф, изоморфный исходному. □

§3. Отображения, сохраняющие максимальное значение цепного индекса

Результаты из предыдущего параграфа позволяют охарактеризовать линейные биективные отображения матриц, сохраняющие максимальное значение цепного индекса.

Все рассматриваемые в этой работе понятия (цепная матрица, цепной индекс, цепной ранг) зависят только от комбинаторной структуры матрицы, то есть от расположения ее положительных элементов. Поэтому, не ограничивая общности результатов, вместо неотрицательных вещественных можно рассматривать $(0, 1)$-матрицы.

Определение 3.1. *Обозначим через* $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ *булево полукольцо, в котором операции заданы следующим образом:*

$$\begin{array}{ll} 0+0=0, & 0\cdot 0=0, \\ 0+1=1+0=1, & 0\cdot 1=1\cdot 0=0, \\ 1+1=1, & 1\cdot 1=1. \end{array}$$

Определение 3.2. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *– неотрицательная вещественная матрица. Ее портретом* $\overline{A}$ *назовем матрицу*

$$\overline{A} = (\overline{a}_{ij}), \quad \overline{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } a_{ij} > 0, \\ 0, & \textit{если } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Отображение $\phi : A \to \overline{A}$ сопоставляет неотрицательной вещественной матрице A булеву матрицу $\overline{A}$, в которой на месте положительных элементов стоят единицы. Нетрудно заметить, что такое отображение является гомоморфизмом полуколец матриц $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ и $\mathbb{M}_n(\mathbf{B})$, а элемент $1 \in \mathbf{B}$ соответствует понятию «положительный элемент» в $\mathbb{R}$. При этом понятие цепного индекса корректно переносится на матрицы из $\mathbf{B}$. Построение ориентированного графа $D(A)$ также корректно определено для матриц из $\mathbf{B}$.

Для упрощения доказательств комбинаторных свойств отображений, сохраняющих цепной индекс, мы будем работать с матрицами над полукольцом $\mathbf{B}$. Обозначим множество матриц над $\mathbf{B}$ без нулевых строк и столбцов через $\mathbb{P}_n(\mathbf{B})$.

Через E_{ij} будем обозначать матричную единицу, то есть матрицу, у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы равны нулю.

Пусть O обозначает матрицу, состоящую из нулей.

Лемма 3.3 ([7, лемма 3.1]). *Пусть $T : \mathbb{M}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{B})$ – аддитивное биективное отображение. Тогда*

(1) *$T(O) = O$, откуда следует, что T является линейным отображением;*
(2) *для всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют такие $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $T(E_{ij}) = E_{kl}$ и, как следствие, T биективно отображает множество ячеек на себя.*

Таким образом, биективное отображение $T : \mathbb{M}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{B})$ определяется образом ячеек E_{ij}. В графовой интерпретации отображение T определяется образом дуг (u, v).

Предложение 3.4. *Пусть D – граф с максимальным цепным индексом и $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – аддитивное биективное отображение, сохраняющее максимальный цепной индекс. Тогда*

$$(u, v)\mathcal{R}(u', v') \ \textit{в графе } D$$

тогда и только тогда, когда

$$T((u, v))\mathcal{R}T((u', v')) \ \textit{в графе } T(D).$$

Доказательство. Обозначим через $\overline{D}$ граф, в котором дуга (u, v) заменена на дугу (u', v'). Если $(u, v)\mathcal{R}(u', v')$, то $\overline{D}$ является графом с максимальным цепным индексом, поэтому и $T(\overline{D})$ является таковым. Это по определению значит, что дуга $T((u, v))$ заменима на $T((u', v'))$ в графе $T(D)$. Заметим, что в силу биективности T и конечности множества $\mathbb{P}_n(\mathbf{B})$, отображение T переводит немаксимальные графы в немаксимальные. Если $T((u, v))\mathcal{R}(T(u', v'))$ в графе $T(D)$, то $T(\overline{D})$ имеет максимальный цепной индекс, поэтому $\overline{D}$ тоже должен иметь максимальный цепной индекс, а значит, $(u, v)\mathcal{R}(u', v')$. □

Следствие 3.5. *Количество заменимых дуг в максимальном графе инвариантно относительно аддитивного биективного отображения, сохраняющего максимальный цепной индекс.*

Основываясь на предыдущих результатах и свойствах заменимых дуг в графе K, опишем структуру биективных аддитивных отображений, сохраняющих максимальный цепной индекс.

