Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 542, 2025 г.

А. Э. Гутерман, Д. А. Дрябин

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ПЕРМАНЕНТА ДЛЯ $(0,1)$- И $(-1,0,1)$-МАТРИЦ.

§1. Введение

Пусть $\mathbb{F}$ обозначает поле нулевой характеристики, M_n обозначает алгебру $n\times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$, $M_{k\times n}$ – пространство $k\times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Для произвольной матрицы $A\in M_{k\times n}$ будем обозначать ее элемент, находящийся на пересечении i-ой строки и j-го столбца, через a_{ij}. Обозначим i-ую строку матрицы A через a_i, рассматривая ее как вектор из $\mathbb{F}^n$. Для произвольных $\alpha\subseteq\{1,\dots,k\}$, $\beta\subseteq\{1,\dots,n\}$ через $A(\alpha|\beta)$ будем обозначать подматрицу, которая получается из A посредством удаления ее строк и столбцов с индексами из множеств α и β соответственно. В частности, если α или β является пустым множеством, мы будем явно указывать этот факт. Перманентом матрицы $A=(a_{ij})\in M_n$ называется функция

$$\operatorname{per}(A)=\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

где S_n обозначает группу перестановок на множестве $\{1,\dots,n\}$. Перманент не меняется при транспонировании и перестановках строк и столбцов матрицы. Подробное изложение теории перманентов можно найти, например, в монографиях [4, 5].

Следуя работе [3], через $\mathfrak{A}_n\subseteq M_n$ мы обозначаем подмножество $(0,1)$-матриц из M_n, таким образом, $\mathfrak{A}_n$ — это матрицы из M_n с элементами из множества $\{0,1\}\subseteq\mathbb{F}$. Также через $\mathfrak{B}_n\subseteq M_n$ мы обозначаем подмножество $(-1,0,1)$-матриц из M_n. Аналогично, через

$$\mathfrak{A}_{k\times n},\mathfrak{B}_{k\times n}\subseteq M_{k\times n}$$

мы обозначаем подмножества $(0,1)$- и $(-1,0,1)$-матриц из $M_{k\times n}$.

Заметим, что для матриц из $\mathfrak{A}_n$, как и для матриц из $\mathfrak{B}_n$, значения функции перманент являются целыми числами, и ее максимальное по модулю значение равно $n!$. Однако не все числовые значения от 0 до $n!$

Ключевые слова: перманент, $(0,1)$-матрицы, $(-1,0,1)$-матрицы.

достижимы. Например, значение перманента на $n \times n$ матрице, состоящей только из единиц, равно $n!$, в то время как если матрица из $\mathfrak{A}_n$ имеет хотя бы один нулевой элемент, то, по формуле Лапласа, ее перманент не превосходит $(n-1)(n-1)!$, и соответственно в множестве реализуемых значений есть пробел. Например, если $n > 2$, то число $n!-1$ не реализуется. Данная работа посвящена исследованию множеств реализуемых значений функции перманент на рассматриваемых классах матриц. Через $c(\mathfrak{A}_n)$ и $c(\mathfrak{B}_n)$ будем обозначать наибольшие целые числа k, такие что все значения функции перманент от 0 до k достигаются на матрицах из $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$ соответственно. Некоторые нижние оценки для значений $c(\mathfrak{A}_n)$ уже известны. Приведем ниже классическую теорему Брюальди и Ньюмана и ее недавние улучшения.

Теорема 1.1 ([3, следствие 2.2]). *Для любого натурального n имеет место неравенство*
$$c(\mathfrak{A}_n) \geqslant 2^{n-1}.$$

Теорема 1.2 ([6, теорема 4.2]). *Для любого натурального $n \geqslant 6$ справедлива оценка*
$$c(\mathfrak{A}_n) \geqslant \frac{67}{64} \cdot 2^n.$$

Теорема 1.3 ([2, теорема 1.2.23]). *Для любого натурального $n \geqslant 6$ верно неравенство*
$$c(\mathfrak{A}_n) \geqslant \frac{85}{64} \cdot 2^n.$$

В настоящей работе мы доказываем более точную нижнюю границу для наибольшего из последовательных значений для $(0,1)$-матриц и впервые получаем нижнюю границу числа последовательных значений функции перманент на множестве $(-1,0,1)$-матриц. Для этого мы применяем метод цепей схожих матриц, предложенный ранее в работе [6], см. также определение 3.1 данной работы. В частности, нами предложен метод нахождения цепей матриц данного порядка с достаточно большим количеством элементов. Используя этот метод, мы строим наиболее длинную цепь схожих матриц для $n = 6$. Последнее позволяет нам доказать, что для всех натуральных $n \geqslant 6$ справедливы следующие неравенства:
$$c(\mathfrak{A}_n) \geqslant \frac{7}{4} \cdot 2^n, \tag{1}$$

$$c(\mathfrak{B}_n) \geqslant \frac{87}{32} \cdot 2^n - 81. \tag{2}$$

Данная статья построена следующим образом. Параграф 2 содержит ряд технических результатов и полное описание множеств значений перманента на множествах $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$ для $n = 3, 4, 5$. В §3 мы исследуем метод матричных цепей и область его применения, а также вопросы, связанные с вычислительной сложностью соответствующих задач. В §4 мы предлагаем алгоритм построения цепочек схожих матриц данного порядка. Далее мы доказываем первое из приведенных выше неравенств и показываем, что это неулучшаемая оценка для данного метода. Кроме того, мы получаем первую простую оценку для $c(\mathfrak{B}_n)$. В §5 мы доказываем последнее из приведенных выше неравенств.

