Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 542, 2025 г.

Т. А. Асмус, А. Э. Гутерман

О ДЕЛИМОСТИ ПЕРМАНЕНТА МНОГОМЕРНЫХ $(-1,1)$-МАТРИЦ НА СТЕПЕНИ ЧИСЛА 2

§1. Введение

Пусть A – $n\times n$ матрица. Тогда перманент матрицы A определяется по формуле

$$\operatorname{per}(A)=\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)},$$

где S_n – симметрическая группа порядка n.

Перманент имеет разнообразные приложения. Его применяют в комбинаторике, теории вероятностей, машинном обучении, физике и в других дисциплинах, см. [4,6,7,11,16]. Подробное изложение теории перманентов может быть найдено в ряде классических мнографий, см., например, книгу Минка [5].

Относительно недавно было начато активное исследование многомерных перманентов. В обзоре [10] излагается общая теория многомерных перманентов и показана их связь с рядом комбинаторных объектов, см. также монографии [8,9,14] и цитируемую в них литературу. В работах [3,13] исследуются реализуемые значения функции перманент на множестве многомерных $(0,1)$-матриц. Другим значимым классом матриц является класс $(-1,1)$-матриц. Эти матрицы используют в теории кодирования, экономике и многих других приложениях, см. [12]. В этом множестве содержится важный подкласс матриц Адамара, т.е. таких $(-1,1)$-матриц H порядка n, что $HH^T=H^TH=nE_n$, где X^T обозначает матрицу, транспонированную к X, а через E_n обозначена единичная матрица. Открытой проблемой является задача доказательства того, что перманент на множестве этих матриц отличен от нуля. Одним из эффективных способов показать, что перманент не нулевой – доказать, что его значение не делится на некоторую степень двойки, в отличие от нуля, который делится на любую степень двойки. Ранее этот вопрос исследовался для двумерных $(-1,1)$-матриц. Так

Ключевые слова: перманент, многомерные матрицы, $(-1,1)$-матрицы.

в статье [1] был предложен новый метод для вычисления перманента $(-1,1)$-матрицы и на его основе были доказаны оценки делимости перманентов $(-1,1)$-матриц на степени числа 2.

В настоящей работе исследуется делимость перманентов многомерных $(-1,1)$-матриц на степени числа 2. В работе получена новая формула для вычисления перманентов многомерных $(-1,1)$-матриц, обобщающая соответствующую формулу из работы [1, лемма 2.3]; при помощи полученной формулы доказана оценка делимости перманентов многомерных $(-1,1)$-матриц на степени числа 2.

Настоящая работа построена следующим образом. В первом параграфе вводится понятие многомерной матрицы и дано определение перманента многомерной матрицы; во втором параграфе получена формула, позволяющая исследовать делимость перманентов на степени числа 2. В третьем параграфе найдена максимальная степень двойки, на которую делится каждое значение перманентов многомерных $(-1,1)$-матриц. В заключительном параграфе исследуются другие свойства делимости перманентов многомерных $(-1,1)$-матриц.

§2. Перманент многомерной матрицы

Определим многомерную матрицу следующим образом.

Определение 2.1. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. k-мерной матрицей порядка n называется массив чисел $(a_I)_{I \in I_n^k}$, где $a_I \in \mathbb{R}$ и*

$$I_n^k = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \mid \alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

– множество индексов.

Можно заметить, что при $k = 2$ каждый индекс состоит из двух компонент, и получаются обычные квадратные матрицы.

Множество k-мерных матриц порядка n будем обозначать через $\boldsymbol{M}(n,k)$. Множество k-мерных матриц порядка n с элементами, равными 1 или -1, будем обозначать через $\Omega(n,k)$.

Определим диагональ многомерной матрицы.

Определение 2.2. *Пусть $A \in \boldsymbol{M}(n,k)$. Обозначим через $D(A)$ множество всех диагоналей матрицы A, т.е.*

$$D(A) = \{\{I_1, I_2, \dots, I_n\}, I_i \in I_n^k \mid \forall i \neq j, \rho(I_i, I_j) = k\},$$

где ρ – расстояние Хэмминга (число позиций, в которых два вектора различаются).

