Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 542, 2025 г.

С. А. Жилина, Д. А. Павлинов

О ГРАФАХ КОММУТАТИВНОСТИ АЛГЕБР ОКУБО

§1. Введение

Исследование бинарных отношений на алгебраических структурах естественным образом приводит к рассмотрению соответствующих графов отношений. В случае алгебр над полем наиболее изученными на данный момент являются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля. В настоящей работе мы сосредоточимся на графах коммутативности важного семейства неассоциативных алгебр – алгебр Окубо.

Определение графа коммутативности произвольной алгебры $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ (возможно, некоммутативной или неассоциативной) тесно связано с понятием коммутативного центра. *Коммутативным центром* алгебры $\mathcal{A}$ называется множество её элементов, коммутирующих со всеми элементами:

$$C_{\mathcal{A}} = \big\{c \in \mathcal{A} \mid cb = bc \quad \forall\, b \in \mathcal{A}\big\}.$$

Обозначение 1.1. Для любого подмножества X линейного пространства V над $\mathbb{F}$ обозначим множество прямых, проходящих через элементы X, через

$$\mathbb{P}(X) = \{\mathbb{F}x \mid x \in X \setminus \{0\}\}.$$

Определение 1.2. *Графом коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ называется граф, вершинам которого соответствуют элементы множества

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\},$$

причём две различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если выполнено условие $ab = ba$.

Ключевые слова: алгебры Окубо, композиционные алгебры, псевдо-октонионы, графы отношений, граф коммутативности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No. 075-15-2025-345.

В дальнейшем, говоря о вершинах определенного выше графа, мы не будем проводить различия между ненулевым элементом a и соответствующей ему вершиной $[a] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}}$. Чтобы показать, что вершины a и b коммутируют (то есть либо совпадают, либо соединены ребром), будем использовать обозначение $a \leftrightarrow b$. Напомним, что для графа Γ величина $\mathrm{d}(a, b)$ – это *расстояние* между двумя вершинами a и b, а $\mathrm{diam}(\Gamma) = \sup\limits_{a,b\in\Gamma} \mathrm{d}(a, b)$ – *диаметр* Γ.

Целью настоящей работы является исследование графов коммутативности алгебр Окубо, а именно, решение вопроса об их связности и вычисление их диаметров. Наибольшее внимание мы уделим случаю алгебры псевдо-октонионов над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 3$, содержащим первообразный кубический корень из единицы, а также вещественной алгебры Окубо с делением – так называемых вещественных псевдо-октонионов. В частности, если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 3$, то алгебра псевдо-октонионов является единственной алгеброй Окубо над $\mathbb{F}$ с точностью до изоморфизма.

Отличительной чертой перечисленных случаев является тесная связь с матричными алгебрами, графы коммутативности которых активно изучались в работах разных авторов [1–4, 6, 25]. На данный момент основными являются следующие результаты о диаметре $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ – графа коммутативности алгебры $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Над любым полем $\mathbb{F}$ граф $\Gamma_C(M_2(\mathbb{F}))$ несвязен [4, замечание 8]. Согласно [3, теоремы 3 и 17], если при некотором $n \geqslant 3$ граф $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ связен, то $4 \leqslant \mathrm{diam}\,\Gamma_C(M_n(\mathbb{F})) \leqslant 6$. Если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $n \geqslant 3$, то граф $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ связен, и его диаметр равен 4, см. [3, следствие 7]. Аналогичное утверждение имеет место и в случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ [1]. Первый пример алгебры $M_n(\mathbb{F})$, на которой достигается наибольшее возможное значение диаметра графа коммутативности, был получен в [25]. В работе [19] рассмотрены графы $\Gamma_C(M_n(\mathbb{Q}_p))$, где $\mathbb{Q}_p$ обозначает поле p-адических чисел, и показано, что если q – простое число, то диаметр $\Gamma_C(M_{2q}(\mathbb{Q}_2))$ равен 6. Это даёт первый пример графа коммутативности с наибольшим возможным диаметром, не использующий аксиому выбора. При этом в общем случае связность графа $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ гарантировать нельзя, например, для любого $n \geqslant 3$ граф $\Gamma_C(M_n(\mathbb{Q}))$ алгебры матриц над полем рациональных чисел несвязен, см. [2, замечание 8]. Этот результат вытекает из теоремы 6 работы [2], согласно которой граф $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ является связным тогда и только тогда, когда $n \geqslant 3$ и любое расширение поля $\mathbb{F}$ степени n содержит собственное промежуточное поле.

Работа построена следующим образом. В §2 мы приводим построение алгебр Окубо над полями, характеристика которых отлична от трёх, с помощью алгебр псевдо-октонионов. Этот параграф также содержит основные утверждения об алгебрах Окубо, их коммутативном центре и ненулевых идемпотентах, используемые на протяжении всей статьи.

В §3 мы рассматриваем граф коммутативности алгебры псевдо-октонионов $P_8(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, содержащим первообразный кубический корень из единицы. Согласно предложению 3.2, граф $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ изоморфен графу коммутативности $\Gamma_C(M_3(\mathbb{F}))$ алгебры 3×3 матриц над полем $\mathbb{F}$. Отсюда вытекает, что диаметр графа коммутативности единственной алгебры Окубо над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, равен 4. Однако, если поле $\mathbb{F}$ не является алгебраически замкнутым, то граф коммутативности $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ может быть несвязным, см. следствие 3.8.

В §4 мы изучаем пути между ненулевыми идемпотентами в графе коммутативности алгебры Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. Согласно следствию 4.6, расстояние между любыми двумя идемпотентами в $\Gamma_C(\mathcal{O})$ не превосходит двух, то есть пересечение их централизаторов является ненулевым.