§2. Значения перманента для $(0,1)$- и $(-1,0,1)$-матриц небольших размеров

Начнем со следующего простого замечания.

Лемма 2.1. *Для любых натуральных n и k от 0 до $n!$ справедливо следующее равенство:*

$$|\{A \in \mathfrak{B}_n : \operatorname{per} A = k\}| = |\{A \in \mathfrak{B}_n : \operatorname{per} A = -k\}|.$$

Доказательство. Применяя разложение Лапласа, можно заметить, что для любой матрицы $A \in \mathfrak{B}_n$ изменение знаков всех элементов одной строки меняет знак ее перманента. Следовательно, изменение знаков элементов первой строки задает биекцию множеств $\{A \in \mathfrak{B}_n : \operatorname{per} A = k\}$ и $\{A \in \mathfrak{B}_n : \operatorname{per} A = -k\}$. $\square$

Предыдущая лемма дает нам возможность ограничить исследования только неотрицательными значениями перманента в случае $(-1,0,1)$-матриц.

Определение 2.2. *Будем обозначать через $P(\mathfrak{A}_n)$ и $P(\mathfrak{B}_n)$ соответственно множества неотрицательных значений, достигающихся на множествах матриц из $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$.*

Перейдем к определению множеств значений функции перманент на множествах матриц $\mathfrak{A}_n$, $n = 3, 4, 5$, и $\mathfrak{B}_n$, $n = 3, 4$, явно вычисляя перманент каждой матрицы. Мы ограничиваем наши вычисления случаем $n < 6$ для $(0,1)$-матриц и случаем $n < 5$ для $(-1,0,1)$-матриц, так как вычисления для матриц больших порядков становятся слишком сложными и требуют перебора на множествах мощностей 2^{36} и 3^{25} соответственно. Далее мы еще обсудим различные способы сужения множеств матриц, перманент которых вычисляется явно.

Заметим, что $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{B}_n$ для произвольного натурального n и, следовательно, $P(\mathfrak{A}_n) \subseteq P(\mathfrak{B}_n)$. Вычисление значений перманента показывает, что множества $P(\mathfrak{A}_n)$ и $P(\mathfrak{B}_n)$ совпадают для $n = 3, 4$. Однако уже для $n = 5$ множество $P(\mathfrak{A}_n)$ становится собственным подмножеством множества $P(\mathfrak{B}_n)$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\operatorname{per} A = 35$ и $35 \notin P(\mathfrak{A}_5)$. Следовательно, $P(\mathfrak{A}_5) \subsetneq P(\mathfrak{B}_5)$. Возникает естественный вопрос: существуют ли другие значения, отличные от 35, содержащиеся в $P(\mathfrak{B}_5) \backslash P(\mathfrak{A}_5)$? Так как $|\mathfrak{B}_5| = 3^{25}$, то непосредственная проверка всех матриц из $\mathfrak{B}_5$ становится сложной, и мы предлагаем способ сузить множество перебираемых матриц. Введем следующее определение.

Определение 2.3. *Будем говорить, что матрицы $A, B \in \mathfrak{B}_n$ являются эквивалентными и обозначать это через $A \sim B$, если матрица A может быть преобразована в матрицу B перестановкой строк и столбцов и их домножением на -1.*

Непосредственная проверка показывает, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathfrak{B}_n$. Так как преобразования из определения отношения эквивалентности сохраняют модуль перманента, то для нахождения $P(\mathfrak{B}_n)$ достаточно рассмотреть хотя бы по одному представителю для каждого из классов эквивалентности. Наша дальнейшая цель состоит в построении алгоритма, уменьшающего число перебираемых матриц на основе приведенного свойства. Для начала нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.4. *Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{B}_n$ существует матрица $A' \in \mathfrak{B}_n$ такая, что $A \sim A'$ и матрица A' удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *первая строка матрицы A' является неотрицательной и неубывающей;*
(2) *число нулей в строках матрицы A' не убывает с ростом индекса строки;*
(3) *в каждой строке матрицы A' число единиц больше или равно числу минус единиц.*

Доказательство. Получим матрицу A', преобразуя матрицу A за следующие четыре шага:

(1) используя перестановки строк, отсортируем все строки нашей матрицы таким образом, что строки итоговой матрицы будут расположены в порядке неубывания количества нулей от первой строки A до последней;
(2) домножим на -1 столбцы с отрицательными элементами в первой строке для того, чтобы в первой строке матрицы A исчезли отрицательные элементы;
(3) переставим столбцы таким образом, чтобы элементы первой строки A были расположены в порядке неубывания;
(4) домножим на -1 все строки матрицы A, кроме первой, у которых число минус единиц больше, чем число единиц.

Так как каждый из шагов сохраняет свойства матриц, полученные на предыдущих шагах, матрица A' удовлетворяет всем условиям, упомянутым в формулировке леммы. □

Определение 2.5. *Будем называть матрицу $A \in \mathfrak{B}_n$ упрощенной, если она имеет вид, описанный в лемме 2.4. Множество всех упрощенных матриц из $\mathfrak{B}_n$ будем обозначать через $\mathcal{S}\mathfrak{B}_n$.*

Из леммы 2.4 следует, что, не теряя общности, можно вычислять значения перманента только для матриц из $\mathcal{S}\mathfrak{B}_n$. Следовательно, достаточно построить алгоритм, порождающий эти матрицы, и работать с матрицами другого вида нет необходимости. Опишем указанный алгоритм.