Лемма 3.6. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение, сохраняющее максимальный цепной индекс. Тогда для каждого столбца (или строки) все элементы этого столбца (строки) отображаются в один столбец (одну строку). Таким образом, либо $T(E_{ij}) = E_{\sigma(i)\delta(j)}$, либо $T(E_{ij}) = E_{\sigma(j)\delta(i)}$.*

Доказательство. Рассмотрим граф K из примера 2.27. В нем есть две ограниченно заменимые дуги – это петли $(1, 1)$ и (n, n). При этом

$$(1, 1)\mathcal{R}\{(i, 1)|i = 2, \ldots, n\},$$

$$(n, n)\mathcal{R}\{(n, j)|j = 1, \ldots, n-1\}.$$

Граф K первого типа, поэтому $T(K)$ – тоже граф первого типа, поскольку T сохраняет количество дуг. Тогда, по лемме 2.29, в $T(K)$ не может быть более одной неограниченно заменимой дуги. Поскольку T сохраняет заменимость дуг, то либо $T((1, 1))$, либо $T((n, n))$ является ограниченно заменимой дугой. Пусть это $T((1, 1))$, второй случай рассматривается аналогично. Тогда, по предложению 3.4, все дуги вида $(i, 1)$ отображаются в дуги вида (j, t) либо вида (t, j), где $j = 1, \ldots, n$, а t фиксировано.

Таким образом, все элементы первого столбца отображаются в элементы одного столбца (или строки): либо $T(E_{i1}) = E_{k\sigma(i)}$, либо $T(E_{i1}) = E_{\sigma(i)k}$ для некоторого k.

Теперь рассмотрим граф K^T, в котором направления стрелок заменены на обратные:

$$n \to n \to (n-1) \to \ldots \to 2 \to 1,$$

в этом графе дуга $(1,1)$ заменима на дугу вида $(1,i)$, $i = 2,\ldots,n$. Тогда, по предложению 3.4, все дуги вида $(1,i)$, $i = 1,\ldots,n$, отображаются в дуги вида (j,t) либо вида (t,j), где $j = 1,\ldots,n$, а t фиксировано. То есть все элементы первой строки тоже отображаются в одну строку или столбец.

Итак, мы доказали, что T отображает и элементы первой строки в общую строку или столбец, и элементы первого столбца в (другую) общую строку или столбец.

Теперь рассмотрим граф K_l, изоморфный графу K, в котором номера вершин сдвинуты циклической перестановкой на $l-1$. В нем петля (l,l) является ограниченно заменимой дугой, и все дуги вида (i,l), где $i = 1,\ldots,n$, являются заменимыми. По тем же причинам, что и выше, все элементы l-го столбца или l-ой строки отображаются в элементы одного столбца или одной строки. $\square$

Следствие 3.7. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение, сохраняющее максимальный цепной индекс. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:*

(1) $T(A) = PAQ$,
(2) $T(A) = PA^TQ$,

где P,Q – матрицы-перестановки.

Доказательство. По лемме 3.6, образы всех элементов строки принадлежат одной строке либо одному столбцу. Не может быть такого, что одна строка отображается в строку, а другая – в столбец, потому что иначе образы двух разных строк имели бы нетривиальное пересечение, что противоречит биективности T как отображения ячеек. Те же рассуждения верны и для столбцов. Значит, либо

(1) существуют такие перестановки σ,δ, что $T(E_{ij}) = E_{\sigma(i)\delta(j)}$, либо

(2) существуют такие перестановки σ,δ, что $T(E_{ij}) = E_{\sigma(j)\delta(i)}$. Рассмотрим первый случай.

Пусть $A = \sum_{l=1}^{s} E_l$, где E_l – матричные единицы. Обозначим $P = \sum_{i=1}^{n} E_{\sigma(i),i}$, $Q = \sum_{j=1}^{n} E_{j,\delta(j)}$. Тогда $T(E_{ij}) = PE_{ij}Q$, и, в силу аддитивности отображения T, получаем

$$T(A) = T(\sum_{l=1}^{s} E_l) = \sum_{l=1}^{s} T(E_l) = \sum_{l=1}^{s} PE_lQ = P\left(\sum_{l=1}^{s} E_l\right)Q = PAQ.$$