Параграф 5 посвящен изучению графа коммутативности вещественных псевдо-октонионов $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$. По лемме 5.10, в $\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))$ любой ненулевой элемент можно соединить ребром с идемпотентом. Объединяя это утверждение с результатами §4, мы получаем теорему 5.11, согласно которой граф коммутативности $\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))$ связен, а его диаметр равен четырем, как и в случае алгебры Окубо над алгебраически замкнутым полем.

§2. Алгебры Окубо и их свойства

Мы будем использовать определение алгебры Окубо, данное в [8, §1]. Сначала предположим, что характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна трём и $\mathbb{F}$ содержит первообразный кубический корень ω из единицы. В частности, второе условие выполнено, если $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Положим

$$\mu = \frac{1-\omega^2}{3}.$$

Пусть $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ обозначает алгебру Ли 3×3 матриц над $\mathbb{F}$ с нулевым следом. Определим новое неассоциативное произведение "$*$" на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ следующим образом:

$$x * y = \mu xy + (1-\mu)yx - \frac{\operatorname{tr}(xy)}{3} I, \tag{2.1}$$

где I – единичная матрица в $M_3(\mathbb{F})$. Полученная алгебра обозначается через $P_8(\mathbb{F})$ и называется *алгеброй псевдо-октонионов* над $\mathbb{F}$.

На алгебре $P_8(\mathbb{F})$ введём квадратичную форму

$$\mathrm{n}(x) = \frac{1}{6} \operatorname{tr}(x^2). \tag{2.2}$$

Как отмечено в [8, стр. 101], это определение имеет смысл даже в случае поля характеристики 2. Действительно, согласно [15, стр. 1027, лемма], для любой матрицы $x \in M_3(\mathbb{F})$ выполнено тождество

$$\operatorname{tr}(x^2) = (\operatorname{tr} x)^2 - 2\,\mathrm{s}(x),$$

где $\mathrm{s}(x)$ – квадратичная форма, возникающая в качестве коэффициента характеристического многочлена

$$\det(\lambda I - x) = \lambda^3 - \operatorname{tr}(x)\lambda^2 + \mathrm{s}(x)\lambda - \det(x). \tag{2.3}$$

Таким образом, $\operatorname{tr}(x^2)$ может быть "поделен на 2" для произвольного $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, и

$$\mathrm{n}(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{s}(x). \tag{2.4}$$

Определение 2.1. Пусть $(\mathcal{A}, +, *)$ – произвольная (возможно, неунитальная и неассоциативная) алгебра над полем $\mathbb{F}$. Предположим, что на $\mathcal{A}$ задана строго невырожденная квадратичная форма $\mathrm{n}(\,\cdot\,)$, то есть соответствующая симметрическая билинейная форма

$$\mathrm{n}(a,b) = \mathrm{n}(a+b) - \mathrm{n}(a) - \mathrm{n}(b)$$

невырождена на $\mathcal{A}$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ называется *композиционной* алгеброй, если квадратичная форма $\mathrm{n}(\,\cdot\,)$ допускает композицию, то есть $\mathrm{n}(a * b) = \mathrm{n}(a)\,\mathrm{n}(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Здесь $\mathrm{n}(\,\cdot\,)$ называется *нормой*.

Определение 2.2. Композиционная алгебра $(\mathcal{A}, *, \mathrm{n})$ называется *симметрической*, если для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$\mathrm{n}(x * y, z) = \mathrm{n}(x, y * z).$$

Согласно [13, лемма 1.1], алгебра $P_8(\mathbb{F})$ является симметрической композиционной алгеброй.

Теорема 2.3 ([21, теорема 1], [18, (34.1)])**.** *Пусть* $(\mathcal{A}, *, \mathrm{n})$ *– композиционная алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{A}$ *– симметрическая алгебра;*
(2) $(x * y) * x = x * (y * x) = \mathrm{n}(x)y$ *для любых* $x, y \in \mathcal{A}$.

Любая алгебра $\mathcal{A}$, удовлетворяющая второму условию теоремы выше, является *эластичной алгеброй*. А именно, для любых элементов $x, y \in \mathcal{A}$ выполнено тождество эластичности:

$$x * (y * x) = (x * y) * x.$$

Линеаризуя выражение из теоремы 2.3(2), получаем равенство

$$(x * y) * z + (z * y) * x = x * (y * z) + z * (y * x) = \mathrm{n}(x, z)y. \qquad (2.5)$$

Теперь предположим, что поле $\mathbb{F}$ не обязательно алгебраически замкнуто, и пусть $\overline{\mathbb{F}}$ – его алгебраическое замыкание. Алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, называется *алгеброй Окубо*, если она является $\mathbb{F}$-формой $P_8(\overline{\mathbb{F}})$, то есть $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}} \cong P_8(\overline{\mathbb{F}})$.

Пример 2.4. Первыми построенными алгебрами Окубо [20] стали комплексная алгебра $P_8(\mathbb{C})$ и её вещественная форма $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$, определенная как множество эрмитовых матриц с нулевым следом:

$$\widetilde{P}_8(\mathbb{R}) = \big\{x \in M_3(\mathbb{C}) \mid x^* = x,\ \operatorname{tr} x = 0\big\}. \qquad (2.6)$$

Алгебра $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ называется *вещественной алгеброй псевдо-октонионов*.

Норма на $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ положительно определена [22, стр. 47], а потому *анизотропна*, то есть если для некоторого элемента $a \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ выполнено $\mathrm{n}(a) = 0$, то $a = 0$.