Алгоритм 2.6. Для набора $a = (a^1, \ldots, a^m)$ через $|a|_x$ мы будем обозначать число элементов вектора a, равных x. Наш алгоритм работает следующим образом:

input n
$K_n := \{(k_1, \ldots, k_n) : 0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_n \leqslant n\}$
for $k \in \{0, \ldots, n\}$ **do**
  $R_k^n := \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |a|_0 = k, |a|_1 \geqslant |a|_{-1}\}$
$P := \varnothing$
for $(k_1, \ldots, k_n) \in K_n$ **do**
  $r_1 := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k_1}) \in R_{k_1}^n$
  for $r_2 \in R_{k_2}^n, \ldots, r_n \in R_{k_n}^n$ **do**
    $A := \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$
    $P := P \cup \{\operatorname{per} A\}$
output P

Обсудим работу указанного алгоритма.

Предложение 2.7. *Множество матриц, полученных в процессе выполнения алгоритма* 2.6 *со значением n на входе, совпадает с множеством $\mathcal{S}\mathfrak{B}_n$.*

Доказательство. Множество K_n является множеством последовательностей, используемых для обозначения числа нулей в каждой строке упрощенной матрицы. Множества $R_0^n, \ldots, R_n^n$ являются соответственно множествами строк с элементами $\{-1, 0, 1\}^n$, имеющими в точности $0, \ldots, n$ нулей и не больше минус единиц, чем единиц. Заметим, что произвольная матрица A из $\mathcal{S}\mathfrak{B}_n$ биективно соответствует набору $k = (k_1, \ldots, k_n) \in K_n$, состоящему из количеств нулей в строках A и набору ее строк $(r_{k_1}, \ldots, r_{k_n}) \in R_{k_1}^n \times \cdots \times R_{k_n}^n$, где r_{k_1} имеет вид $(0, \ldots, 0, 1 \ldots, 1)$. □

Следствие 2.8. *Алгоритм* 2.6 *со значением n на входе выдает множество $P(\mathfrak{B}_n)$.*

Доказательство. Следует непосредственно из леммы 2.4 и утверждения 2.7. □

Замечание 2.9. Непосредственно вычисляемые верхние границы для величин $|K_n|$ и $|\mathcal{S}\mathfrak{B}_n|$ позволяют заключить, что предложенный алгоритм более эффективен, чем просто полный перебор.

На основе рассматриваемого алгоритма был проведен численный эксперимент и было установлено, что $P(\mathfrak{B}_5)\backslash P(\mathfrak{A}_5) = \{27, 35\}$ и числовое значение 27 достигается на матрице

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множества $P(\mathfrak{A}_n)$ и $P(\mathfrak{B}_n)$ для $n = 3, 4, 5$ приведены в приложении. Заметим, что все эти множества содержат достаточно большие отрезки последовательных значений, начинающихся с 0. В следующем параграфе мы исследуем вопрос, насколько велики эти значения.

§3. Похожие матрицы и цепочки

В этом параграфе мы развиваем метод для получения нижней границы значений $c(\mathfrak{B}_n)$, предложенный в [6], и улучшаем известные ранее нижние оценки для $c(\mathfrak{A}_n)$.

Начнем с важной модификации рассматривавшегося ранее определения, см. [6, определение 2.1].

Определение 3.1. *Будем называть матрицы $A, B \in M_{n\times k}$ схожими (или, что эквивалентно, будем говорить, что одна из этих матриц похожа на другую), если они отличаются только одной строкой.*

Заметим, что для упрощения доказательств рассматриваемое определение отличается от оригинального. Здесь мы требуем, чтобы исходные матрицы отличались лишь в одной строке, в то время как в оригинальном определении допускалось, чтобы схожие матрицы отличались одной строкой с точностью до перестановок строк и столбцов. Данная модификация определения позволяет как упростить доказательства, так и получить новые, более сильные оценки.

Лемма 3.2 (также см. [6, лемма 2.3])**.** *Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}_n$ – пара схожих матриц. Тогда существуют матрицы $B, C, D \in \mathfrak{B}_{n+1}$ такие, что C одновременно схожа с матрицами B и D и справедливы* *следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \operatorname{per} B &= 2 \operatorname{per} A_1, \\ \operatorname{per} C &= \operatorname{per} A_1 + \operatorname{per} A_2, \\ \operatorname{per} D &= 2 \operatorname{per} A_2. \end{aligned}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что A_1 и A_2 различаются только последними строками и, следовательно, имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a'_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще три матрицы из $\mathfrak{B}_n$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} \\ 1 & a_n \\ 1 & a_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} \\ 1 & a_n \\ 1 & a'_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} \\ 1 & a'_n \\ 1 & a'_n \end{pmatrix}.$$

Матрица C схожа с обеими матрицами B и D; более того, с учетом разложения Лапласа значения перманента для матриц B, C и D соответственно равны $2 \operatorname{per} A_1$, $\operatorname{per} A_1 + \operatorname{per} A_2$ и $2 \operatorname{per} A_2$. □

Заметим, что если обе матрицы A_1 и A_2 принадлежат множеству $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{B}_n$, то матрицы B, C, D принадлежат множеству $\mathfrak{A}_{n+1}$. В этом случае наша лемма совпадает с [6, леммой 2.3].