Пример 2.3. *Пусть* $A \in \boldsymbol{M}(2,3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{(1,1,1)} & a_{(1,1,2)} & \vdots & a_{(2,1,1)} & a_{(2,1,2)} \\ a_{(1,2,1)} & a_{(1,2,2)} & \vdots & a_{(2,2,1)} & a_{(2,2,2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда множество всех диагоналей матрицы A будет иметь вид

$$D(A) = \{\{(1,1,1),(2,2,2)\},\{(1,1,2),(2,2,1)\},\\ \{(1,2,1),(2,1,2)\},\{(1,2,2),(2,1,1)\}\}.$$

Утверждение 2.4 ([3, утверждение 3.1])**.** *Пусть* $A \in \boldsymbol{M}(n,k)$. *Тогда число диагоналей матрицы A равно* $n!^{k-1}$.

Определение 2.5. *Для $d \in \{1,\dots,k\}$ d-мерной гранью матрицы $A \in \boldsymbol{M}(n,k)$ называется ее d-мерная подматрица, полученная фиксацией $k-d$ компонент индекса, в то время как оставшиеся d компонент принимают все возможные значения из $\{1,2,\dots,n\}$.*

Определение 2.6. *Гипергранью называется произвольная $(k-1)$-мерная грань k-мерной матрицы.*

Проиллюстрируем понятие d-мерной грани на следующих примерах.

Пример 2.7. *Рассмотрим матрицу из примера 2.3. Так как $A \in \boldsymbol{M}(2,3)$, то ее индексы I_i состоят из трех компонент: $I_i = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, где $\alpha_i \in \{1,2\}$.*

(1) *Пусть $d = 1$; согласно определению 2.5, зафиксируем $k-d = 3-1 = 2$ компоненты мультииндекса, а оставшаяся компонента может принимать любые значения из множества $\{1,2\}$. Зафиксируем первые две компоненты: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Тогда неупорядоченная пара элементов $\big(a_{(1,2,1)}, a_{(1,2,2)}\big)$ образует 1-мерную грань матрицы A.*

(2) *Пусть $d = 2$; зафиксируем компоненту индекса с $\alpha_1 = 1$. Тогда элементы $\left(\begin{smallmatrix} a_{(1,1,1)} & a_{(1,1,2)} \\ a_{(1,2,1)} & a_{(1,2,2)} \end{smallmatrix}\right)$ образуют 2-мерную грань; так как $k = 3$, то, согласно определению 2.6, эта 2-мерная грань также является и гипергранью. Зафиксируем другую компоненту индекса, например, $\alpha_2 = 1$. Тогда элементы $\left(\begin{smallmatrix} a_{(1,1,1)} & a_{(1,1,2)} \\ a_{(2,1,1)} & a_{(2,1,2)} \end{smallmatrix}\right)$ образуют гипергрань.*

В пункте (2) *этого примера можно заметить, что в случае* 3*-мерных матриц их гиперграни будут* 2*-мерными матрицами; соответственно, в случае* 4*-мерных матриц их гиперграни будут* 3*-мерными матрицами и так далее.*

Теперь можно дать определение перманента многомерной матрицы.

Определение 2.8. *Пусть $A \in \boldsymbol{M}(n,k)$. Тогда перманент матрицы A определяется по формуле*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{d \in D(A)} \prod_{I \in d} a_I. \tag{2.1}$$

Рассмотрим пример вычисления перманента многомерной матрицы.

Пример 2.9. *Рассмотрим матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 10 & 11 & 12 & \vdots & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 13 & 14 & 15 & \vdots & -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 & \vdots & 16 & 17 & 18 & \vdots & -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}(3,3).$$