Замечание 2.5. Как показано в [12, теорема 6.6], с точностью до изоморфизма существуют ровно две алгебры Окубо над $\mathbb{R}$: $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ и расщепляемая алгебра Окубо. При этом $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ имеет анизотропную норму, а значит, является алгеброй с делением, а расщепляемая алгебра Окубо обладает изотропной нормой и, следовательно, содержит делители нуля, см. [12, лемма 2.1].

Если $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$, то нужно использовать другой подход для определения алгебры Окубо. Так, в работе [23] определение приводится в виде таблицы умножения. В [14] представлен более общий подход к определению, основаный на идеях построения алгебры Петерсона [24].

Однако общим является тот факт, что любая алгебра Окубо над произвольным полем $\mathbb{F}$ является симметрической композиционной алгеброй. Мы будем использовать символ $\mathcal{O}$ для обозначения произвольной алгебры Окубо.

Замечание 2.6. Рассмотрим алгебру Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. Тогда $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ – алгебра Окубо над $\overline{\mathbb{F}}$. Пусть $z \in C_{\mathcal{O}}$ – произвольный элемент коммутативного центра алгебры $\mathcal{O}$. Для каждого $x \in \mathcal{O}$ положим $\widetilde{x} = x \otimes 1 \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}$. Поскольку все элементы вида $\widetilde{x}$ коммутируют с элементом $\widetilde{z}$ и порождают $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}$ как векторное пространство над $\overline{\mathbb{F}}$, то $\widetilde{z} \in C_{\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}}$. Согласно [9, стр. 5], алгебра $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}$ имеет тривиальный коммутативный центр, а именно, $C_{\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}} = \{0\}$. Следовательно, для алгебры Окубо $\mathcal{O}$ над произвольным полем также выполнено $C_{\mathcal{O}} = \{0\}$, и множество вершин графа коммутативности $\Gamma_C(\mathcal{O})$ – это в точности множество прямых, проходящих через ненулевые элементы $\mathcal{O}$.

Отметим, что любая алгебра Окубо $\mathcal{O}$ удовлетворяет соотношению

$$(x * x) * (x * x) = \mathrm{n}(x, x * x)x - \mathrm{n}(x)x * x \tag{2.7}$$

для всех $x \in \mathcal{O}$, см. [18, (34.3)]. Вместе с теоремой 2.3(2) это означает, что подалгебра $\mathrm{alg}\langle x\rangle$, порождённая элементом x, совпадает с линейной оболочкой $\mathrm{span}\{x, x * x\}$.

Предложение 2.7 ([18, (34.10)])**.** *Пусть $e \in \mathcal{O}$ – ненулевой идемпотент. Тогда $\mathrm{n}(e) = 1$.*

Доказательство. Имеем $\mathrm{n}(e)e = e * (e * e) = e * e = e$. □

Предложение 2.8. *Пусть $x \in \mathcal{O}\backslash\{0\}$. Предположим, что выполнено одно из следующих трёх условий:*

(1) $\mathrm{n}(x) \neq \lambda^2$ *ни для какого* $\lambda \in \mathbb{F}$;
(2) $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$ *для некоторого* $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$, *и множество* $\mathbb{F}x$ *не содержит ненулевого идемпотента*;
(3) $\mathrm{n}(x) = 0$ *и* $x * x \neq 0$.

Тогда $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 2$, *то есть* $x * x \notin \mathbb{F}x$. *Иначе* $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 1$.

Доказательство. Предположим, что $\dim(\mathrm{alg}\langle x\rangle) = 1$ или, эквивалентно,

$$x * x = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{F}. \tag{2.8}$$

Домножая равенство (2.8) справа на x, получаем

$$\mathrm{n}(x)x = (x * x) * x = \lambda x * x = \lambda^2 x,$$

откуда $\mathrm{n}(x) = \lambda^2$.

Значит, если $\mathrm{n}(x) = 0$, то условие (2.8) эквивалентно $x * x = 0$. Иначе, если $\mathrm{n}(x) = \lambda^2 \neq 0$, оно равносильно идемпотентности элемента $x/\lambda \in \mathbb{F}x$. □

§3. Граф коммутативности алгебры псевдо-октонионов

В этом параграфе мы рассматриваем граф коммутативности алгебры псевдо-октонионов $P_8(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ и $\omega \in \mathbb{F}$. В частности, если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то, по определению, $P_8(\mathbb{F})$ является единственной алгеброй Окубо над $\mathbb{F}$ (см. также [7, теорема 5.1], [9, стр. 4, таблица 1] и [11, стр. 3–4]). Покажем, что граф коммутативности $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ изоморфен графу $\Gamma_C(M_3(\mathbb{F}))$.

Замечание 3.1. Для произвольных элементов $a, b \in P_8(\mathbb{F})$ рассмотрим операции

$$[a,b] = ab - ba, \quad [a,b]_* = a * b - b * a.$$

Тогда, как показано в [20, (2.11)], $[a,b]_* = (2\mu - 1)\,[a,b]$. Отсюда следует, что a и b коммутируют относительно матричного произведения тогда и только тогда, когда они коммутируют относительно операции “$*$”.