Определение 3.3 (также см. [6, определение 3.4]). *Будем называть набор $(A_1, \dots, A_m)$ матриц из M_n цепочкой, если $\operatorname{per} A_1 = 0$ и для каждого целого $i \in [1,\, m-1]$ справедливо одно из следующих условий:*

(1) $\operatorname{per} A_{i+1} = \operatorname{per} A_i$;

(2) $\operatorname{per} A_{i+1} = \operatorname{per} A_i + 1$ *и матрицы A_i, A_{i+1} схожи.*

Будем говорить, что $\operatorname{per} A_m$ — это значение цепочки, а размер матриц в цепочке будем называть порядком цепочки.

Заметим, что существование цепочки $(B_1, \dots, B_m)$ матриц из $\mathfrak{B}_n$ позволяет заключить, что $c(\mathfrak{B}_n) \geqslant \operatorname{per} B_m$. Это соображение используется в следующей теореме.

Теорема 3.4 (также см. [6, следствие 2.5])**.** *Пусть n – положительное целое число и $(B_1, \dots, B_m)$ — цепочка матриц из $\mathfrak{B}_n$, такая что* $\operatorname{per} B_m = b$*. Тогда для всех неотрицательных целых чисел k справедливо условие*

$$c(\mathfrak{B}_{n+k}) \geqslant b \cdot 2^k.$$

Доказательство. По определению, существование цепочки позволяет заключить, что для любого целого числа m, $0 \leqslant m \leqslant b-1$, существует пара схожих матриц из $\mathfrak{B}_n$ со значениями перманента, равными m и $m+1$. Тогда, по лемме 3.2, для любого целого числа m', $0 \leqslant m' \leqslant 2b-1$, мы построим пару схожих матриц из $\mathfrak{B}_{n+1}$ со значениями перманента m' и $m'+1$. Повторяя данный процесс k раз для произвольного натурального k, мы получим требуемый результат. □

Заметим, что если все матрицы цепочки принадлежат $\mathfrak{A}_n$, то аналогичное неравенство справедливо для $c(\mathfrak{A}_{n+k})$, и в этом случае утверждение теоремы совпадает с утверждением [6, следствия 2.5], сформулированным ниже.

Теорема 3.5 ([6, следствие 2.5])**.** *Пусть n – положительное целое число и $(A_1, \dots, A_m)$ – такая цепочка матриц из $\mathfrak{A}_n$, что* $\operatorname{per} A_m = a$*. Тогда для всех неотрицательных целых чисел k справедливо неравенство*

$$c(\mathfrak{A}_{n+k}) \geqslant a \cdot 2^k.$$

Предложим метод построения матричных цепочек.

Определение 3.6. *Пусть A – матрица из $M_{(n-1)\times n}$. Через* $\operatorname{per}_i A$ *обозначим перманент* $\operatorname{per} A\big(\varnothing|\{i\}\big)$ *квадратной матрицы, полученной из A удалением i-го столбца. Назовем* $\operatorname{per}_i A$ *i-ым подперманентом матрицы A.*

Лемма 3.7. *Пусть матрица A принадлежит $\mathfrak{B}_{(n-1)\times n}$. Рассмотрим строки $r_1, \dots, r_k \in \mathfrak{B}_{1\times n}$. Через $B_i \in M_n$ обозначим матрицу, полученную присоединением к матрице A строки r_i снизу, $i = 1, \dots, k$. Если перманенты этих матриц равны $0, \dots, k-1$, то эти матрицы образуют цепочку.*

Доказательство. Все матрицы $B_1, \dots, B_k$ различаются последними строками, и их перманенты являются последовательными целыми значениями от 0 до $k-1$. Следовательно, они удовлетворяют определению цепочки. □

Замечание 3.8. Перманент любой из матриц $B_1, \ldots, B_k$ соответствует линейной комбинации подперманентов матрицы A с коэффициентами из множества $\{-1, 0, 1\}$. Более того, если матрица A принадлежит $\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$ и $r_1, \ldots, r_k$ принадлежат $\mathfrak{A}_{1\times n}$, то все матрицы в полученной цепочке принадлежат $\mathfrak{A}_n$.

§4. Получение последовательных значений перманента при помощи цепочек

Заметим, что применение теоремы 3.5 к цепочке матриц $((0), (1))$ из $\mathfrak{A}_1$ дает теорему 1.1. В самом деле, эта цепочка имеет значение 1. Следовательно, для произвольного неотрицательного целого числа k справедливо неравенство $c(\mathfrak{A}_{k+1}) \geqslant 2^k$.

Используя идеи из предыдущего параграфа, построим алгоритм нахождения цепочек данного порядка с достаточно большим значением. Это позволит нам улучшить нижние границы для числа $c(\mathfrak{A}_n)$ и получить оценки для $c(\mathfrak{B}_n)$. Начнем сужать класс матриц, нужный нам для исследования.

Определение 4.1. *Аналогично определению* 2.5, *через* $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{k\times n}$ *обозначим множество матриц из* $\mathfrak{A}_{k\times n}$, *у которых элементы первой строки образуют неубывающую последовательность, а количества нулей не убывают, начиная с первой строки вплоть до последней.*

Лемма 4.2. *Предположим, что для некоторого натурального n существует цепочка матриц $(A_1, \ldots, A_m)$ из $\mathfrak{A}_n$ такая, что* $\operatorname{per} A_m = a$. *Тогда существует цепочка $(B_1, \ldots, B_l)$ матриц из $\mathfrak{A}_n$ такая, что* $\operatorname{per} B_l = a$ *и*

$$B_i(\{n\}|\varnothing) \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$$

для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по a. База индукции $a = 0$. По определению, $\operatorname{per} A_1 = \ldots = \operatorname{per} A_m = 0$. Таким образом, положив $l := 1$ и $B_1 := A_1$, мы получим требуемое утверждение с точностью до возможных перестановок строк и столбцов.