Тогда ее перманент равен

$$\begin{aligned}
\operatorname{per}(A) = {} & a_{(1,1,1)}a_{(2,2,2)}a_{(3,3,3)} + a_{(1,1,1)}a_{(2,2,3)}a_{(3,3,2)} + a_{(1,1,1)}a_{(2,3,2)}a_{(3,2,3)} \\
& + a_{(1,1,1)}a_{(2,3,3)}a_{(3,2,2)} + a_{(1,1,2)}a_{(2,2,1)}a_{(3,3,3)} + a_{(1,1,2)}a_{(2,2,3)}a_{(3,3,1)} \\
& + a_{(1,1,2)}a_{(2,3,1)}a_{(3,2,3)} + a_{(1,1,2)}a_{(2,3,3)}a_{(3,2,1)} + a_{(1,1,3)}a_{(2,2,1)}a_{(3,3,2)} \\
& + a_{(1,1,3)}a_{(2,2,2)}a_{(3,3,1)} + a_{(1,1,3)}a_{(2,3,1)}a_{(3,2,2)} + a_{(1,1,3)}a_{(2,3,2)}a_{(3,2,1)} \\
& + a_{(1,2,1)}a_{(2,1,2)}a_{(3,3,3)} + a_{(1,2,1)}a_{(2,1,3)}a_{(3,3,2)} + a_{(1,2,1)}a_{(2,3,2)}a_{(3,1,3)} \\
& + a_{(1,2,1)}a_{(2,3,3)}a_{(3,1,2)} + a_{(1,2,2)}a_{(2,1,1)}a_{(3,3,3)} + a_{(1,2,2)}a_{(2,1,3)}a_{(3,3,1)} \\
& + a_{(1,2,2)}a_{(2,3,1)}a_{(3,1,3)} + a_{(1,2,2)}a_{(2,3,3)}a_{(3,1,1)} + a_{(1,2,3)}a_{(2,1,1)}a_{(3,3,2)} \\
& + a_{(1,2,3)}a_{(2,1,2)}a_{(3,3,1)} + a_{(1,2,3)}a_{(2,3,1)}a_{(3,1,2)} + a_{(1,2,3)}a_{(2,3,2)}a_{(3,1,1)} \\
& + a_{(1,3,1)}a_{(2,1,2)}a_{(3,2,3)} + a_{(1,3,1)}a_{(2,1,3)}a_{(3,2,2)} + a_{(1,3,1)}a_{(2,2,2)}a_{(3,1,3)} \\
& + a_{(1,3,1)}a_{(2,2,3)}a_{(3,1,2)} + a_{(1,3,2)}a_{(2,1,1)}a_{(3,2,3)} + a_{(1,3,2)}a_{(2,1,3)}a_{(3,2,1)} \\
& + a_{(1,3,2)}a_{(2,2,1)}a_{(3,1,3)} + a_{(1,3,2)}a_{(2,2,3)}a_{(3,1,1)} + a_{(1,3,3)}a_{(2,1,1)}a_{(3,2,2)} \\
& + a_{(1,3,3)}a_{(2,1,2)}a_{(3,2,1)} + a_{(1,3,3)}a_{(2,2,1)}a_{(3,1,2)} + a_{(1,3,3)}a_{(2,2,2)}a_{(3,1,1)} \\
= {} & 1 \cdot 14 \cdot (-9) + 1 \cdot 15 \cdot (-8) + 1 \cdot 17 \cdot (-6) \\
& + 1 \cdot 18 \cdot (-5) + 2 \cdot 13 \cdot (-9) + 2 \cdot 15 \cdot (-7) \\
& + 2 \cdot 16 \cdot (-6) + 2 \cdot 18 \cdot (-4) + 3 \cdot 13 \cdot (-8)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+3\cdot 14\cdot(-7)+3\cdot 16\cdot(-5)+3\cdot 17\cdot(-4)\\
&+4\cdot 11\cdot(-9)+4\cdot 12\cdot(-8)+4\cdot 17\cdot(-3)\\
&+4\cdot 18\cdot(-2)+5\cdot 10\cdot(-9)+5\cdot 12\cdot(-7)\\
&+5\cdot 16\cdot(-3)+5\cdot 18\cdot(-1)+6\cdot 10\cdot(-8)\\
&+6\cdot 11\cdot(-7)+6\cdot 16\cdot(-2)+6\cdot 17\cdot(-1)\\
&+7\cdot 11\cdot(-6)+7\cdot 12\cdot(-5)+7\cdot 14\cdot(-3)\\
&+7\cdot 15\cdot(-2)+8\cdot 10\cdot(-6)+8\cdot 12\cdot(-4)\\
&+8\cdot 13\cdot(-3)+8\cdot 15\cdot(-1)+9\cdot 10\cdot(-5)\\
&+9\cdot 11\cdot(-4)+9\cdot 13\cdot(-2)+9\cdot 14\cdot(-1)=-9720
\end{aligned}
$$

§3. Другая формула для вычисления перманента

Сперва введем понятие частичной отрицательной диагонали.