Второй случай рассматривается аналогично. □

Теперь докажем, что в следствии 3.7 на самом деле имеет место равенство $Q = P^T$. Для этого нам необходимо доказать следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение, сохраняющее максимальный цепной индекс, а граф D изоморфен графу K. Тогда $T(D)$ тоже изоморфен K.*

Доказательство. Если вершина z, для которой $d^-(z) = 2$, графа D простого типа не имеет петли, то такой граф удовлетворяет условиям предложения 2.32. Следовательно, существуют две заменимые дуги, заканчивающиеся одной и той же вершиной. Это свойство сохраняется при отображении T (в силу предложения 3.4 и леммы 3.6), в то время как K таким свойством не обладает. Поскольку D^T является максимальным графом тогда и только тогда, когда D является максимальным, у предложения 2.32 существует двойственный аналог: если в графе D имеем $w \to u$, $w \to v$, то дуги $(w, u), (w, v)$ заменимы. Аналогичным образом заключаем, что либо w имеет петлю, либо существуют две заменимые дуги, начинающиеся в одной вершине. Получается, что любой максимальный граф первого типа либо имеет две петли, а тогда он изоморфен K по предложению 2.30, либо при отображении T он не может перейти в граф, изоморфный K. Лемма доказана. □

Теорема 3.9. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение, сохраняющее максимальный цепной индекс. Тогда либо*

(1) $T(A) = PAP^T$,

либо

(2) $T(A) = PA^TP^T$,

где P – матрица-перестановка.

Доказательство. В дополнение к следствию 3.7 требуется доказать, что T переводит диагональные элементы в диагональные. Мы знаем, что если граф D изоморфен K, то и $T(D)$ изоморфен K, причем T переводит заменимые дуги в заменимые. Обе заменимые дуги в K являются петлями, следовательно, T переводит петли $(1,1),(n,n)$ в другие петли. Петли графа отвечают диагональным элементам его матрицы смежности. С помощью аналогичных рассуждений для графов, изоморфных K, но с петлями инцидентными другим вершинам, получаем, что T переводит любые диагональные элементы матрицы в диагональные. $\square$

Теорема 3.10. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение. Тогда T сохраняет максимальное значение цепного индекса в том и только в том случае, когда либо*

- $T(A) = PAP^T$,

либо

- $T(A) = PA^TP^T$,

где P – матрица-перестановка.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.9. Достаточность следует из того, что $(PAP^T)^k = PA^kP^T$ и $\mathrm{CI}(A^T) = \mathrm{CI}(A)$ по лемме 2.11. $\square$

Определение 3.11. *Пусть $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ – аддитивное отображение. Определим его портрет $\overline{T} : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ как аддитивное отображение, такое что*

$$\overline{T}(E_{ij}) = \overline{T(E_{ij})}, \quad \overline{T}(O) = \overline{T(O)}.$$

Лемма 3.12. *Пусть $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ – линейное отображение. Тогда для любой матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ выполняется равенство*

$$\overline{T}(\overline{A}) = \overline{T(A)}.$$

Доказательство. Пусть $A = \sum_{l=1}^{s} a_l E_l$, где E_l – матричные единицы. Тогда

$$\overline{T}(\overline{A}) = \overline{T}\left(\sum_{l=1}^{s} E_l\right) = \sum_{l=1}^{s} \overline{T(E_l)} = \sum_{l=1}^{s} \overline{a_l T(E_l)} = \overline{T\left(\sum_{l=1}^{s} a_l E_l\right)} = \overline{T(A)}. \quad \square$$

Лемма 3.13. *Пусть $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ – линейное биективное отображение, сохраняющее максимальное значение цепного индекса. Тогда $\overline{T}$ тоже сохраняет максимальное значение цепного индекса.*

Доказательство. Для любой матрицы $B \in \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ существует такая матрица $A \in \mathbb{P}_n$, что $B = \overline{A}$. Поэтому из цепочки равенств

$$\mathrm{CI}(\overline{A}) = \mathrm{CI}(A) = \mathrm{CI}(T(A)) = \mathrm{CI}(\overline{T(A)}) = \mathrm{CI}(\overline{T}(\overline{A}))$$

следует утверждение леммы. □

Обозначение 3.14. Адамарово произведение $A \odot B$ матриц $A \in \mathbb{M}_n$ и $B \in \mathbb{M}_n$ – это матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_n$, в которой $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$.