Докажем шаг индукции. Пусть k — единственное целое число от 1 до m, такое что $\operatorname{per} A_k = a - 1$ и $\operatorname{per} A_{k+1} = \cdots = \operatorname{per} A_m = a$. Используем предположение индукции для цепочки $(A_1, \ldots, A_k)$ и получим цепочку $(B_1, \ldots, B_s)$ со значением $a-1$. Продолжим расширять цепочку, предполагая без ограничения общности, что A_k и A_{k+1} различаются лишь в последней строке. Будем одновременно переставлять первые $n-1$ строк матриц A_k и A_{k+1} таким образом, чтобы число нулей в строках с первой и до последней не убывало. Далее при помощи перестановки столбцов сделаем их первую строку неубывающей. Пусть A'_k и A'_{k+1} – полученные матрицы. Нами использовались одинаковые перестановки и $A_k(\{n\}|\varnothing) = A_{k+1}(\{n\}|\varnothing)$, следовательно,

$$A'_k(\{n\}|\varnothing) = A'_{k+1}(\{n\}|\varnothing) \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}.$$

Получаем требуемую цепочку $(B_1, \dots, B_s, A'_k, A'_{k+1})$. □

Определение 4.3. *Для каждой матрицы $A \in \mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$ через $p(A)$ обозначим множество нетривиальных целочисленных отрезков (целочисленных отрезков, содержащих по крайней мере два значения) в множестве значений перманентов, полученных из A добавлением строки из $\mathfrak{A}_{1\times n}$.*

Определение 4.3 имеет эквивалентную переформулировку, которую мы сейчас обоснуем.

Предложение 4.4. *Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$ множество $p(A)$ является множеством нетривиальных целочисленных числовых отрезков, которые могут быть получены как линейная комбинация подперманентов матрицы A с коэффициентами из множества $\{0, 1\}$.*

Доказательство. Множество всех значений перманентов матриц, полученных из A добавлением строки из $\mathfrak{A}_{1\times n}$, совпадает с множеством всех линейных комбинаций подперманентов матрицы A с коэффициентами из $\{0, 1\}$, что следует из разложения Лапласа. □

Для доказательства формулы (1) положим $n = 6$ и построим цепочку со значением равным 112, имеющую порядок 6. Сперва воспользуемся следующим алгоритмом (подобным алгоритму 2.6) для перебора всех матриц из множества $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$.

Алгоритм 4.5.

input n

$K_n := \{(k_1, \ldots, k_{n-1}) : 0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_{n-1} \leqslant n\}$

for $k \in \{0, \ldots, n\}$ **do**

  $R_k^n := \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n : |a|_0 = k\}$

for $(k_1, \ldots, k_{n-1}) \in K_n$ **do**

  $r_1 := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k_1}) \in R_{k_1}^n$

  for $r_2 \in R_{k_2}^n, \ldots, r_{n-1} \in R_{k_{n-1}}^n$ **do**

    $A := \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$

output A

Доказательство того факта, что алгоритм 4.5, имеющий на входе число n, выдает в точности множество $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$, полностью аналогично доказательству утверждения 2.7. Применим данный алгоритм для частного случая n=6.

После генерации множества $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$ для матрицы A из $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$ мы вычисляем ее подперманенты. Для вычисления $p(A)$ будем использовать эквивалентное определение из утверждения 4.4. Наша цель состоит в построении цепочки матриц, имеющей наибольшее значение. С этой целью мы вводим следующую конструкцию.

Определение 4.6. *Для произвольных целых чисел α, β, где $\alpha < \beta$, через $\overline{\alpha, \beta}$ будем обозначать целочисленный отрезок $[\alpha, \beta] \cap \mathbb{Z}$. Через G_n будем обозначать граф с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n!\}$ и множеством ребер*

$$E = \left\{ \{a, b\} \in \binom{V}{2} : \exists A \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n} : \exists \overline{\alpha, \beta} \in p(A) : a, b \in \overline{\alpha, \beta} \right\}.$$

В графе G_n числа $a, b \in \{0, 1, \ldots, n!\}$, $a \neq b$, соединены ребром в том и только том случае, когда все значения от a до b могут быть реализованы как значения перманентов матриц из $\mathfrak{A}_n$, которые имеют одинаковую подматрицу $A \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$.

Так как мы вычисляем $p(A)$ для каждой матрицы $A \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$, мы можем построить граф G_6. Следующая лемма дает одно из применений данной конструкции.

Лемма 4.7. *Для произвольного натурального n и $k \leqslant n!$ путь от 0 до k в G_n существует тогда и только тогда, когда существует цепочка матриц из $\mathfrak{A}_n$ такая, что для последней матрицы в этой цепочки значение перманента равно k.*

Доказательство. По определению G_n, существование пути из 0 в k равносильно существованию множества

$$\{\overline{\alpha_i, \beta_i} \in p(A_i) : A_i \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}\}_{i=1}^{l}$$

пересекающихся отрезков, которые покрывают все целые числа от нуля до k. Для любого целого i, $i \in [1,l]$, отрезок $\overline{\alpha_i, \beta_i}$ соответствует множеству схожих матриц со значениями перманента $\overline{\alpha_i, \beta_i}$, и первые $n-1$ строк задают матрицу $A_i \in \mathcal{S}\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$. Тогда, по лемме 4.2, существование данного множества отрезков равносильно существованию цепочки матриц из $\mathfrak{A}_n$ с последним значением перманента, равным k. □

Построим граф G_6 и пройдем его для нахождения наибольшего числа, достижимого из нуля. По лемме 4.7, это число равно наибольшему значению цепочки матриц из $\mathfrak{A}_6$. В результате прохождения графа получаем, что наибольшее число, достижимое из нуля, равно 112. В качестве следствия получаем следующий результат.