Определение 3.1. *Пусть $A\in\Omega(n,k)$. Частичной отрицательной диагональю длины j назовем подмножество индексов $\{I_1,I_2,\ldots,I_j\}$ некоторой диагонали матрицы A, такое что $a_{I_1}=\ldots=a_{I_j}=-1$.*

Обозначение 3.2. *Для каждого $j=\{1,2,\ldots,n\}$ через k_j обозначим число различных частичных отрицательных диагоналей длины j. В частности, считаем, что $k_0=1$, рассматривая пустое множество в качестве единственной частичной отрицательной диагонали длины 0.*

Пример 3.3. *Рассмотрим матрицу*

$$
A=\left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)\in\Omega(3,3).
$$

В этой матрице есть только частичные отрицательные диагонали длины 1 и 2. Число частичных отрицательных диагоналей длины 1 равно числу отрицательных элементов матрицы A, то есть в рассматриваемом примере $k_1=3$. Следующие мультииндексы образуют частичные отрицательные диагонали длины 2: $d_1=\{(1,1,1),(2,2,2)\}$, $d_2=\{(1,1,1),(2,2,3)\}$, откуда $k_2=2$.

Определение 3.4. *Дополнением частичной отрицательной диагонали длины j назовем добавление к набору индексов частичной отрицательной диагонали таких $n - j$ индексов, что для любых двух индексов полученной диагонали выполняется условие $\rho(I_i, I_j) = k$, где $\rho(X, Y)$ – расстояние Хэмминга.*

Как видно из определения 3.4, после дополнения какой-либо частичной отрицательной диагонали матрицы A мы получим некоторую диагональ $d \in D(A)$ матрицы A. Диагонали, получившиеся в результате дополнения частичной отрицательной диагонали, будем называть полными.

Утверждение 3.5. *Любую частичную отрицательную диагональ длины j можно дополнить до полной диагонали $(n-j)!^{k-1}$ способами.*

Доказательство. Для индексов, которые дополняют частичную отрицательную диагональ до полной, должно выполняться условие $\rho(I_i, I_j) = k$, где $i \neq j$. Следовательно, число способов добавить индексы в частичную отрицательную диагональ будет равно числу диагоналей в матрице из $\boldsymbol{M}(n - j, k)$. Согласно утверждению 2.4, число таких диагоналей равно $(n - j)!^{k-1}$. □

Пример 3.6. *Рассмотрим матрицу из примера* 3.3 *и частичную отрицательную диагональ* $d = \{(2, 2, 2)\}$ *длины* 1. *Эту диагональ можно дополнить до полной диагонали следующими четырьмя способами:*

$$\begin{array}{ll} \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)\}, & \{(1,1,3),(2,2,2),(3,3,1)\}, \\ \{(1,3,1),(2,2,2),(3,1,3)\}, & \{(1,3,3),(2,2,2),(3,1,1)\}. \end{array}$$

Определение 3.7. *Из матрицы $A \in \Omega(n, k)$ выберем все частичные отрицательные диагонали длины j, дополним их до полных диагоналей всеми возможными способами и пронумеруем их, чтобы различать. В итоге получим множество пронумерованных дополненных частичных диагоналей длины j; обозначим это множество через K_j.*

Утверждение 3.8. *Мощность множества K_j равна*

$$|K_j| = k_j \cdot (n - j)!^{k-1},$$

где k_j – число различных частичных отрицательных диагоналей длины j.

Доказательство. Пусть дана матрица $A \in \Omega(n, k)$.

Число частичных отрицательных диагоналей длины j в матрице A равно k_j. Согласно утверждению 3.5, число способов дополнить каждую из них до полной диагонали равно $(n-j)!^{k-1}$, следовательно, $|K_j| = k_j \cdot (n-j)!^{k-1}$. □

Обозначение 3.9. *Обозначим через D_m произвольную диагональ матрицы $A \in \Omega(n,k)$, содержащую ровно m индексов, соответствующих элементам матрицы A равным -1, и $n-m$ индексов, соответствующих элементам равным 1.*

Утверждение 3.10. *Диагональ D_m содержит C_m^j различных частичных отрицательных диагоналей длины j.*