Предложение 3.2. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ *и* $\omega \in \mathbb{F}$. *Графы* $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ *и* $\Gamma_C(M_3(\mathbb{F}))$ *изоморфны.*

Доказательство. Если $a \in M_3(\mathbb{F})$, то $a - \operatorname{tr}(a)/3 \cdot I \in P_8(\mathbb{F})$. Хорошо известно, что центральные элементы матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ – это в точности скалярные матрицы. Кроме того, прибавление скалярной матрицы не влияет на отношение коммутативности. Следовательно, отображение

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(P_8(\mathbb{F})/C_{P_8(\mathbb{F})}) &\to \mathbb{P}(M_3(\mathbb{F})/C_{M_3(\mathbb{F})}), \\ \mathbb{F}a &\mapsto \mathbb{F}a + C_{M_3(\mathbb{F})}, \end{aligned}$$

задает изоморфизм графов коммутативности. □

Акбари, Мохаммадиан, Раджави и Раджа доказали [3, следствие 7], что если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $n \geqslant 3$, то граф коммутативности $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ связен и его диаметр равен 4.

Замечание 3.3. В работе [3] граф коммутативности определён на множестве всех нецентральных элементов алгебры $\mathcal{A}$, тогда как в нашем случае вершины соответствуют классам элементов $\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}}) = \{[a] = \mathbb{F}a + C_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}\}$. Утверждение о диаметре графа остаётся справедливым, по следующим причинам.

- Каждому пути $[v_0] \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow [v_m]$ в нашем графе соответствует путь $v_0 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_m$ в графе из [3].
- Любой кратчайший путь $v_0 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_m$ в графе из [3] индуцирует путь $[v_0] \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow [v_m]$ в нашем графе. Поскольку наше определение графа коммутативности запрещает петли, то в случае равенства $[v_i] = [v_{i+1}]$ мы “склеиваем” соседние вершины этого пути, и длина пути уменьшается на 1. Однако если $m \geqslant 3$, то все классы $[v_i]$ попарно различны, так как иначе исходный путь можно было бы сократить.

Таким образом, переход к рассмотрению множества вершин как элементов множества $\mathbb{P}(\mathcal{A}/C_{\mathcal{A}})$ не влияет на диаметр графа коммутативности, если его значение не меньше трёх.

Следствие 3.4. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– алгебраически замкнутое поле,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$*. Тогда граф коммутативности* $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ *связен, и его диаметр равен* 4.

Доказательство. Непосредственно вытекает из предложения 3.2 и [3, следствие 7]. □

В том случае, когда поле $\mathbb{F}$ не является алгебраически замкнутым, но содержит первообразный кубический корень ω из единицы, связность $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ может зависеть от поля $\mathbb{F}$.

Теорема 3.5 ([3, теорема 19])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– произвольное поле и* $p \geqslant 3$ *– простое число. Если граф* $\Gamma_C(M_p(\mathbb{F}))$ *связен, то его диаметр равен* 4.

Следствие 3.6. *Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ *и* $\omega \in \mathbb{F}$*. Если граф* $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ *связен, то его диаметр равен* 4.

Доказательство. Немедленно вытекает из предложения 3.2 и теоремы 3.5. □

Покажем, что граф $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ может оказаться несвязным.

Теорема 3.7 ([2, теорема 6])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *– некоторое поле и* $n \geqslant 3$*. Тогда граф* $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$ *является связным тогда и только тогда, когда* *любое расширение поля $\mathbb{F}$ степени n содержит собственное промежуточное поле.*

Следствие 3.8. *Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\omega]$ – поле, полученное присоединением элемента ω к полю $\mathbb{Q}$. Тогда граф $\Gamma_C(M_3(\mathbb{F}))$ несвязен. Следовательно, $\Gamma_C(P_8(\mathbb{F}))$ также несвязен.*

Доказательство. Пусть ζ – первообразный корень девятой степени из единицы. Тогда
$$[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = \varphi(9) = 6,$$
где φ – функция Эйлера. Минимальным многочленом для ζ является девятый многочлен деления круга
$$\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1.$$
Заметим, что ζ^3 является первообразным кубическим корнем из единицы. Без ограничения общности можем считать, что $\omega = \zeta^3$. Минимальный многочлен ω над $\mathbb{Q}$ равен $x^2 + x + 1$, поэтому
$$[\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}] = 2.$$
Поскольку $\omega \in \mathbb{Q}[\zeta]$, поле $\mathbb{Q}[\omega]$ является подполем в $\mathbb{Q}[\zeta]$. Тогда, по теореме о башне полей,
$$[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}[\omega]] = \frac{[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}]} = \frac{6}{2} = 3.$$
Таким образом, $\mathbb{Q}[\zeta]$ – расширение поля $\mathbb{Q}[\omega]$ степени 3.

Теперь допустим, что расширение $\mathbb{Q}[\zeta]/\mathbb{Q}[\omega]$ содержит промежуточное поле E. По теореме о башне полей,
$$[\mathbb{Q}[\zeta] : E] \cdot [E : \mathbb{Q}[\omega]] = [\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}[\omega]] = 3.$$
Поскольку 3 – простое число, то поле E обязано совпадать с $\mathbb{Q}[\zeta]$ или $\mathbb{Q}[\omega]$. Следовательно, собственных промежуточных полей нет. Применяя теорему 3.7 и предложение 3.2, получаем требуемое утверждение. □

§4. Путь длины 2 между идемпотентами

В этом параграфе мы покажем, что в любой алгебре Окубо с идемпотентами над произвольным полем $\mathbb{F}$ централизаторы любых двух идемпотентов имеют нетривиальное пересечение. Это наблюдение понадобится нам при изучении графа коммутативности вещественных псевдо-октонионов в следующем параграфе.

Лемма 4.1. *Пусть $e, f \in \mathcal{O}$ – ненулевые идемпотенты. Рассмотрим элемент*

$$x = (e+f) * (e+f) - 2(e+f) = e * f + f * e - e - f.$$

Если $x \neq 0$, то $[e] \leftrightarrow [x] \leftrightarrow [f]$ в $\Gamma_C(\mathcal{O})$.