Теорема 4.8. *Для любого натурального $n \geqslant 6$ справедливо неравенство*

$$c(\mathfrak{A}_n) \geqslant \frac{7}{4} \cdot 2^n.$$

Доказательство. Процесс, описанный выше, позволяет получить результат, утверждающий существование цепочки матриц из $\mathfrak{A}_6$ со значением 112. Перечень матриц из $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$, которые были использованы при построении цепочки, представлен в приложении. Тогда, по теореме 3.5, для всех неотрицательных целых чисел k справедливо неравенство

$$c(\mathfrak{A}_{6+k}) \geqslant 112 \cdot 2^k = \frac{7}{4} \cdot 2^{6+k}.$$

Полученное неравенство равносильно утверждению теоремы. □

Приведенный выше результат является наилучшим возможным результатом, который можно получить с использованием цепочек порядка 6. Заметим также, что на самом деле возможно получить и лучшие нижние оценки, если строить цепочки порядка, превосходящего 6. Однако такое построение требует перебора еще большего количества матриц. Например, для получения данного результата с использованием цепочек порядка 7 необходимо рассмотреть вдвое больше матриц, 224, а для улучшения результата потребуется еще больше матриц.

Аналогичный метод можно использовать для получения нижней оценки для $c(\mathfrak{B}_n)$. Множество $\mathcal{S}\mathfrak{B}_{5\times 6}$ определяется аналогично, но это множество содержит слишком много матриц, требующихся для работы алгоритма. Поэтому мы применим алгоритм, аналогичный алгоритму 4.5, к тому же множеству матриц $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$, но с тем отличием, что коэффициенты подперманентов принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$.

Так как множество $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$ не содержит матриц с неотрицательными коэффициентами, то нет гарантии, что мы найдем цепочку матриц из $\mathfrak{B}_6$ с наибольшим возможным значением. Однако для $(-1,0,1)$-матриц возможно достичь лучшего результата, недостижимого в $(0,1)$-случае. В этом случае, наибольшее число, достижимое от нуля, равно 132, что позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 4.9. *Для произвольного натурального* $n \geqslant 6$ *справедливо следующее неравенство:*

$$c(\mathfrak{B}_n) \geqslant \frac{33}{16} \cdot 2^n.$$

Доказательство. По аналогии с теоремой 4.8, мы получаем цепочку матриц из $\mathfrak{B}_6$, имеющую значение 132. Перечень матриц из $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$, использованных для построения данной цепочки, приводится в приложении ниже. По теореме 3.4, для всех неотрицательных целых чисел k справедливо неравенство

$$c(\mathfrak{B}_{6+k}) \geqslant 132 \cdot 2^k = \frac{33}{16} \cdot 2^{6+k},$$

равносильное утверждению теоремы. □

Можно заметить, что в этом случае построение цепочки с большим значением потребует меньше различных матриц из $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$ и, более того, первая матрица позволяет реализовать значения от 0 до 93, в то время как для $(0, 1)$-матриц первая матрица позволяет получить значения от 0 до 32. Исследуем данное явление более детально.

§5. Построение последовательных значений перманента при помощи $(n-1)\times n$ матриц

Определение 5.1. *Для произвольной матрицы A из множества $\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$ через $g(A)$ обозначим наибольшее неотрицательное целое k такое, что значения перманента от 0 до k могут быть реализованы при помощи матрицы A как линейные комбинации ее подперманентов с коэффициентами из $\{0,1\}$. Через $g(\mathfrak{A}_n)$ обозначим значение $\max\{g(A) : A \in \mathfrak{A}_{(n-1)\times n}\}$. Определим $g(B)$ для матрицы $B \in \mathfrak{B}_{(n-1)\times n}$ и $g(\mathfrak{B}_n)$ аналогичным образом.*

Через $c(\mathfrak{A}_n)$ и $c(\mathfrak{B}_n)$ будем соответственно обозначать наибольшие целые числа k такие, что все значения перманента от 0 до k являются достижимыми на матрицах из $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$. Начнем с ряда простых наблюдений.

Лемма 5.2. *Для произвольного натурального n справедливы неравенства*

$$c(\mathfrak{A}_n) \geqslant g(\mathfrak{A}_n), \quad c(\mathfrak{B}_n) \geqslant g(\mathfrak{B}_n).$$

Доказательство. Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$ значение $g(A)$ соответствует цепочке матриц, полученной из A добавлением различных строк из $\mathfrak{A}_{1\times n}$. Отсюда следует неравенство $c(\mathfrak{A}_n) \geqslant g(\mathfrak{A}_n)$. Второе рассматриваемое неравенство получается аналогично. □

Наша цель доказать, что $g(\mathfrak{A}_n) = 2^{n-1}$ для $n > 1$. Последнее означает, что имеющаяся нижняя оценка для $c(\mathfrak{A}_n)$ не может быть улучшена при помощи конструкции, включающей линейные комбинации подперманентов одной $(n-1)\times n$ матрицы. Приведем существенное улучшение нижней оценки для $c(\mathfrak{B}_n)$, полученной в §4, при помощи этой конструкции. Сформулируем сперва следующий вспомогательный результат.

