Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 542, 2025 г.

А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев

АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЦЕПНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ СВОЙСТВА

§1. Введение

Определение 1.1. *Обозначим через* M_n *множество неотрицательных квадратных матриц порядка* n*. Через* $\mathbb{P}_n$ *обозначим множество матриц из* M_n*, у которых отсутствуют нулевые строки и нулевые столбцы.*

Определение 1.2. *Неотрицательная матрица* $A = (a_{ik}) \in \mathbb{P}_n$ *называется цепной, если для каждой пары ее положительных элементов* a_{ik} *и* a_{pq} *существует цепочка, концами которой являются эти элементы, то есть последовательность положительных элементов* $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_mk_m}$ *такая, что*

a) $i_1 = i, k_1 = k$;
b) $i_m = p, k_m = q$;
c) $i_l = i_{l+1}$ *или* $k_l = k_{l+1}$ *для всех* $l = 1, 2, \ldots, m-1$.

Цепные матрицы были впервые рассмотрены в работах [8] и [10].

Определение 1.3. *Говорят, что строки* i *и* j *неотрицательной матрицы* A *пересекаются, если они имеют положительные элементы в общем столбце, то есть,* $a_{il} > 0, a_{jl} > 0$ *для некоторого* l.

Таким образом, матрица является цепной, если для любых двух строк i, j существует цепочка строк $i = w_1, \ldots, w_k = j$ такая, что w_t пересекается с w_{t+1}.

Определение 1.4. *Матрица* $A \in \mathrm{M}_n$ *называется скрамблинг-матрицей, если любые две строки в ней пересекаются.*

Из определения непосредственно следует, что любая скрамблинг-матрица является цепной матрицей.

Определение 1.5. *Матрица* $A \in \mathbb{P}_n$ *называется потенциально цепной, если для некоторого* k *матрица* A^k *цепная. Наименьшее такое*

Ключевые слова: цепные матрицы, цепной индекс, неотрицательные матрицы.

k называется цепным индексом. Цепной индекс матрицы A обозначается через $\mathrm{CI}(A)$. *Если A не является потенциально цепной, то полагаем* $\mathrm{CI}(A) = 0$.

Аналогично, наименьшее такое k, что A^k – скрамблинг-матрица, называется скрамблинг-индексом и обозначается через $k(A)$. Если такого k не существует, то полагаем $k(A) = 0$.

Определение 1.6. *Другим важным индексом матрицы из* M_n *является ее экспонента – наименьший натуральный показатель степени, в которой матрица становится положительной (все элементы больше нуля). Матрица, имеющая экспоненту, называется примитивной. Экспоненту матрицы A будем обозначать через* $\exp(A)$. *Если A не является примитивной, то полагаем* $\exp(A) = 0$.

В настоящей работе дается обзор классических свойств неотрицательных матриц, определяемых их комбинаторной структурой, и их числовых инвариантов. Описываются также основные результаты, связанные с алгебраически положительными матрицами – обобщением примитивных матриц, включающим в себя матрицы с отрицательными элементами. Как обобщение потенциально цепных матриц введено понятие алгебраически цепных матриц, которое также допускает матрицы с отрицательными элементами. Для этого нового класса получен ряд результатов, аналогичных результатам для алгебраически положительных матриц. В частности, доказывается, что алгебраический цепной индекс ограничен сверху числом $n-1$ и принимает все целые значения от 1 до $n-1$.

Настоящая работа построена следующим образом. В §2 описаны взаимоотношения между классами цепных, примитивных и скрамблинг-матриц, а также неразложимых и вполне неразложимых матриц. В §3 описаны основные известные результаты, касающиеся алгебраически положительных матриц, которые являются расширением класса примитивных матриц. В §4 вводится аналогичное понятие алгебраически цепных матриц, являющееся обобщением понятия цепных матриц, и описывается множество неотрицательных алгебраически цепных матриц. В §5 доказано, что все возможные значения алгебраического цепного индекса достигаются.