Доказательство. По предложению 2.7, $\mathrm{n}(e) = \mathrm{n}(f) = 1$. Используя теорему 2.3(2) и равенство (2.5), нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} e * x &= e * (e * f) + e * (f * e) - e * e - e * f \\ &= \mathrm{n}(e,f)e - f * (e * e) + \mathrm{n}(e)f - e - e * f \\ &= (\mathrm{n}(e,f) - 1)e + f - e * f - f * e, \\ x * e &= (e * f) * e + (f * e) * e - e * e - f * e \\ &= \mathrm{n}(e)f + \mathrm{n}(e,f)e - (e * e) * f - e - f * e \\ &= (\mathrm{n}(e,f) - 1)e + f - e * f - f * e, \end{aligned}$$

то есть $e * x = x * e$. Аналогично, $f * x = x * f$. □

Лемма 4.2. *Если в обозначениях леммы* 4.1 *выполнено $x = 0$, то $f = e + z$, где*

(1) $\mathrm{n}(z) = \mathrm{n}(e,z) = 0$,
(2) $z * z = 0$,
(3) $z = e * z + z * e$.

Доказательство. Имеем $0 = e * x = (\mathrm{n}(e,f) - 2)e - x = (\mathrm{n}(e,f) - 2)e$, откуда $\mathrm{n}(e,f) = 2$. Положим $z = f - e$. Тогда

$$\begin{aligned} n(z) &= n(f-e) = n(f) + n(e) - n(e,f) = 1 + 1 - 2 = 0, \\ n(z,e) &= n(e+z) - n(e) - n(z) = 1 - 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Подставляя $f = e + z$ в равенства $x = 0$ и $f * f = f$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= x = e * (e+z) + (e+z) * e - e - (e+z) = e * z + z * e - z, \\ 0 &= f * f - f = (e+z) * (e+z) - (e+z) \\ &= (e * z + z * e - z) + z * z = z * z. \end{aligned}$$ □

Замечание 4.3. В частности, если алгебра $\mathcal{O}$ не имеет делителей нуля, то есть норма на $\mathcal{O}$ анизотропна (см. [12, лемма 2.1]), то условие $x = 0$ в лемме 4.1 возможно только при $e = f$.

Определение 4.4. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная алгебра. *Централизатором* элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество элементов $\mathcal{A}$, с ним коммутирующих:

$$C_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\}.$$

Лемма 4.5. *Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто,* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ *и* $\mathcal{O} = P_8(\mathbb{F})$ *– алгебра псевдо-октонионов. Тогда, с точностью до сопряжения матрицами из $GL_3(\mathbb{F})$, элементы, удовлетворяющие условию леммы 4.2 при $z \neq 0$, имеют вид*

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

При этом для элемента

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

выполнено $g \in C_{\mathcal{O}}(e) \cap C_{\mathcal{O}}(z)$, то есть $[e] \leftrightarrow [g] \leftrightarrow [f]$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{n}(z) = 0$, то, как нетрудно заметить, $0 = z * z = zz$. Используя жорданову нормальную форму, получаем искомый вид матрицы z с точностью до сопряжения. Далее, из равенства (2.1) следует, что $z = e * z + z * e = ez + ze - 2/3 \cdot \operatorname{tr}(ez)I$. Отсюда можно получить, что

$$e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & \delta \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Так как элемент e идемпотентен, то, согласно [9, стр. 10], он сопряжён с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\alpha = -1$ или $\alpha = 2$. Записывая явно $e = e * e = ee - \operatorname{tr}(ee)/3 \cdot I$, получаем два возможных варианта:

$$e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \gamma \\ 0 & -1 & \delta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad e = \begin{pmatrix} 2 & \beta & \gamma \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно рассмотрим

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma/3 \\ 0 & 1 & -\delta/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\beta/3 & -\gamma/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $CzC^{-1} = z$,

$$CeC^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad CeC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Условие $g \in C_{\mathcal{O}}(e) \cap C_{\mathcal{O}}(z)$ нетрудно проверить непосредственно, используя замечание 3.1. $\square$

Следствие 4.6. *Пусть $\mathcal{O}$ – алгебра Окубо над произвольным полем $\mathbb{F}$, и $e, f \in \mathcal{O}$ – ненулевые идемпотенты. Тогда* $\mathrm{d}([e],[f]) \leqslant 2$ *в* $\Gamma_C(\mathcal{O})$.

Доказательство. Если $x \neq 0$ в лемме 4.1, то $[e] \leftrightarrow [x] \leftrightarrow [f]$ в $\Gamma_C(\mathcal{O})$. Иначе выполнены условия леммы 4.2. Если $z = 0$, то $e = f$ и $\mathrm{d}([e],[f]) = 0$. Поэтому будем считать, что $z \neq 0$.

Сначала исследуем случай, когда $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$. Рассмотрим линейные операторы L_e и R_e соответственно левого и правого умножения на e. Тогда $C_{\mathcal{O}}(e) = \ker(L_e - R_e)$. Аналогично, $C_{\mathcal{O}}(z) = \ker(L_z - R_z)$. Переходя к алгебраическому замыканию $\overline{\mathbb{F}}$ поля $\mathbb{F}$, мы получаем алгебру Окубо $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ над полем $\overline{\mathbb{F}}$, в которой элементы e и z по-прежнему удовлетворяют условиям леммы 4.2. Матрицы линейных операторов L_e, R_e, L_z, R_z, записанные в некотором базисе алгебры $\mathcal{O}$, являются матрицами соответствующих операторов на $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}$ в том же базисе. По лемме 4.5, существует ненулевой элемент $g \in C_{\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}}(e) \cap C_{\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{F}}}}(z) = \ker_{\overline{\mathbb{F}}}(L_e - R_e) \cap \ker_{\overline{\mathbb{F}}}(L_z - R_z)$. Так как существование ненулевых решений системы линейных алгебраических уравнений не зависит от перехода к алгебраическому замыканию поля, то найдётся ненулевой элемент $g' \in \ker_{\mathbb{F}}(L_e - R_e) \cap \ker_{\mathbb{F}}(L_z - R_z) = C_{\mathcal{O}}(e) \cap C_{\mathcal{O}}(z)$, и тогда $[e] \leftrightarrow [g'] \leftrightarrow [f]$.