Теорема 3.15. *Линейное биективное отображение $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ сохраняет максимальное значение цепного индекса тогда и только тогда, когда либо*

- $T(A) = P(A \odot B)P^T$,

либо

- $T(A) = P(A^T \odot B)P^T$,

где B – некоторая положительная матрица, а P – матрица-перестановка.

Доказательство. 1. Докажем необходимость. Пусть $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ линейно, биективно, и сохраняет максимальное значение цепного индекса. Согласно [8, лемма 2.1], отображение $\overline{T} : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ является биективным и аддитивным. Кроме того, $\overline{T}$ сохраняет максимальное значение цепного индекса, а значит, оно удовлетворяет условиям теоремы 3.10. Поэтому для любой матрицы $A \in \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ либо $\overline{T}(A) = PAP^T$, либо $\overline{T}(A) = PA^TP^T$.

В первом случае, имеем

$$\overline{T}(E_{ij}) = PE_{ij}P^T,$$

что, по лемме 3.12, означает, что для матричной единицы $E_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ верно

$$T(E_{ij}) = b_{ij}PE_{ij}P^T,\ b_{ij} > 0.$$

Таким образом, в первом случае, для $A \in \mathbb{P}_n$ имеем

$$T(A) = \sum_{i,j} T(a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j>0} a_{ij}b_{ij}PE_{ij}P^T = P(A \odot B)P^T;$$

аналогично, во втором случае,

$$T(A) = P(A^T \odot B)P^T.$$

2. Докажем достаточность. Равенство $\mathrm{CI}(A \odot B) = \mathrm{CI}(A)$ для любой положительной матрицы B следует из определения цепного индекса.

Равенства $\mathrm{CI}(A) = \mathrm{CI}(A^T) = \mathrm{CI}(PAP^T)$ выполняются по лемме 2.11. □

§4. Отображения, сохраняющие значение 1 цепного индекса

Для анализа отображений, сохраняющих значение 1 цепного индекса, мы вернемся к матричной интерпретации.

Напомним, что матрица является цепной тогда и только тогда, когда ее цепной индекс равен 1. Рассматриваемые отображения переводят цепные матрицы в цепные матрицы. Следовательно, в силу своей биективности и в силу конечности множества $\mathbb{P}_n(\mathbf{B})$, они переводят нецепные матрицы в нецепные.

Определение 4.1. *Определим матрицу $S(i,j) = (s_{k,l})$ поэлементно:*
1. $s_{lk} = 1$, $l \neq i$, $k \neq j$;
2. $s_{ik} = 0$, $k \neq j$;
3. $s_{lj} = 0$, $l \neq i$;
4. $s_{ij} = 1$.

В качестве примера приведем матрицу

$$S(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующие факты непосредственно следуют из определения матрицы $S(i,j)$.

Предложение 4.2.
1. *Матрица $S(i,j)$ не является цепной;*
2. *матрица $S(i,j)$ имеет ровно $2n-2$ нулевых элемента.*

Лемма 4.3 ([13])**.** *Пусть $A \in \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$. Тогда существуют матрицы-перестановки P и Q такие, что*

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix},$$

где каждая из матриц A_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, является цепной.

Очевидно, что для любых i, j существуют такие матрицы-перестановки P и Q, что

$$PS(i,j)Q = \begin{pmatrix} 1 & O_1 \\ O_2 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_2 является матрицей, все элементы которой равны 1, O_1 – это строка из $n-1$ нулей, а O_2 – это столбец из $n-1$ нулей.

Предложение 4.4. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение, сохраняющее значение* 1 *цепного индекса. Тогда $T(S(i,j)) = S(k,l)$ для некоторых k, l.*

Доказательство. Матрица $S(i,j)$ не является цепной, следовательно, $T(S(i,j))$ также не может быть цепной. Мы покажем, что это возможно только в том случае, когда $T(S(i,j)) = S(k,l)$.

Количество нулевых элементов инвариантно относительно отображения T, так как T – биекция ячеек матрицы. Таким образом, $T(S(i,j))$ имеет ровно $2n-2$ нулевых элемента.

Мы должны показать, что матрицы $S(k,l)$ являются единственными нецепными матрицами (без нулевых строк и столбцов), которые имеют ровно $2n-2$ нулевых элемента.