§2. Описание некоторых классов неотрицательных матриц

Определение 2.1. *Матрица $A \in \mathrm{M}_n$ называется разложимой, если существует матрица-перестановка P, такая что*

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2 – квадратные матрицы. Матрица, не являющаяся разложимой, называется неразложимой.

Определение 2.2. *Матрица $A \in \mathrm{M}_n$ называется частично разложимой, если существуют матрицы-перестановки P и Q, такие что*

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2 – квадратные матрицы. Матрица, не являющаяся частично разложимой, называется вполне неразложимой.

Замечание 2.3. Справедливы следующие ранее известные включения матричных множеств:

(1) $\{$цепные матрицы$\} \supset \{$вполне неразложимые матрицы$\} \subset \{$неразложимые матрицы$\} \supset \{$примитивные матрицы$\}$;
(2) $\{$цепные матрицы$\} \supset \{$скрамблинг-матрицы$\}$;
(3) если матрица A неразложима, то A является потенциально цепной тогда и только тогда, когда она примитивна [1, предложение 6.1].

Ниже мы приводим матрицы, показывающие, что соответствующая область диаграммы, изображенной на рис. 1, не пуста:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – цепная, но разложимая и не скрамблинг-матрица,

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – разложимая скрамблинг-матрица,

$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – примитивная частично разложимая матрица,

Рис. 1. Диаграмма включений различных классов матриц.

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – вполне неразложимая скрамблинг-матрица,

$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – вполне неразложимая матрица, не являющаяся скрамблинг-матрицей,

$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – частично разложимая примитивная матрица,

$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – примитивная, но не цепная матрица,

$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – неразложимая, но не примитивная матрица.

Утверждение 2.4.

(1) *Пусть A – примитивная матрица. Тогда*

$$\exp(A) \geqslant k(A) \geqslant \mathrm{CI}(A); \tag{1}$$

(2) $\{$*примитивные матрицы*$\} \subset \{$*матрицы с ненулевым скрамблинг-индексом*$\} \subset \{$*потенциально цепные матрицы*$\}$.

Доказательство. Оба утверждения непосредственно следуют из того, что положительные матрицы – подвид скрамблинг матриц, а те, в свою очередь, – подвид цепных. □

Для $n \times n$ матриц известны следующие результаты.

Теорема 2.5 ([11], [5, стр. 82])**.** *Пусть A – неотрицательная неразложимая матрица. Тогда* $\exp(A) \leqslant (n-1)^2 + 1$.

Теорема 2.6 ([7, теорема 6.5])**.** *Пусть A – неотрицательная матрица. Тогда* $k(A) \leqslant \lceil ((n-1)^2 + 1)/2 \rceil$.

Теорема 2.7 ([3, теорема 3.8])**.** *Пусть A – неотрицательная матрица. Тогда* $\mathrm{CI}(A) \leqslant n - 1$.

Пример 2.8. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$k(A) = 2, \quad \exp(A) = 0, \quad \mathrm{CI}(B) = 1, \quad k(B) = 0.$$

Зачастую полезно анализировать не только сами матрицы, но также и соответствующие им ориентированные графы. Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n$ построим граф $D = D(A)$ следующим образом: $V(D) = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $E(D) = \{(i, j) \mid a_{ij} > 0\}$. Для построенного графа исходная матрица называется матрицей смежности.

Пусть $u \xrightarrow{t} v$ означает, что из u существует путь в v длины ровно t. Будем писать $u \to v$, когда $u \xrightarrow{1} v$.

Определение 2.9. *Примитивным называется граф, для которого существует такое натуральное число $p \in \mathbb{N}$, что для любых вершин u, v верно*

$$u \xrightarrow{p} v.$$

Иными словами, это ориентированный граф с примитивной матрицей смежности.

Замечание 2.10. В подходящем контексте через $\mathbb{P}_n$ будем также обозначать множество графов, в которых каждая вершина имеет хотя бы одну выходящую и хотя бы одну входящую дугу. Таким образом, граф D принадлежит $\mathbb{P}_n$, когда его матрица смежности A принадлежит $\mathbb{P}_n$.