Доказательство. В диагонали D_m присутствуют m индексов, которым соответствуют элементы матрицы $A \in \Omega(n,k)$, равные -1. Тогда любой набор из j таких индексов образует частичную отрицательную диагональ длины j. Число способов выбрать j индексов из m равно C_m^j. □

Следствие 3.11. *Пусть $j \leq m$. Набор индексов диагонали D_m содержится в K_j ровно C_m^j раз.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную диагональ D_m матрицы $A \in \Omega(n,k)$. Согласно утверждению 3.10, диагональ D_m содержит C_m^j частичных отрицательных диагоналей длины j. Выберем одну из них; обозначим выбранную частичную отрицательную диагональ через J_m. Дополним диагональ J_m до полной всеми возможными различными способами. В результате получим множество R различных дополненных диагоналей.

Так как диагональ J_m дополнялась различными способами, то во множестве R не найдется двух таких полных диагоналей, у которых полностью совпадают наборы индексов. Тогда во множестве R содержится одна полная диагональ, у которой набор индексов полностью совпадает с набором индексов диагонали D_m. Аналогичные рассуждения проведем для оставшихся частичных отрицательных диагоналей. Следовательно, набор индексов D_m содержится в K_j в точности C_m^j раз. □

Наконец, мы можем сформулировать основное утверждение этого параграфа, которое обобщает формулу для перманента из статьи [1, лемма 2.3].

Лемма 3.12. *Пусть* $A \in \Omega(n,k)$. *Тогда*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!^{k-1}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

(1) По определению,

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{d \in D(A)} \prod_{I \in d} a_I.$$

Каждое слагаемое $\prod_{I\in d} a_I$ соответствует одной диагонали матрицы A и равно 1 или -1 в зависимости от четности числа индексов, соответствующих элементам a_I матрицы A равным -1. Покажем, что в выражении (3.1) содержится такое же число -1 и 1, что и в (2.1).

(2) Составим множества K_j из дополненных частичных отрицательных диагоналей матрицы A. Будем считать, что произвольная диагональ D_m матрицы A содержит $1 = C_m^0$ частичных отрицательных диагоналей длины 0. Здесь также положим $C_m^j = 0$, если $m < j$. Через $\mathbb{D}_m$ обозначим множество различных диагоналей матрицы A с ровно m индексами, соответствующими элементам матрицы A равным -1. Распишем правую часть выражения (3.1), учитывая следствие 3.11:

$$\sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!^{k-1} = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot |K_j| = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} \sum_{D_m \in \mathbb{D}_m} C_m^j \right).$$

Преобразуем полученную сумму. Упростим слагаемое $\sum\limits_{D_m \in \mathbb{D}_m} C_m^j$ и занесем множитель $(-2)^j$ под знак второй суммы:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} \sum_{D_m \in \mathbb{D}_m} C_m^j \right) &= \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} C_m^j \sum_{D_m \in \mathbb{D}_m} 1 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot \left(\sum_{m=0}^{n} C_m^j \cdot |\mathbb{D}_m| \right) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} (-2)^j \cdot C_m^j \cdot |\mathbb{D}_m|,\end{aligned}$$

где $|\mathbb{D}_i|$ – мощность $\mathbb{D}_i$. Поменяем местами знаки суммирования и вынесем множитель $|\mathbb{D}_m|$ за знак второй суммы:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}(-2)^j\cdot C_m^j\cdot|\mathbb{D}_m| = \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot C_m^j\cdot|\mathbb{D}_m|$$
$$= \sum_{m=0}^{n}|\mathbb{D}_m|\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot C_m^j.$$

(3) Из пункта (2) видно, что все диагонали матрицы A содержатся в сумме $\sum\limits_{m=0}^{n}|\mathbb{D}_m|$. Знаки этих диагоналей зависят от $\sum\limits_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot C_m^j$. Учитывая, что $C_m^j=0$ при $m<j$, получим:

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot C_m^j = \sum_{j=0}^{m}(-2)^j\cdot C_m^j = (1-2)^m = (-1)^m.$$

(4) В пункте (2) из правой части равенства (3.1) было получено выражение, содержащее все диагонали матрицы A; в пункте (3) получены знаки слагаемых этого выражения. Учитывая пункты (2)–(3) и обозначая через $D(A)$ множество всех диагоналей матрицы A, составим итоговую цепочку равенств

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot k_j\cdot(n-j)!^{k-1} = \sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{D_m\in\mathbb{D}_m}C_m^j\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\cdot|\mathbb{D}_m| = \sum_{D_m\in D(A)}(-1)^m.$$

Таким образом, в последней сумме каждой диагонали матрицы A соответствует ровно одно слагаемое, равное -1 или 1 в зависимости от четности числа индексов, соответствующих элементам матрицы A равным -1. Согласно пункту (1), это и есть значение перманента.