Матрица $R = T(S(i,j))$ не является цепной; следовательно, по лемме 4.3, для подходящих матриц-перестановок P и Q мы имеем

$$PRQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Минимальное число нулей в такой матрице равно $2n-2$ и достигается только в том случае, когда PRQ имеет один диагональный блок размера 1 и один блок размера $n-1$; любая другая конфигурация приведет к большему числу нулей. Таким образом, $R = S(k,l)$.

Обозначение 4.5. Определим матрицу

$$A^{(i,j)} = \sum_{l=1}^{n} \big[E_{il} + E_{lj}\big],$$

так что $A^{(i,j)}$ – матрица с единицами в i-ой строке и j-ом столбце и нулями в остальных ячейках. Положим также

$$A^{\overline{(i,j)}} = \sum_{l=1, l\neq i, l\neq j}^{n} \left[E_{il} + E_{lj}\right],$$

так что $A^{\overline{(i,j)}}$ – матрица с единицами там же, где у $A^{(i,j)}$, кроме ячейки (i,j).

Замечание 4.6. Если $j \neq k$, то $A^{(i,j)} \odot A^{(i,k)} = \sum_{l=1}^{n} E_{il}$, а если $i \neq k$ и $j \neq l$, то $A^{(i,j)} \odot A^{(k,l)} = E_{il} + E_{kj}$.

Следствие 4.7. *Пусть $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ – биективное аддитивное отображение, сохраняющее значение 1 цепного индекса. Тогда каждая строка отображается в какую-то строку или столбец, и каждый столбец отображается в какой-то столбец или строку. Таким образом, существует перестановка $\sigma \in S_n$, такая что либо*

(1) $T(E_{ij}) = E_{\sigma(i)\sigma(j)}$,

либо

(2) $T(E_{ij}) = E_{\sigma(j)\sigma(i)}$.

Доказательство. Имеем $T(S(1,1)) = S(k,l)$ для некоторых k и l. Первая строка и первый столбец матрицы $S(1,1)$ вместе содержат $2n-1$ элемент, из которых $2n-2$ равны нулю. Других нулей в матрице $S(1,1)$ нет. То же самое верно для матрицы $S(k,l)$ и ее k-ой строки и l-го столбца: все нули матрицы $S(k,l)$ расположены в объединении k-ой строки и l-го столбца. Это значит, что

$$T(A^{\overline{(1,1)}}) = A^{\overline{(k,l)}}.$$

Теперь докажем, что $T(E_{1,1}) = E_{k,l}$, откуда будет следовать, что

$$T(A^{(1,1)}) = A^{(k,l)}.$$

Предположим, что это не так: пусть $T(E_{r,s}) = E_{k,l}$, причем $r \neq 1, s \neq 1$. Рассмотрим матрицу $S(r,b)$, $b \neq 1, b \neq s$. В этом случае, первая строка и первый столбец матрицы $S(r,b)$ содержат два нулевых элемента – на позициях $(1,r)$ и $(b,1)$. Имеем $S(r,b)_{r,s} = 0$, то есть k-ая строка и l-ый столбец матрицы $T(S(b,r))$ содержат 3 нулевых элемента: два из первой строки и столбца матрицы $S(r,b)$ и ноль на позиции (k,l), так как $T(E_{r,s}) = E_{k,l}$. Остальные элементы k-ой строки и l-го столбца равны единице, так как $T(A^{\overline{(1,1)}}) = A^{\overline{(k,l)}}$.

Противоречие, так как k-ая строка и l-ый столбец матрицы $T(S(b,r))$ не могут содержать 3 нулевых элемента по определению матрицы $S(i,j)$. Таким образом, $T(A^{(1,1)}) = A^{(k,l)}$.

Выбор матрицы $S(1,1)$ произволен. Аналогично доказывается, что для любых i,j справедливо $T(A^{(i,j)}) = A^{(k,l)}$ для некоторых k,l. При этом

$$T(A^{(i,j)}) = A^{(k,l)},$$

$$T(A^{(i,j)} \odot A^{(i,j')}) = A^{(k,l)} \odot A^{(k',l')}.$$

Матрица $A^{(i,j)} \odot A^{(i,j')}$ имеет n положительных элементов, поэтому $A^{(k,l)} \odot A^{(k',l')}$ тоже имеет n положительных элементов. Это значит, что либо $k = k'$, либо $l = l'$, то есть каждая строка отображается либо в какую-то строку, либо в какой-то столбец. Те же рассуждения справедливы и для матриц

$$T(A^{(i,j)} \odot A^{(i',j)}) = A^{(k,l)} \odot A^{(k',l')}.$$

Поэтому и каждый столбец отображается в какую-то строку или столбец. □

Теорема 4.8. *Аддитивное биективное отображение* $T : \mathbb{P}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{P}_n(\mathbf{B})$ *сохраняет минимальное значение цепного индекса тогда и только тогда, когда либо*