Определение 2.11. *Будем говорить, что две вершины u, v графа D пересекаются в степени k, если существует такая вершина w, что $u \xrightarrow{k} w$ и $v \xrightarrow{k} w$, при этом w – это вершина, по которой они пересекаются в этой степени. Последнее эквивалентно тому, что для соответствующей матрицы A строки, отвечающие вершинам u и v, пересекаются в матрице A^k. Это отношение двух вершин будем обозначать через $u \wedge^k v$.*

Для графов из множества $\mathbb{P}_n$ рассматриваемое отношение симметрично и рефлексивно (но не транзитивно). В терминологии работы [2] $u \wedge^1 v$ означает, что u и v образуют звено.

Определение 2.12. *Цепным индексом графа D называется такое число k, что для любых вершин $u, v \in D$ существует цепочка вершин $w_1, \dots, w_m$ такая, что*

$$u \wedge^k w_1, w_1 \wedge^k w_2, \dots, w_m \wedge^k v.$$

Если такого k не существует, то цепной индекс полагается равным нулю.

Граф с ненулевым цепным индексом называется потенциально цепным.

Нетрудно заметить, что цепной индекс графа есть цепной индекс его матрицы смежности.

Замечание 2.13. Цепочку вершин $w_1, \dots, w_m$ такую, что

$$u \wedge^k w_1, w_1 \wedge^k w_2, \dots, w_m \wedge^k v,$$

будем обозначать через $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$.

Тогда потенциально цепной граф D, у которого цепной индекс равен l, – это граф, в котором $u \wedge^l \cdots \wedge^l v$ для любых u, v.

Обозначение $u \wedge^k \cdots \wedge^k v$ было введено в работе [3] и показывает, что u и v соединены некоторой цепочкой.

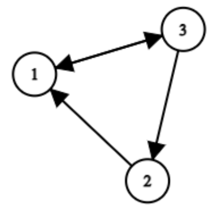

Рис. 2. Пример потенциально цепного графа с тремя вершинами и цепным индексом 2.

Пример 2.14. Рассмотрим примитивный граф D_1 с матрицей смежности

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для графа, изображенного на рис. 2, имеем:

$$2 \to 1; \quad 3 \to 1 \Rightarrow 2 \wedge^1 3,$$

$$2 \to 1 \to 3; \quad 3 \to 1 \to 3 \Rightarrow 2 \wedge^2 3,$$

$$3 \to 2 \to 1; \quad 1 \to 3 \to 1 \Rightarrow 1 \wedge^2 3.$$

Следовательно, D_1 – потенциально цепной граф, и цепной индекс D_1 равен 2. При этом

$$2 \to 1 \to 3 \to 1,$$

$$1 \to 3 \to 2 \to 1,$$

так что $2 \wedge^3 1$.

Определение 2.15. *Матрицей Виландта* [11] *называется матрица*

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [1] доказано, что цепной индекс $n \times n$ матрицы W равен $n-1$. Таким образом, W – матрица с максимально возможным цепным индексом.

Замечание 2.16. Матрица Виландта W – единственная (с точностью до преобразования перестановочного подобия $W \to PWP^T$) матрица, имеющая максимальную экспоненту, и единственная (с точностью до преобразования перестановочного подобия) матрица, имеющая максимальный скрамблинг-индекс [7, 11].

Следующие примеры демонстрируют другие матрицы с максимальным цепным индексом, которые не сводятся преобразованием перестановочного подобия к матрице Виландта.

Пример 2.17. Пусть

$$W' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица W' отличается от матрицы Виландта добавлением единицы на позиции $(1,1)$, то есть, имеет больше положительных элементов и поэтому не сводится преобразованием перестановочного подобия к матрице Виландта.