Теперь предположим, что $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$. Положим $y = z + e * z$. Если $y = 0$, то $z * e = z - e * z = 2z = -z = e * z$, поэтому $[e] \leftrightarrow [z] \leftrightarrow [f]$.

Пусть теперь $y \neq 0$. Используя теорему 2.3(2) и равенство (2.5), получаем

$$\begin{aligned} z * y &= z * (z + e * z) = z * z + \mathrm{n}(z)e = 0, \\ y * z &= (z + e * z) * z = z * z + \mathrm{n}(e,z)z - (z * z) * e = 0, \end{aligned}$$

откуда $y \in C_{\mathcal{O}}(z)$. Покажем, что $y \in C_{\mathcal{O}}(e)$. Действительно,

$$e * y = e * z + e * (e * z) = e * z + \mathrm{n}(e, z)e - z * (e * e) = e * z - z * e,$$
$$y * e = z * e + (e * z) * e = z * e + z = e * z + 2z * e.$$

Так как $\operatorname{char} \mathbb{F} = 3$, имеем $e * y = y * e$, поэтому $[e] \leftrightarrow [y] \leftrightarrow [f]$. □

§5. Граф коммутативности вещественных псевдо-октонионов

Перейдём теперь к случаю вещественной алгебры Окубо $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$. В этом параграфе мы покажем, что граф коммутативности $\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))$ связен, и его диаметр равен четырём, как и в случае алгебры Окубо над алгебраически замкнутым полем.

Рассмотрим матрицы Гелл-Манна – восемь эрмитовых матриц с нулевым следом, удовлетворяющих условию $\operatorname{tr}(\lambda_j \lambda_k) = 2\delta_{jk}$, см. [16, стр. 1074]:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Как отмечено в [22, стр. 45], элементы $e_j = \sqrt{3}\lambda_j$ $(j = 1, \ldots, 8)$ образуют ортонормированный базис алгебры $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ относительно скалярного произведения $\mathrm{n}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)/2$.

Определение 5.1 ([20, стр. 18])**.** Подалгебра

$$\widetilde{P}_4(\mathbb{R}) = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, e_8\}$$

называется *вещественной псевдо-кватернионной алгеброй.*

Определим элемент $f \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ равенством
$$f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$
Согласно [9, стр. 10], элемент f является единственным ненулевым идемпотентом в $P_8(\mathbb{C})$ с точностью до сопряжения. Так как $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ можно рассматривать как подмножество в $P_8(\mathbb{C})$, то все идемпотентные элементы $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ являются идемпотентными элементами в $P_8(\mathbb{C})$. Хорошо известно, что любая эрмитова матрица унитарно подобна своей жордановой нормальной форме, откуда немедленно вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.2. *Элемент* (5.1) *является единственным, с точностью до унитарного подобия, идемпотентом в* $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$.

Установим явный вид централизатора для идемпотента f.

Предложение 5.3. $C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(f) = \widetilde{P}_4(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заметим, что подалгебра $\widetilde{P}_4(\mathbb{R})$ состоит из блочно-диагональных матриц с верхним блоком размеров 2×2 и нижним размеров 1×1. То есть $f \in \widetilde{P}_4(\mathbb{R})$, и, поскольку соответствующие блоки матрицы f – скалярные матрицы, то $\widetilde{P}_4(\mathbb{R}) \subseteq C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(f)$.

С другой стороны, централизатор ненулевого идемпотента произвольной алгебры Окубо над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 3$, является четырёхмерной подалгеброй [10, следствие 5.8]. Следовательно, $C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(f) = \widetilde{P}_4(\mathbb{R})$. □

Замечание 5.4. Так как f – единственный с точностью до унитарного подобия идемпотент в $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$, то диагональных идемпотентов в точности три: f, ufu^* и vfv^*, где
$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Тогда из предложения 5.3 следует, что их централизаторы соответственно равны $\widetilde{P}_4 = \widetilde{P}_4(\mathbb{R})$, $L_4 = u\widetilde{P}_4(\mathbb{R})u^*$ и $M_4 = v\widetilde{P}_4(\mathbb{R})v^*$.

В дальнейшем будет удобно пользоваться понятием циклической матрицы, централизатор которой хорошо известен.

Определение 5.5. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется циклической, если её минимальный и характеристический многочлены совпадают.

В частности, если характеристический многочлен раскладывается на линейные множители над $\mathbb{F}$, то цикличность матрицы A равносильна тому, что любое её собственное значение имеет геометрическую кратность 1.

Теорема 5.6 ([17, теорема 3.2.4.2, задача 3.2.P2]). *Матрица $a \in M_n(\mathbb{F})$ является циклической тогда и только тогда, когда централизатор $C_{M_n(\mathbb{F})}(a)$ совпадает с унитальной подалгеброй, порождённой матрицей a.*

Некоторые другие эквивалентные условия, характеризующие циклические матрицы над полями, содержащими по меньшей мере n элементов, приведены в [5, теорема 2.8]. Утверждение, аналогичное теореме 5.6, можно доказать и для циклической матрицы из алгебры псевдооктонионов.