Теорема 5.3 ([7, теорема 1])**.** *Перманент матрицы $A \in \mathfrak{A}_n$ равен 1 тогда и только тогда, когда A может быть преобразована в верхнюю треугольную матрицу с единицами на главной диагонали при помощи перестановок строк и столбцов.*

Интересное доказательство данного критерия при помощи теории графов и критерии того, что значение перманента равно 2 или 3, содержатся в [7]. Применим эту теорему для доказательства результата, позволяющего установить границы для возможности реализации значений перманента при помощи единственной $(n-1)\times n$ матрицы в $(0,1)$-случае.

Теорема 5.4. *Для произвольного целого числа $n \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$g(\mathfrak{A}_n) = 2^{n-1}.$$

Доказательство. Докажем сперва, что $g(\mathfrak{A}_n) \geqslant 2^{n-1}$. Для этого рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}_{(n-1)\times n}.$$

Заметим, что $\operatorname{per}_1 A = \operatorname{per}_2 A = 1$. Более того, непосредственная проверка позволяет установить, что для любого целого $i \in \{2,\dots,n-1\}$ справедливо равенство $\operatorname{per}_{i+1} A = 2\operatorname{per}_i A$, так как соответствующие подматрицы матрицы A отличаются только в одном элементе. Последнее удваивает число диагоналей, не содержащих нули. Следовательно, подперманенты матрицы A равны $1,1,2,4,\dots,2^{n-2}$, и их сумма равна 2^{n-1}. Пусть p обозначает произвольное целое число от 0 до $2^{n-1}-1$, имеющее бинарное представление $\overline{p_{n-2}\dots p_0}$. Тогда линейная комбинация подперманентов матрицы A с коэффициентами $0, p_0, \dots, p_{n-2}$ дает в точности p. Таким образом, можно заключить, что $g(A) = 2^{n-1}$.

Предположим, что существует матрица B из множества $\mathfrak{A}_{(n-1)\times n}$ такая, что $g(B) > 2^{n-1}$. Так как существует линейная комбинация ее подперманентов с коэффициентами из множества $\{0,1\}$, равная 1, то, по крайней мере, один из ее подперманентов должен быть равен 1. Без ограничения общности можно предположить, что первые $n-1$ столбцов матрицы B образуют верхне-треугольную матрицу с единицами на главной диагонали. Следовательно, матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 1 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

Так как значение перманента $(0,1)$-матрицы не убывает, когда один из ее элементов меняется с нуля на единицу, то, по аналогии с предыдущим результатом, мы получаем, что подперманенты матрицы B с индексами $1,\dots,n-2,n-1,n$ соответственно не превосходят 2^{n-2}, $\dots,2,1,1$. Следовательно, $g(B)\leqslant 2^{n-1}$, что противоречит исходному предположению. □

Заметим, что конструкция из первой части теоремы 5.4 восходит к работе [3], и мы показываем, что более точная верхняя оценка для $c(\mathfrak{A}_n)$ не может быть получена подобной конструкцией. Перейдем к рассмотрению $(-1,0,1)$-матриц и предложим другую конструкцию для получения более точной нижней границы для $c(\mathfrak{B}_n)$.

Теорема 5.5. *Пусть* $B\in\mathfrak{B}_{(n-1)\times n}$, *так что* $g(B)=a$ *и* $\sum_{i=1}^{n}\operatorname{per}_i B = s\leqslant 2a$. *Тогда для всех неотрицательных целых чисел* k *справедливо неравенство*

$$g(\mathfrak{B}_{n+k})\geqslant s\cdot 2^k - s + a.$$

Доказательство. При помощи метода математической индукции построим такую последовательность матриц $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$, что $B_0=B$ и для любого натурального k матрица B_k из $\mathfrak{B}_{(n+k-1)\times(n+k)}$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n+k}\operatorname{per}_i B_k = s\cdot 2^k,\quad g(B_k)\geqslant s\cdot 2^k - s + a.$$

Пусть для некоторого неотрицательного целого числа k матрица B_k уже построена. Рассмотрим следующую матрицу

$$B_{k+1}=\begin{pmatrix} B_k & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Проверим, что B_{k+1} удовлетворяет требуемым условиям. Согласно формуле разложения Лапласа, для любого целого числа $\in[1,\dots,n]$ от 1 до $n+k$ имеем $\operatorname{per}_i B_{k+1}=\operatorname{per}_i B_k$ и $\operatorname{per}_{n+k+1} B_{k+1} = s\cdot 2^k$. Применяя предположение индукции, получаем, что $\sum_{i=1}^{n+k+1}\operatorname{per}_i B_{k+1} = \sum_{i=1}^{n+k}\operatorname{per}_i B_k + \operatorname{per}_{n+k+1} B_{k+1} = s\cdot 2^{k+1}$. Так как все значения от 0 до $g(B_k)$ достижимы как линейные комбинации подперманентов матрицы B_k с коэффициентами из множества $\{-1,0,1\}$, то B_{k+1} реализует все значения от 0 до $g(B_k)$ и от $\operatorname{per}_{n+k+1} B_{k+1} - g(B_k)$ до

$\mathrm{per}_{n+k+1} B_{k+1} + g(B_k)$. Эти отрезки пересекаются, так как, по предположению индукции, имеем

$$2g(B_k) \geqslant s \cdot 2^{k+1} - 2s + 2a \geqslant s \cdot 2^k = \mathrm{per}_{n+k+1} B_{k+1}.$$

Таким образом,

$$g(B_{k+1}) \geqslant \mathrm{per}_{n+k+1} B_{k+1} + g(B_k) \geqslant s \cdot 2^{k+1} - s + a.$$

Требуемая последовательность $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ построена, и теорема доказана. □

Применяя данную теорему к матрице, которую мы уже рассматривали в §4, мы получаем следующий результат.