Пример 2.18. Рассмотрим 4×4 матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цепной индекс L равен 3. Заметим, что $(L^2)_{1,1} = 1$, откуда следует, что $(PLP^T)^2$ тоже имеет единицу на диагонали. Квадрат матрицы Виландта W не имеет единицы на диагонали, поэтому L не сводится преобразованием перестановочного подобия к W, так как такое преобразование переводит диагональные элементы в диагональные.

Пример 2.19. Рассмотрим 5×5 матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цепной индекс X равен 4. При этом X имеет $n+2$ положительных элемента, а L, K и W – только $n+1$, поэтому X не сводится к L, W или K.

Аналогично предыдущему пункту, $(W')_{1,1} = 1$, а X не имеет положительных элементов на диагонали, поэтому X не сводится преобразованием перестановочного подобия к W'.

Пример 2.20. Пусть

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица K является разложимой. Таким образом, K не является примитивной, но является потенциально цепной и имеет максимальный цепной индекс. Разложимая матрица не может сводиться преобразованием перестановочного подобия к неразложимой матрице, а матрицы W, W', L и X неразложимы. Матрица K является матрицей смежности вырожденного графа-гантели (dumbbell graph).

§3. Алгебраически положительные и алгебраически цепные матрицы

В работе [9] Киркланд, Сяо и Жан ввели новое обобщение понятия примитивности – алгебраически положительные матрицы. Опишем основные известные результаты, касающиеся алгебраически положительных матриц.

Определение 3.1 ([9]). *Квадратная вещественная матрица A называется алгебраически положительной, если существует такой вещественный многочлен f, что $f(A)$ – положительная матрица. Минимальная степень многочлена f, такого что $f(A)$ положительна, называется индексом алгебраической положительности матрицы A.*

Замечание 3.2. Любая примитивная матрица является алгебраически положительной, а в качестве многочлена можно взять $f(A) = A^{(n-1)^2+1}$.

Класс алгебраически положительных матриц замечателен тем, что, с одной стороны, расширяет понятие примитивности на матрицы с отрицательными элементами; с другой стороны, он придает одинаковый статус отрицательным и положительным элементам матриц.

Теорема 3.3 ([9, теорема 1]). *Матрица A алгебраически положительна тогда и только тогда, когда она имеет простое вещественное собственное значение и соответствующие левый и правый собственные векторы.*

Утверждение 3.4 ([9, предложение 2]). *Любая алгебраически положительная матрица неразложима.*

Теорема 3.5 ([9, теорема 5]). *Пусть A – неразложимая матрица, все внедиагональные элементы которой неотрицательны (или неположительны). Тогда A алгебраически положительна.*

Утверждение 3.6 ([9, следствие 6]). *Неотрицательная матрица алгебраически положительна тогда и только тогда, когда она неразложима.*

Теорема 3.7 ([9, теорема 8]). *Индекс алгебраической положительности принимает значения от 1 до $n-1$, где n – порядок матрицы. Для любого n и любого $1 \leqslant k \leqslant n-1$ существует матрица A, такая что индекс алгебраической положительности A равен k.*

Теорема 3.8 ([6, теорема 2]). *Вещественная матрица A алгебраически положительна тогда и только тогда, когда она коммутирует с единственной (с точностью до умножения на скаляр) положительной матрицей ранга 1.*

Потенциально цепные матрицы являются расширением понятия примитивных матриц: если A неприводима, то она примитивна тогда и только тогда, когда она потенциально цепная. Поэтому естественным выглядит перенос понятия алгебраической положительности на цепные матрицы.

Определение 3.9. *Квадратная матрица A называется алгебраически цепной, если существует такой многочлен f, что $f(A)$ – цепная матрица. Минимальная степень такого многочлена называется алгебраическим цепным индексом матрицы A и обозначается через $a(A)$.*

В работе [9], в которой было введено определение алгебраически положительной матрицы, доказано, что для проверки этого свойства достаточно рассмотреть многочлены степени не выше $n-1$, где n – порядок матрицы. Аналогичное утверждение справедливо и для алгебраически цепных матриц.

