

В. В. Суханов

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ ТИПА КДФ, СВЯЗАННОЙ С
ОПЕРАТОРОМ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ,
ЗАВИСЯЩИМ ОТ ЭНЕРГИИ. II**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе продолжено изучение асимптотического поведения решений задачи Коши для нелинейной системы типа КДФ

$$-v_t = -\frac{1}{4}u_{xxx} + vu_x + \frac{1}{2}uv_x, \quad -u_t = \frac{3}{2}uu_x + v_x \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0$$

при больших временах. Здесь u_0 и v_0 – гладкие быстро убывающие функции. Как было установлено в работах [1] и [2], эта система имеет пару Лакса

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - ku - v + k^2, \quad A = k \frac{d}{dx} + \frac{u}{2} \frac{d}{dx} - \frac{1}{4}u_x.$$

Таким образом, система (1.1) эквивалентна операторному равенству

$$L_t = [L, A].$$

Для изучения этой нелинейной системы необходимо изучить свойства решений спектрального уравнения с потенциалом, зависящим от энергии

$$-\psi''_{xx}(x, k, t) + (ku(x, t) + v(x, t))\psi(x, k, t) = k^2\psi(x, k, t), \quad x \in R. \quad (1.2)$$

Основные вопросы асимптотического поведения решения данной задачи связаны с непрерывным спектром семейства операторов L , поэтому мы будем считать, что для начальных данных задачи Коши системы (1.1) спектральное уравнение (1.2) не имеет дискретного спектра. Таким образом, в асимптотике решений этой системы при больших временах будут отсутствовать солитонные члены.

Ключевые слова: система типа КДФ, задача Коши, асимптотическое поведение решений при больших временах, оператор, зависящий от энергии.

Исследование автора поддержано грантом РФФИ No. 22-11-00070-П.

В этом случае старший член асимптотики решения системы имеет следующий вид

$$v(x, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{t}}(w(z)e^{i\Phi} + \overline{w(z)}e^{-i\Phi}), \quad (1.3)$$

$$u(x, t) \simeq \frac{2}{\sqrt{tz}}(w(z)e^{i\Phi} + \overline{w(z)}e^{-i\Phi}), \quad (1.4)$$

$$z = \frac{x}{t}, \quad \Phi = \frac{z^2}{2}t + B(z) \ln t.$$

Здесь $w(z)$ – функция, которая определяется начальными данными задачи Коши для нелинейной системы.

В предыдущей статье (см. [10]) для нахождения асимптотики решения был использован метод разработанный в статье [9]. Этот метод предполагает использование формул следов для оператора L и интегралов движения для нелинейной вполне интегрируемой системы. Левая часть формулы следа соответствует интегралу движения для данной нелинейной системы. Мы вычислили значение интегралов движения через функцию $w(z)$ и сравнили его с правой частью формулы следа, которая дана через данные обратной задачи. Это вычисление даёт явную формулу для амплитуды $|w(z)|$ старшего члена асимптотического решения через спектральные данные, соответствующие начальным данным задачи Коши для нелинейной системы. Данный метод, видимо, представляет собой наиболее быстрый способ для получения таких ответов. Однако, аргумент комплексно значной функции $w(z)$, таким образом найти нельзя. Поэтому, в качестве следующего этапа изучения асимптотического поведения решений системы типа КдФ, в настоящей работе мы применим метод развитый в статье В. Е. Захарова и С. В. Манакова (см. [11]).

Опишем структуру настоящей работы. Во втором параграфе мы рассмотрим основные положения спектральной теории для оператора (1.2), которые изучались в работах [3, 4] и [5], а также в [7, 8]. В [3, 4] и [7] авторы использовали подход Гельфанда–Левитана–Марченко для решения обратной задачи на прямой. В [8] авторы использовали метод задачи Римана–Гильберта.

В следующем параграфе мы исследуем формальное решение нелинейной системы (1.1) при больших временах.