Теорема 5.6. *Для произвольного целого числа $n \geqslant 6$ справедливо неравенство*

$$g(\mathfrak{B}_n) \geqslant \frac{87}{32} \cdot 2^n - 81.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как было установлено в §4, $g(B) = 93$. Так как $\sum_{i=1}^{6} \mathrm{per}_i B = 174$, то применима теорема 5.5, и мы получаем, что для произвольного неотрицательного целого числа k справедливо неравенство

$$g(B_{k+6}) \geqslant 174 \cdot 2^k - 81 = \frac{87}{32} \cdot 2^{k+6} - 81,$$

что равносильно утверждению теоремы. □

Следствие 5.7. *Для произвольного целого числа $n \geqslant 6$ справедливо неравенство*

$$c(\mathfrak{B}_n) \geqslant \frac{87}{32} \cdot 2^n - 81.$$

Приложение: Алгоритмы и примеры

Ниже мы приводим дополнительные технические вычисления, актуальные для предыдущих параграфов.

§2: множество значений функции перманента. Ниже мы приводим множества значений функции перманента, которые реализуются на множествах $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$, $n = 3, 4, 5$:

$$P(\mathfrak{A}_3) = P(\mathfrak{B}_3) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\},$$
$$P(\mathfrak{A}_4) = P(\mathfrak{B}_4) = \overline{0, 12} \cup \{14, 18, 24\},$$
$$P(\mathfrak{B}_5) = \overline{0, 36} \cup \{38, 39, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 53, 54, 60, 64, 72, 78, 96, 120\},$$
$$P(\mathfrak{A}_5) = P(\mathfrak{B}_5) \setminus \{27, 35\}.$$

§4: $(0, 1)$-матрицы, образующие цепочки. Будем обозначать через $A_{m,k}$ матрицу из $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$ такую, что последовательные значения функции перманента, начиная с m и до k, могут быть получены из $A_{m,k}$ как линейные комбинации ее подперманентов с коэффициентами из множества $\{0, 1\}$. Ниже мы приводим множество матриц, используемых для построения цепочки, требуемой в теореме 4.8:

$$A_{0,32} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_{18,58} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$A_{58,69} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad A_{69,78} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&1 \end{pmatrix},$$

$$A_{78,89} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad A_{89,90} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$A_{90,94} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}, \quad A_{94,97} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&1 \end{pmatrix},$$

$$A_{97,101} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad A_{101,104} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$A_{104,110} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{111,112} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§5. Через $B_{m,k}$ будем обозначать матрицу из множества $\mathcal{S}\mathfrak{A}_{5\times 6}$ такую, что последовательные значения перманента, начиная с m и до k, могут быть получены из $A_{m,k}$ как линейные комбинации подперманентов с коэффициентами из множества $\{-1,0,1\}$. Ниже мы приводим множество матриц, которые использовались для построения цепочки матриц, демонстрирующей справедливость теоремы 4.9:

$$B_{0,93} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{89,101} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{96,104} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{103,113} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{112,114} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{114,116} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{116,124} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{124,126} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{126,130} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{130,132} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Авторы глубоко благодарны Асели Ильясовне Латыповой за ценные комментарии к тексту работы.

Список литературы

1. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин, *О делимости перманента* (± 1)-*матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 26–37.
2. К. А. Таранин, *Значения функции перманента* $(0,1)$-*матриц и* (± 1)-*матриц.* — Дисс. к.ф.-м.н. МГУ имени М. В. Ломоносова (2022) `https://istina.msu.ru/dissertations/450303893/`.
3. R. A. Brualdi, M. Newman, *Some theorems on permanent.* — J. Res. Nat. Bur. Stand. Sec. B. **69B**, No. 3 (1965), 159–163.
4. R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory.* — Encycl. Math. Appl. **39** (1991).
5. H. Minc, *Permanents.* — Encycl. Math. Appl. **6** (1984).
6. A. E. Guterman, K. A. Taranin, *On the values of the permanent of* $(0,1)$-*matrices.* — Linear Algebra Appl. **552** (2018), 256–276.
7. B. Gordon, T. S. Motzkin, L. Welch, *Permanents of* $(0,1)$-*matrices.* — J. Comb. Theory. Ser. A **17** (1974), 145–155.
8. M. V. Budrevich, A. E. Guterman, *Kräuter conjecture on permanents is true.* — J. Comb. Theory. Ser. A **162** (2019), 306–343.
9. A. R. Kräuter, N. Seifter, *Some properties of the permanent of* $(1,-1)$-*matrices.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 207–223.

Guterman A. E., Dryabin D. A. Values of the permanent function on $(0,1)$- and $(-1,0,1)$-matrices.

In this paper, the ranges of the permanent function on the sets of $(0,1)$- and $(-1,0,1)$-matrices are discussed. A lower bound for the first non-realizable value of the permanent on the set of $(-1,0,1)$-matrices is obtained, and the bound for the $(0,1)$-matrices is improved.

Университет Бар-Илан,
Рамат-Ган, 5290002, Израиль
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il

Поступило 4 ноября 2025 г.

Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, 141701, Россия;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики,
Москва, 119991, Россия
E-mail: daniild71r@gmail.com