Утверждение 3.10. *Пусть A – алгебраически цепная матрица. Тогда найдется такой многочлен f, $deg\ f \leqslant n-1$, что $f(A)$ является цепной матрицей.*

Доказательство. Пусть h – характеристический многочлен матрицы A, а $g(A)$ – цепная матрица. Тогда существуют такие многочлены q и f, что $\deg f \leqslant n-1$ и $g = hq + f$. По теореме Гамильтона–Кэли, $h(A) = 0$. Следовательно, $g(A) = f(A)$. □

Пример 3.11. Неотрицательная матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является ни цепной, ни потенциально цепной, но матрица

$$A_1 + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является цепной.

Более интересным примером была бы матрица, являющаяся алгебраически цепной, но с многочленом степени 2 или выше. Приведем такой пример.

Пример 3.12. Пусть $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $t_1 A_2 + t_2 E$ не является цепной ни при каких $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, так как при любых ненулевых коэффициентах она содержит отрицательные элементы. При этом

$$(A_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

но

$$E - A_2^2 + A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строка 1 пересекается со строками $2, 3$ и 4, поэтому матрица $E - A_2^2 + A_2^3$ цепная.

§4. Неотрицательные алгебраически цепные матрицы

Этот параграф посвящен характеризации неотрицательных алгебраически цепных матриц.

Следующая лемма показывает, что для неотрицательной матрицы достаточно проверить один многочлен, чтобы выяснить, является ли она алгебраически цепной.

Лемма 4.1. *Пусть A – неотрицательная матрица. Тогда A является алгебраически цепной в том и только в том случае, когда матрица $E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ является цепной.*

Доказательство. Достаточность условия следует из определения алгебраически цепной матрицы. Докажем необходимость.

Пусть f – такой многочлен, что $f(A)$ – цепная матрица. Сперва заметим, что при замене отрицательного коэффициента c_i многочлена f

на 1 получится новый многочлен f', такой что матрица $f'(A)$ цепная. Действительно, $f'(A) = f(A) + (1 - c_i)A^i$, причем правое слагаемое является неотрицательной матрицей, так что $f'(A)$ является цепной. Поэтому можно считать, что все коэффициенты в f неотрицательны. В таком случае замена коэффициентов на единицу не повлияет на комбинаторную структуру (положение ненулевых элементов) матрицы $f(A)$. Лемма доказана. □

Определение 4.2. *Для ориентированного графа D определим неориентированный граф D' как граф с теми же вершинами, в котором вершины u и v связаны ребром тогда и только тогда, когда $u \to v$ или $v \to u$.*

Слабо-связным называется такой ориентированный граф D, что D' – связный граф. Иными словами, в слабо-связном графе, игнорируя направления дуг, можно дойти от любой вершины до любой другой.

Утверждение 4.3. *Дуга $u \to v$ в графе $G = D(E+A+A^2+\ldots+A^{n-1})$ существует тогда и только тогда, когда либо*

(1) *$u = v$ (этот случай отвечает слагаемому E),*

либо

(2) *$u \xrightarrow{t} v$ в графе $D(A)$ для некоторого t.*

Доказательство. Наличие дуги $u \to v$ в G означает, что соответствующий элемент хотя бы одной из матриц $E, A, \ldots, A^n$ положителен. Случай $u = v$ очевиден: $E_{uu} > 0$. Пусть $u \neq v$ и $(A^t)_{u,v} > 0$.

Тогда $u \to v$ в A^t по определению означает, что $u \xrightarrow{t} v$ в исходном графе $D(A)$. □

Утверждение 4.4. *Если неотрицательная матрица A алгебраически цепная, то граф $D(A)$ является слабо-связным.*

Доказательство. Пусть A – алгебраически цепная матрица и

$$G = D(E + A + \ldots + A^{n-1}).$$

Тогда граф G является цепным, то есть, для любых u, v существует набор вершин $a_1, \ldots, a_{k-1}, w_1, \ldots, w_k$, такой что

$$\begin{gathered} u \to a_1, \quad w_1 \to a_1, \\ w_1 \to a_2, \quad w_2 \to a_2, \\ \ldots \\ w_k \to a_{k-1}, \quad v \to a_{k-1}. \end{gathered}$$