□

Рассмотрим пример вычисления перманента при помощи формулы (3.1).

Пример 3.13. *Пусть $A \in \Omega(3,3)$ – матрица из примера 3.3. В этом примере было показано, что матрица A содержит только частичные отрицательные диагонали длины 1 и 2, то есть $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 0$. Согласно обозначению 3.2, число частичных отрицательных диагоналей длины 0 равно $k_0 = 1$. Подставим полученные значения в формулу (3.1). Тогда получим:*

$$\begin{aligned}\operatorname{per}(A) &= \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!^{k-1} \\ &= 3!^2 - 2^1 \cdot 3 \cdot 2!^2 + 2^2 \cdot 2 \cdot 1!^2 = 36 - 24 + 8 = 20.\end{aligned}$$

§4. Оценка делимости на степени числа 2

Для определения максимальной степени числа два, на которую может делиться перманент $(-1,1)$-матрицы, потребуются следующие понятия и утверждения.

Определение 4.1. *Пусть $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ и $x \in \mathbb{Z}\{0\}$. Тогда*

$$\nu_p(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} | \frac{x}{p^k} \in \mathbb{Z}\}.$$

Замечание 4.2 ([2, замечание 2.7]). *Если p – простое число, то*

$$\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y).$$

Лемма 4.3 ([2, лемма 2.9]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и s – число единиц в двоичной записи числа n. Тогда*

$$\nu_2(n!) = n - s. \tag{4.1}$$

Далее найдем максимальную степень двойки, на которую делится каждое слагаемое в сумме (3.1).

Лемма 4.4. *Пусть $n, m, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$ и $0 \leqslant m \leqslant n$. Тогда*

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!^{k-1}) \geqslant n - 1. \tag{4.2}$$

Равенство достигается при $m = n - 1$.

Доказательство. Применяя последовательно замечание 4.2 и лемму 4.3 к левой части выражения (4.2), получаем цепочку равенств

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!^{k-1}) = m + (k-1) \cdot \nu_2((n-m)!) = (k-1)(n-m-s) + m, \tag{4.3}$$

где s – число единиц в двоичной записи числа $n - m$.

(1) Докажем сперва, что для любого значения k в неравенстве (4.2) возможно равенство. Пусть $m = n-1$. Так как в этом случае $n-m=1$, то $s=1$, а тогда

$$(k-1)(n-n+1-1)+n-1 = n-1.$$

(2) Теперь рассмотрим случай $m=n$. В этом случае $s=0$, так что

$$(k-1)(n-n)+n = n \geqslant n-1.$$

(3) Далее будем рассматривать те значения m, для которых выполнены неравенства $0 \leqslant m \leqslant n-2$. Пусть $2^{t-1}+1 \leqslant n-m \leqslant 2^t$, обозначим этот отрезок через L_t. На этом отрезке выполняются неравенства $0 \leqslant s \leqslant t$. Положим в выражении (4.3) на отрезке L_t s равным t. Тогда

$$(k-1)(n-m-s)+m \geqslant (k-1)(n-m-t)+m. \tag{4.4}$$

Минимальное значение правой части неравенства (4.4) на отрезке L_t достигается при $n-m = 2^{t-1}+1$. Представим m в виде $m = n-2^{t-1}-1$. Тогда правая часть неравенства (4.4) равна

$$(k-1)(n-(n-2^{t-1}-1)-t)+n-2^{t-1}-1.$$

Раскроем скобки и добавим слагаемое $(k-1)-(k-1):$

$$(k-1)n-(k-1)(n-2^{t-1}-1)-(k-1)t+n-2^{t-1}-1+(k-1)-(k-1).$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}(k-1)n-(k-1)-(k-2)(n-1)+(k-2)2^{t-1}-(k-1)t+(k-1)\\ =(k-1)(n-1)-(k-2)(n-1)+(k-2)2^{t-1}-(k-1)t+(k-1)\\ =(n-1)+(k-2)2^{t-1}-(k-1)(t-1).\end{aligned}$$