В четвертом параграфе мы вычислим асимптотическое поведение решений спектрального уравнения с потенциалами вида (1.3) и (1.4).

В пятом параграфе мы рассмотрим асимптотическое поведение решений спектрального уравнения в окрестности резонансной точки.

И наконец, в шестом параграфе мы получим формулу для функции $w(z)$ через спектральные данные, соответствующие начальным данным задачи Коши для нелинейной системы.

§2. СВОЙСТВА ДАННЫХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы напомним некоторые стандартные факты, спектральной теории для семейства операторов L (см. [8]). Начнём с определения решения Йоста уравнения (1.2). Рассмотрим два его решения, удовлетворяющие свойствам

$$f(x, k) = e^{ikx}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.1)$$

$$g(x, k) = e^{-ikx}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.2)$$

Мы также введем

$$\alpha(x) = \exp \left\{ i \int_x^\infty \tilde{u}(s) ds \right\}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{2}, \quad \alpha_0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x). \quad (2.3)$$

Поскольку u – вещественная функция, то $\alpha_0^{-1} = \overline{\alpha_0}$.

Для вещественного k мы имеем две пары линейно независимых решений:

$$\{f(x, k), \overline{f(x, k)}\}, \quad \{g(x, k), \overline{g(x, k)}\}.$$

В частности, функции f и $\bar{f}$ можно записать как линейные комбинации g и $\bar{g}$

$$f(x, k) = a(k)\overline{g(x, k)} + b(k)g(x, k), \quad (2.4)$$

$$\overline{f(x, k)} = \overline{a(k)}g(x, k) + \overline{b(k)}\overline{g(x, k)}. \quad (2.5)$$

Давайте введем вронскиан

$$W[\varphi, \psi](x, k) = \varphi'_x(x, k)\psi(x, k) - \varphi(x, k)\psi'_x(x, k). \quad (2.6)$$

Легко видеть, что для решений спектрального уравнения вронскиан не зависит от x . Следовательно, мы получаем стандартную формулу

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \quad (2.7)$$

Из (1.2) следует, что функция f удовлетворяет следующему уравнению Вольтерра:

$$f(x, k) = e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} (ku(y) + v(y)) f(y, k) dy. \quad (2.8)$$

Как и для обычного уравнения Шредингера, в данном случае для интегрального уравнения Вольтерра можно записать сходящийся итерационный ряд и доказать, что функция $f(x, k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость по спектральному параметру. Отсюда легко получается аналитичность функции $a(k)$ в верхней полуплоскости.

Лемма 2.1. *При $\operatorname{Im} k > 0$ функция $f(x, k)$ удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению*

$$f(x, k) = e^{ikx} \exp \left\{ i \int_x^\infty \tilde{u}(s) ds \right\} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Аналогично находим асимптотические свойства функций $a(k)$ и $b(k)$.

Лемма 2.2. *Коэффициенты рассеяния a и b имеют следующее асимптотическое поведение $k \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} \lim_{|k| \rightarrow \infty} a(k) &= \alpha_0^{-1}, \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \\ \lim_{|k| \rightarrow \infty} b(k) &= 0, \quad \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned}$$

Лемма 2.3. *Нули коэффициента рассеяния $a(k)$ в $\mathbb{C}_+$ совпадают с собственными значениями оператора (1.2).*

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству, возникшему для стандартного оператора Шредингера.

Лемма 2.4. *Если потенциалы $u(x, t)$ и $v(x, t)$ в операторе (1.2) зависят от времени и удовлетворяют нелинейной системе (1.1), то соответствующая функция $a(k, t)$ не зависит от времени, а функция $b(k, t)$ имеет следующую динамику*

$$b(k, t) = b(k, 0) e^{2ik^2 t}.$$

Доказательство этого факта можно найти в [8].

§3. ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТИПА КдФ

Метод предложенный В. Е. Захаровым и С. В. Манаковым требует предварительного изучения формального решения системы типа КдФ.