По утверждению 4.3, если $a \to b$ в графе G, то $a \xrightarrow{t} b$ в графе $D(A)$ для некоторого t. Это значит, что существуют такие положительные числа $i_1, \dots, i_{2k+2}$, что в графе $D(A)$

$$\begin{gathered} u \xrightarrow{i_1} a_1, \quad w_1 \xrightarrow{i_2} a_1, \\ w_1 \xrightarrow{i_3} a_2, \quad w_2 \xrightarrow{i_4} a_2, \\ \dots \\ w_k \xrightarrow{i_{2k+1}} a_{k-1}, \quad v \xrightarrow{i_{2k+2}} a_{k-1}. \end{gathered}$$

Построенная цепочка путей с разной ориентацией связывает вершины u и v. В силу произвольности выбора этих вершин, заключаем, что $D(A)$ – слабо-связный граф. □

Утверждение 4.5 ([8, лемма 2.6])**.** *Ориентированный граф D с матрицей смежности A является слабо-связным тогда и только тогда, когда $A + E$ – цепная матрица.*

Комбинируя утверждения 4.4 и 4.5, получаем следующую теорему.

Теорема 4.6. *Для неотрицательной матрицы A следующие условия эквивалентны:*

(1) *A – алгебраически цепная матрица*;
(2) *$A + E$ – цепная матрица*;
(3) *$D(A)$ – слабо связный граф.*

Доказательство. (1) ⇒ (3) по утверждению 4.4.
(3) ⇔ (2) по утверждению 4.5.
(2) ⇒ (1) по определению алгебраически цепной матрицы. □

Таким образом, для неотрицательных матриц алгебраический цепной индекс ведет себя тривиально.

Следствие 4.7. *Пусть A – неотрицательная алгебраически цепная матрица. Тогда $a(A) = 1$.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из определения и импликации (1) ⇒ (2) из теоремы 4.6. □

Ранее мы работали только с графами неотрицательных матриц. Для матрицы A с отрицательными элементами определим $D(A)$ как граф, в котором $(i, j) \in E(D)$, если $a_{ij} \neq 0$.

В случае с алгебраически положительными матрицами утверждение 3.6 является следствием теоремы 3.5. Однако в нашем случае получается наоборот: теорема 4.6 является аналогом утверждения 3.6, где вместо неразложимости (сильной связности графа) достаточно слабой связности графа. Более того, из этого факта легко выводится следующий аналог теоремы 3.5.

Следствие 4.8. *Пусть A – матрица с неотрицательными (неположительными) внедиагональными элементами, причем $D(A)$ – слабо связный граф. Тогда A – алгебраически цепная матрица.*

Доказательство. Пусть

$$m = \max_{i=1,\dots,n} |a_{ii}|.$$

Если внедиагональные элементы матрицы A положительны, то рассмотрим неотрицательную матрицу

$$A' = (m+1)E + A.$$

Граф $D(A')$ слабо-связен, так как содержит все дуги, которые имеет $D(A)$. Поэтому, по теореме 4.6, матрица $E + A' = (m+2) + A$ является цепной.

Если внедиагональные элементы A неположительны, то те же рассуждения справедливы для матрицы $A'' = (m+1)E - A$: она неотрицательна, и ее граф слабо-связен, поэтому матрица $E + A'' = (m+2)E - A$ является цепной. □

Замечание 4.9. Таким образом, неотрицательные алгебраически цепные матрицы характеризуются следующим образом: это матрицы смежности слабо-связных графов. Неразложимость матрицы эквивалентна сильной связности соответствующего графа, поэтому примечательно, что условие неразложимости матрицы в теореме 3.5 и утверждении 3.6 переходит в условие слабой связности в теореме 4.6 и следствии 4.8.