(1) $T(A)=PAQ$,

либо

(2) $T(A)=PA^TQ$,

где P *и* Q *– матрицы-перестановки.*

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 3.7, необходимость следует из следствия 4.7. Достаточность вытекает из леммы 2.11. □

Теорема 4.9. *Линейное биективное отображение* $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ *сохраняет минимальное значение цепного индекса тогда и только тогда, когда либо*

(1) $T(A) = P(A \odot B)Q$,

либо

(2) $T(A) = P(A^T \odot B)Q$,

где B *– некоторая положительная матрица, а* P *и* Q *– матрицы-перестановки.*

Доказательство. Доказательство необходимости аналогично доказательству теоремы 3.15. Достаточность следует из леммы 2.11 и того факта, что для любой положительной матрицы B выполняется $\mathrm{CI}(A) = \mathrm{CI}(A \odot B)$. $\square$

Теорема 4.10. *Пусть $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ – линейное биективное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *T сохраняет все значения цепного индекса;*
(2) *T сохраняет максимальное значение цепного индекса;*
(3) *$T(A) = P(A \odot B)P^T$ или $T(A) = P(A^T \odot B)P^T$ для некоторой положительной матрицы B и матрицы-перестановки P.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3) утверждается теоремой 3.15. Если B положительна, то $\mathrm{CI}(A \odot B) = \mathrm{CI}(A)$, поэтому, по лемме 2.11, из (3) следует (1). $\square$

Таким образом, для того, чтобы отображение сохраняло все значения цепного индекса, достаточно, чтобы оно сохраняло максимальное значение. При этом сохранение всех значений цепного индекса является более сильным условием, чем сохранение минимального значения.

Замечание 4.11. Из определений цепного индекса и цепного ранга следует, что для матрицы $A \in \mathbb{P}_n$ равенство $\mathrm{CI}(A) = 1$ эквивалентно равенству $\mathrm{crk}(A) = 1$. Таким образом, отображения, сохраняющие минимальное значение цепного ранга, – это в точности отображения, сохраняющие минимальное значение цепного индекса.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задачи, внимание к тексту и ценные обсуждения.

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 5–25.
2. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 5–20.
3. Ю. А. Альпин, А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Верхняя граница цепного индекса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2023), 5–17.
4. А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Алгебраически цепные матрицы и их свойства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2025).
5. А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Неравенства Фробениуса и Сильвестра для цепного ранга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **534** (2024), 35–56.

6. M. Akelbek, *A Joint Neighbour Bound for Primitive Digraphs.* Ph.D. Thesis, University of Regina, 2008.
7. L. B. Beasley, A. E. Guterman, *The characterization of operators preserving primitivity for matrix k-tuples.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1762–1777.
8. L. B. Beasley, N. J. Pullman, *Linear operators that strongly preserve primitivity.* — Linear Multilinear Algebra **25** (1989), 205–213.
9. L. B. Beasley, S.-Z. Song, *Primitive exponent preservers.* — Linear Algebra Appl. **491** (2016), 263–275.
10. G. Frobenius, *Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.
11. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Maps preserving scrambling index.* — Linear Multilinear Algebra **66**, No. 4 (2017), 840–851.
12. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs.* — Linear Multilinear Algebra **69**, No. 11 (2019), 2143–2168.
13. D. J. Hartfiel, C. J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Math. **12** (1975), 245–256.
14. E. Seneta, *Nonnegative Matrices and Markov Chains.* Springer-Verlag, New York, 1981.
15. R. Sinkhorn, P. Knopp, *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices.* — Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 67–75.
16. H. Wielandt, *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.* — Math. Z. (1950), 642–648.

Shafeev E. R. Linear bijective maps preserving the chainable index.

The chainable index is a combinatorial invariant of nonnegative matrices, which is important in describing their properties, along with the scrambling-index and exponent. In this work, linear bijective maps that preserve either the minimal or the maximal value of the chainable index are characterized. As a corollary, a characterization of linear bijective maps that preserve all values of the chainable index is obtained.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: shafeev.ev@yandex.ru

Поступило 4 ноября 2025 г.