Докажем, что

$$(n-1)+(k-2)2^{t-1}-(k-1)(t-1) \geqslant n-1.$$

Для этого покажем, что $(k-2)2^{t-1}-(k-1)(t-1) \geqslant 0$, но перед этим упростим это неравенство

$$\begin{aligned}&(k-2)2^{t-1}-(k-1)(t-1)\\ &\qquad =(k-1)2^{t-1}-2^{t-1}-(k-1)(t-1)\\ &\qquad\qquad =(k-1)(2^{t-1}-(t-1))-2^{t-1} \geqslant 0\end{aligned}$$

и перенесем вправо слагаемое -2^{t-1}:

$$(k-1)(2^{t-1}-(t-1)) \geqslant 2^{t-1}.$$

При $k \geqslant 3$ и $t \in \mathbb{N}$ обе части неравенства больше нуля. Прологарифмируем их и преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}\log_2((k-1)(2^{t-1}-(t-1)))\\ &= \log_2(k-1) + \log_2\left(2^{t-1}\left(1-\frac{t-1}{2^{t-1}}\right)\right)\\ &= \log_2(k-1) + (t-1) + \log_2\left(1-\frac{t-1}{2^{t-1}}\right) \geqslant t-1.\end{aligned}$$

Так как $\log_2(k-1) \geqslant 1$ и $\log_2\left(1-\frac{t-1}{2^{t-1}}\right) \geqslant -1$, то

$$\log_2(k-1) + \log_2\left(1-\frac{t-1}{2^{t-1}}\right) \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$\log_2((k-1)(2^{t-1}-(t-1))) \geqslant \log_2(2^{t-1});$$
$$(k-1)(2^{t-1}-(t-1)) \geqslant 2^{t-1}.$$

Отсюда следует, что правая часть неравенства (4.4) на отрезке L_t больше либо равна $n-1$:

$$(k-1)(n-m-t) = (n-1) + (k-2)2^{t-1} - (k-1)(t-1) \geqslant n-1.$$

В итоге мы получили цепочку неравенств:

$$(k-1)(n-m-s) + m \geqslant (k-1)(n-m-t) + m \geqslant n-1.$$

Из пунктов (1)–(3) следует, что

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!^{k-1}) \geqslant n-1. \qquad \square$$

Теперь можно сформулировать основное утверждение этого параграфа.

Теорема 4.5. *Пусть* $A \in \Omega(n,k)$, $k \geqslant 3$. *Тогда*

$$\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-1}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Представляя перманент матрицы A в виде (3.1) и применяя неравенство (4.2) к каждому слагаемому, получаем, что $\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-1}$. $\square$

§5. Свойства делимости перманентов некоторых $(-1,1)$-матриц

В этом параграфе будут рассмотрены матрицы $A \in \Omega(n,k)$, где $k>2$.

Утверждение 5.1. *Пусть $A \in \Omega(n,k)$. Тогда перманент* $\mathrm{per}(A)$ *четный.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что все слагаемые в равенстве (3.1) четны. □

Утверждение 5.2.

$$\max_{A\in\Omega(n,k)} \nu_2(\mathrm{per}(A)) = (k-1)(n-s),$$

где s – число единиц в двоичной записи числа n.

Доказательство. Пусть $A \in \Omega(n,k)$ и пусть в матрице A нет элементов, равных -1.

(1) Из леммы 3.12 следует, что на матрице A достигается максимальное значение перманента на множестве $\Omega(n,k)$, равное $\mathrm{per}(A) = n!^{k-1}$.

(2) Поскольку $n!^{k-1}$ – максимальное значение перманента, то все показатели степеней двойки, делящих значения перманента, не превосходят $\nu_2(n!^{k-1}) = (k-1)(n-s)$. Здесь к $\nu_2(n!^{k-1})$ были применены лемма 4.3 и замечание 4.2. Из этого следует, что

$$\mathrm{per}(A) = n!^{k-1} \,\vdots\, 2^{(k-1)(n-s)}.$$ □

Утверждение 5.3. *Пусть A – k-мерная матрица из множества $\Omega(n,k)$ и пусть все ее элементы, равные -1, содержатся в одной гиперграни. Тогда*

$$\mathrm{per}(A) \,\vdots\, 2^{(k-1)(n-1-s)},$$

где s – число единиц в двоичной записи числа $n-1$.