§5. Алгебраический цепной индекс

Теорема 5.1. *Для любого n и любого $1 \leqslant k \leqslant n-1$ существует матрица A, такая что $a(A) = k$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство графов D_l, $l = 2, \dots, n-1$, с n вершинами, в которых

$$1 \to 1 \text{ с весом } 1,$$

$$1 \to i \text{ для всех } i = 2, \dots, l, \text{ вес таких дуг равен -1},$$

$$l \to l+1 \to l+2 \to \dots \to n, \text{ вес таких дуг равен 1}.$$

Матрица смежности A_l графа D_l имеет вид

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} & & & (l) & & & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (l). \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Докажем, что алгебраический цепной индекс A_l равен l.

Непосредственно проверяется, что для $t = 1, \dots, n-1$ матрица A_l^t имеет вид

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} & & & (l+t-2) & & & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (l+t-2) \\ \\ \\ (n-t) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}.$$

При увеличении t в первую строку добавляется -1, а остальные элементы сдвигаются вправо.

Таким образом, A_l^l имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $2E - A_l^l$ является цепной, поэтому $a(A_l) \leqslant l$, а соответствующий многочлен имеет вид $f(A) = 2E - A^l$. Теперь докажем, что $a(A_l) \geqslant l$.

Предположим, что f – многочлен степени $s < l$ и $f(A_l)$ – цепная матрица. Тогда $f(A_l)$ не может содержать отрицательных элементов. Сперва заметим, что в многочлене f коэффициент при максимальной степени A_l^s должен быть отрицательным, поскольку $(A_l^s)_{1,l+s-2} = -1$, а для любого $t < s$ верно $(A_l^t)_{i,l+s-2} = 0$.

Но тогда $f(A_l)_{l+s-2,l+s-1} < 0$, так как $(A_l^s)_{l+s-2,l+s-1} = 1$, а для любого $t < s$ верно $(A_l^t)_{l+s-2,l+s-1} = 0$. Таким образом, матрица $f(A_l)$ содержит отрицательные элементы – противоречие. $\square$

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496** (2020), 5–25.
2. Ю. А. Альпин, И. В. Башкин, *Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **504** (2021), 5–20.
3. Ю. А. Альпин, А. Э. Гутерман, Е. Р. Шафеев, *Верхняя граница цепного индекса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **514** (2023), 5–17.
4. D. Pelejo, J. Abagat, *On sign pattern matrices that allow or require algebraic positivity.* — Electron. J. Linear Algebra **35** (2019), 331–356.
5. R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory.* Cambridge, Cambridge University Press, 1991.
6. S. Das, S. Bandopadhyay, *On some sign patterns of algebraically positive matrices* — Linear Algebra Appl. **562** (2019), 91–122.
7. A. E. Guterman, A. M. Maksaev, *Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs.* — Linear Multilinear Algebra **69**, No. 11 (2019), 2143–2168.
8. D. J. Hartfiel, C. J. Maxson, *The chainable matrix, a special combinatorial matrix.* — Discrete Math. **12** (1975), 245–256.
9. S. Kirkland, P. Qiao, X. Zhan, *Algebraically positive matrices.* — Linear Algebra Appl. **504** (2016), 14–26.
10. R. Sinkhorn, P. Knopp, *Problems involving diagonal products in nonnegative matrices.* — Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 67–75.
11. H. Wielandt *Unzerlegbare, nicht negative Matrizen.* — Math. Z. **52** (1950), 642–648.

Guterman A. E., Shafeev E. R. Algebraically chainable matrices and their properties.

This work presents the main known results concerning numerical combinatorial invariants of matrices and graphs: exponent, scrambling-index, and chainable index. The notions of algebraically chainable matrices and algebraically chainable index are introduced, and their properties are studied. In particular, it is shown that the algebraically chainable index is bounded above by $n-1$ and can equal every integer from 1 up to $n-1$.

Университет Бар-Илан,
Рамат-Ган, Израиль
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il

Поступило 1 ноября 2025 г.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр
фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Россия
E-mail: shafeev.ev@yandex.ru