Предложение 5.7. *Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$ и $\omega \in \mathbb{F}$. Рассмотрим ненулевой элемент $a \in P_8(\mathbb{F})$. Если матрица a циклическая, то $C_{P_8(\mathbb{F})}(a) = \operatorname{span}\big\{a, a * a\big\} = \operatorname{alg}\langle a\rangle$, и размерность централизатора равна 2.*

Доказательство. Согласно теореме 5.6, $C_{M_3(\mathbb{F})}(a) = \operatorname{span}\{I, a, aa\}$, а его размерность равна 3. Из замечания 3.1 получаем, что

$$C_{P_8(\mathbb{F})}(a) = \{b \in C_{M_3(\mathbb{F})}(a) \mid b \in P_8(\mathbb{F})\} = \{b \in C_{M_3(\mathbb{F})}(a) \mid \operatorname{tr}(b) = 0\}.$$

Из равенств $a * a = aa - \operatorname{tr}(aa)/3 \cdot I$ и $\operatorname{tr}(a) = \operatorname{tr}(a * a) = 0$ немедленно вытекает требуемое утверждение. □

Замечание 5.8. Аналогично можно показать, что если матрица $a \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ циклическая, то $C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(a) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\big\{a, a * a\big\} = \operatorname{alg}\langle a\rangle$, так как

$$C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(a) = \{b \in C_{P_8(\mathbb{C})}(a) \mid b^* = b\}.$$

Следующее предложение устанавливает, что множество элементов алгебры $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$, не являющихся циклическими матрицами, совпадает с объединением прямых, проходящих через ненулевые идемпотенты.

Предложение 5.9. *Пусть $x \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R})$, $x \neq 0$. Тогда множество $\mathbb{F}x$ содержит ненулевой идемпотент тогда и только тогда, когда x не является циклической матрицей.*

Доказательство. Если множество $\mathbb{F}x$ содержит ненулевой идемпотент g, то, согласно предложению 5.2, элемент x обладает собственным значением, геометрическая кратность которого равна 2. Следовательно, матрица x не является циклической.

Обратно, если x не является циклической матрицей, то x обладает собственным значением геометрической кратности не меньше 2. Так как x – эрмитова матрица и $\mathrm{tr}(x) = 0$, набор собственных значений матрицы x имеет вид $(-\lambda, -\lambda, 2\lambda)$ для некоторого $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Значит, элемент x/λ идемпотентен. □

Как показано выше, идемпотенты в $\widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ обладают централизаторами наибольшей размерности. Теперь докажем, что любая вершина графа коммутативности соединена ребром с идемпотентом.

Лемма 5.10. *Для любого ненулевого элемента $x \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R})$ существует такой ненулевой идемпотент $g \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R})$, что $[x] \leftrightarrow [g]$ в $\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))$.*

Доказательство. Так как матрица x является эрмитовой, существует такая унитарная матрица $u \in M_3(\mathbb{C})$, что $x = udu^*$, где d – диагональная матрица. Положим $g = ufu^*$. Тогда g – идемпотент, и из $[d] \leftrightarrow [f]$ следует $[x] \leftrightarrow [g]$. □

Объединяя лемму 5.10 с результатами предыдущего параграфа, согласно которым расстояние между любыми двумя идемпотентами не превосходит двух, мы получаем основное утверждение о графе коммутативности вещественных псевдо-октонионов.

Теорема 5.11. *Граф $\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))$ связен, и его диаметр равен 4.*

Доказательство. Из лемм 4.1 и 5.10 и замечания 4.3 следует, что $\mathrm{diam}(\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))) \leqslant 4$. С другой стороны, рассмотрим матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad y = -x * x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы x и $y = -x * x$ линейно независимы. Рассмотрим двумерную подалгебру $\mathrm{alg}\langle x \rangle = \mathrm{span}\{x, y\}$, порождённую элементом x. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{alg}\langle x \rangle \cap (\widetilde{P}_4 \cup L_4 \cup M_4) = \{0\},$$

где подалгебры L_4 и M_4 определены в замечании 5.4.

Согласно предложению 2.8, если ненулевые элементы a и a' не пропорциональны идемпотентам, то порождённые ими подалгебры $\mathrm{alg}\langle a\rangle$ и $\mathrm{alg}\langle a'\rangle$ двумерны. Тогда из $a' \in \mathrm{alg}\langle a\rangle$ следует, что $\mathrm{alg}\langle a'\rangle = \mathrm{alg}\langle a\rangle$. Кроме того, согласно замечанию 5.8 и предложению 5.9, $C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(a) = \mathrm{alg}\langle a\rangle$. Таким образом, любой путь из $[a]$ в $[b]$, где $b \in \widetilde{P}_8(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{alg}\langle a\rangle$, обязан содержать вершину вида $[g]$, где g – идемпотент подалгебры $\mathrm{alg}\langle a\rangle$.