Доказательство. Обозначим число элементов, равных -1, через l. Согласно условиям утверждения, в A имеются только частичные отрицательные диагонали длины 1, и их число равно l. Представим перманент $\mathrm{per}(A)$ в виде (3.1):

$$\mathrm{per}(A) = n!^{k-1} - 2\cdot l\cdot (n-1)!^{k-1} = (n-1)!^{k-1}\cdot (n^{k-1} - 2\cdot l).$$

Применяя лемму 4.3 и замечание 4.2 к множителю $(n-1)!^{k-1}$, получаем, что

$$\mathrm{per}(A) \vdots 2^{(k-1)(n-1-s)}. \qquad \square$$

Список литературы

1. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин, *О делимости перманента $(-1,1)$-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 26—37.
2. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин, *К теореме Кройтера–Сейфтера о делимости перманентов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 25—35.
3. А. Э. Гутерман, И. М. Евсеев, А. А. Тараненко, *Значения функции перманент на многомерных $(0,1)$-матрицах.* — Сиб. мат. ж. **63**, No 2 (2022), 316—333.
4. Л. Ловас, М. Пламмер, *Прикладные задачи в теории графов.* — В кн: *Теория паросочетаний в математике, физике химии.* Москва, Мир (1998), 395–401.
5. Х. Минк, *Перманенты.* Москва, Мир, 1982.
6. В. В. Меньших, *Разработка метода расчета оценок сбалансированности на основе использования перманентных многочленов.* — Моделир., оптим. информ. технол. **6**, No. 2 (2018), 64–72.
7. Б. А. Севастьянов, *Вычисление предельных вероятностей распределения перманента случайной матрицы в поле GF(p).* — Дискр. мат. **22**, No. 3 (2010), 3—7.
8. Н. П. Соколов, *Введение в теорию многомерных матриц.* Киев, Наукова думка, 1972.
9. Н. П. Соколов, *Пространственные матрицы и их приложения.* Москва, ФМЛ, 1960.
10. А. А. Тараненко, *Перманент многомерных матриц: свойства и приложения.* — Дискр. анал. исслед. опер. **23**, No. 4 (2016), 35–101.
11. А. М. Чикин, *Байесовское обучение распознаванию образов в классе плотностей, представимых в виде квадрата суммы ортогонального ряда.* — Пробл. передачи информ. **26**, No. 4 (1990), 99–107.
12. R. A. Brualdi, K. L. Chavey, B. L. Shader, *Conditional sign-solvability.* — Math. Comput. Model. **17**, No. 1 (1993), 141–148.
13. I. M. Evseev, A. E. Guterman, *A range of the multidimensional permanent on $(0,1)$-matrices.* — Proc. Math. Stat. **436** (2022), 127–147.
14. I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants.* Springer, New York, 1994.
15. Y.-H. Kiem, S.-H. Kye, J. Na, *Product vectors in the ranges of multi-partite states with positive partial transposes and permanents of matrices.* — Commun. Math. Phys. **338**, No. 2 (2015), 621–639.
16. T.-C. Wei, S. Severini, *Matrix permanent and quantum entanglement of permutation invariant states.* — J. Math. Phys. **51**, No. 9 (2010).

Asmus T. A., Guterman A. E. Divisibility by powers of 2 of the permanents of multidimensional $(-1,1)$-matrices.

Let $\Omega(n,k)$ be a set of k-dimensional $(-1,1)$-matrices of order n. This paper derives a new formula for computing multidimensional permanents of $(-1,1)$-matrices. Using this formula, the divisibility of the permanents of multidimensional $(-1,1)$ matrices by certain powers of 2 is proved.

Московский физико-технический институт,
Московский центр фундаментальной и
прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: asmus.tim.a@gmail.com

Поступило 28 октября 2025 г.

Университет Бар-Илан,
Рамат-Ган, Израиль
E-mail: alexander.guterman@biu.ac.il