Значит, путь из $[x]$ в $[e_3]$ должен содержать вершины $[g]$ и $[g']$, где $g \in \mathrm{alg}\langle x\rangle$ и $g' \in \mathrm{alg}\langle e_3\rangle$ – идемпотенты. Так как g' – диагональный идемпотент, то из замечания 5.4 следует, что $C_{\widetilde{P}_8(\mathbb{R})}(g') \subseteq \widetilde{P}_4 \cup M_4 \cup L_4$, откуда получаем $g \not\leftrightarrow g'$ и $\mathrm{d}([x],[e_3]) \geqslant 4$. Следовательно, $\mathrm{d}([x],[e_3]) = 4$ и $\mathrm{diam}(\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))) = 4$. □

Замечание 5.12. Из доказательства теоремы 5.11 следует, что максимальное расстояние может достигаться только между теми вершинами, которые не пропорциональны идемпотентам. Другими словами, если $\mathrm{d}([x],[y]) = 4$ в $\Gamma_C(\widetilde{P}_8(\mathbb{R}))$, то $\mathbb{F}x$ и $\mathbb{F}y$ не содержат ненулевых идемпотентов, то есть матрицы x и y являются циклическими, см. предложение 5.9. Это утверждение схоже с теоремой 1.1 работы [6], хотя и является её ослабленной версией. Согласно упомянутой теореме, если $n \geqslant 3$ и поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ является циклической тогда и только тогда, когда найдётся такая матрица $X \in M_n(\mathbb{F})$, что $\mathrm{d}(A,X) = 4$ в $\Gamma_C(M_n(\mathbb{F}))$.

Авторы благодарны профессору А. Э. Гутерману за участие в постановке задачи, внимание к работе и ценные обсуждения.

Список литературы

1. Я. Н. Шитов, *Расстояния на графе коммутирований кольца вещественных матриц.* — Матем. заметки **103**, No. 5 (2018), 765–768.
2. S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian, *Commuting graphs of matrix algebras.* — Comm. Algebra **36**, No. 11 (2008), 4020–4031.
3. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs.* — Linear Algebra Appl. **418**, No. 1 (2006), 161–176.
4. S. Akbari, P. Raja, *Commuting graphs of some subsets in simple rings.* — Linear Algebra Appl. **416**, Nos. 2–3 (2006), 1038–1047.
5. G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Extremal matrix centralizers.* — Linear Algebra Appl. **438**, No. 7 (2013), 2904–2910.
6. G. Dolinar, B. Kuzma, P. Oblak, *On maximal distances in a commuting graph.* — Electron. J. Linear Algebra **23**, No. 1 (2012), 243–256.

7. A. Elduque, *Symmetric composition algebras.* — J. Algebra **196**, No. 1 (1997), 282–300.
8. A. Elduque, *Okubo algebras and twisted polynomials.* — Contemp. Math. **224** (1999), 101–109.
9. A. Elduque, *Okubo algebras: automorphisms, derivations and idempotents.* — Contemp. Math. **652** (2015), 61–73.
10. A. Elduque, *Order* 3 *elements in* G_2 *and idempotents in symmetric composition algebras.* — Canad. J. Math. **70**, No. 5 (2018), 1038–1075.
11. A. Elduque, *Okubo algebras with isotropic norm.* — Springer Proc. Math. Stat. **427** (2023), 287–301.
12. A. Elduque, H. Ch. Myung, *Flexible composition algebras and Okubo algebras.* — Comm. Algebra **19**, No. 4 (1991), 1197–1227.
13. A. Elduque, H. Ch. Myung, *On flexible composition algebras.* — Comm. Algebra **21**, No. 7 (1993), 2481–2505.
14. A. Elduque, J. M. Pérez, *Composition algebras with associative bilinear form.* — Comm. Algebra **24**, No. 3 (1996), 1091–1116.
15. J. R. Faulkner, *Finding octonion algebras in associative algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. **104**, No. 4 (1988), 1027–1030.
16. M. Gell-Mann, *Symmetries of baryons and mesons.* — Phys. Rev. **125**, No. 3 (1962), 1067–1084.
17. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Second ed. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2012.
18. M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The Book of Involutions.* — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **44** (1998).
19. R. Morrison, *Commuting graphs of p-adic matrices.* — arXiv:2407.13848 (2024).
20. S. Okubo, *Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras.* — Hadronic J. **1**, No. 4 (1978), 1250–1278.
21. S. Okubo, *Deformation of the Lie-admissible pseudo-octonion algebra into the octonion algebra.* — Hadronic J. **1**, No. 5 (1978), 1383–1431.
22. S. Okubo, *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics.* Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1995.
23. S. Okubo, J. M. Osborn, *Algebras with nondegenerate associative symmetric bilinear forms permitting composition.* II. — Comm. Algebra **9**, No. 20 (1981), 2015–2073.
24. H.-P. Petersson, *Eine Identität fünften Grades, der gewisse Isotope von Kompositions-Algebren genügen.* — Math. Z. **109** (1969), 217–238.
25. Ya. Shitov, *A matrix ring with commuting graph of maximal diameter.* — J. Combin. Theory, Ser. A **141** (2016), 127–135.

Zhilina S. A., Pavlinov D. A. Commuting graphs of Okubo algebras.

Commuting graphs of Okubo algebras are considered, and the problem of their connectivity is studied. The commuting graph of a pseudo-octonion algebra $P_8(\mathbb{F})$ over a field F, $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$, that contains a primitive cubic root of unity is shown to be isomorphic to the commuting graph of the matrix algebra $M_3(\mathbb{F})$. As a consequence, if the field $\mathbb{F}$ is algebraically closed, then the diameter of the commuting graph for the unique Okubo algebra over $\mathbb{F}$ equals 4. It is shown that the commuting graph of the real division Okubo algebra is connected and its diameter also equals 4. The proof of this result relies on the fact that, given any two idempotents in an arbitrary Okubo algebra, the intersection of their centralizers is always nonzero.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия;
Московский Центр фундаментальной
и прикладной математики,
Москва, Россия
E-mail: s.a.zhilina@gmail.com
E-mail: pavlinov.d.aa@gmail.com

Поступило 20 октября 2025 г.