Теорема 3.1. Система типа KDF имеет следующее формальное решение

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, t) \simeq & \frac{1}{\sqrt{t}}(w(z)e^{i\Phi} + \overline{w(z)}e^{-i\Phi}) \\ & + \frac{1}{t}(v_{202}(z)e^{2i\Phi} + v_{20,-2}(z)e^{-2i\Phi} + v_{200}(z)) + \sum_{\substack{p \geq 3, \\ 0 \leq q \leq p, \\ |m| \leq p}} \frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi} v_{pqm}(z), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) \simeq & \frac{2}{\sqrt{tz}}(w(z)e^{i\Phi} + \overline{w(z)}e^{-i\Phi}) \\ & + \frac{1}{t}(u_{202}(z)e^{2i\Phi} + u_{20,-2}(z)e^{-2i\Phi} + u_{200}(z)) + \sum_{\substack{p \geq 3, \\ 0 \leq q \leq p, \\ |m| \leq p}} \frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi} u_{pqm}(z), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x}{t}, \quad \Phi = \frac{z^2}{2}t + B(z) \ln t, \quad B(z) = -\frac{4|w(z)|^2}{z^2}, \\ u_{200}(z) &= \frac{8|w|^2}{z^3}, \quad v_{200}(z) = \frac{2|w|^2}{z^2}. \end{aligned}$$

Все коэффициенты $v_{pqm}(z)$, $u_{pqm}(z)$ and $B(z)$ могут быть найдены в терминах функций $w(z)$.

Для доказательства теоремы достаточно подставить ряды (3.1) и (3.2) в (1.1) и приравнять члены при разных степенях $\frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi}$. Полученная система позволяет определить коэффициенты $v_{pqm}(z)$, $u_{pqm}(z)$ и $B(z)$ в терминах функций $w(z)$.

Функцию $w(z)$ будем считать гладкой быстро убывающей функцией, удовлетворяющей условию при некотором $\delta > 0$

$$w(z) = 0, \quad |z| < \delta. \quad (3.3)$$

Последнее условие необходимо для того, чтобы исключить из дальнейшего анализа сложное поведение асимптотики решения системы типа КдФ вблизи точки $z = 0$.

§4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Идея метода Захарова и Манакова состоит в том, чтобы подставить формальное решение нелинейной системы в спектральное уравнение и вычислить отвечающие функции $w(z)$ асимптотические данные обратной задачи и сравнить их с точными данными обратной задачи в данный момент времени t (они для вполне интегрируемой системы (см. лемму 2.4) явно вычисляются через данные обратной задачи в момент времени $t = 0$). Результат этого сравнения и дает окончательные формулы для $w(z)$.

Подставим потенциалы $\hat{v}(x, t)$ и $\hat{u}(x, t)$ в спектральное уравнение (1.2) и будем искать асимптотическое решение спектрального уравнения в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, t, k) = & e^{ikx} [\varphi(z) + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{i\Phi} \psi_{101}(z) + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-i\Phi} \psi_{10, -1}(z) \\ & + \sum_{\substack{p \geq 2, \\ 0 \leq q \leq p, \\ |m| \leq p}} \frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi} \psi_{pqm}(z)]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$z = \frac{x}{t}, \quad \Phi = \frac{z^2}{2} t + B(z) \ln t.$$

Теорема 4.1. Если подставить асимптотическое решение (4.1) в спектральное уравнение и приравнять коэффициенты при $\frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi}$, то можно найти все коэффициенты $\psi_{pqm}(z)$ и $\varphi(z)$ с точностью до одной константы C .

Доказательство. Подставим ряд (4.1) в спектральное уравнение

$$-\psi''_{xx}(x, k, t) + (k\hat{u}(x, t) + \hat{v}(x, t))\psi(x, k, t) = k^2\psi(x, k, t), \quad x \in R.$$

где $\hat{u}(x, t)$ и $\hat{v}(x, t)$ - формальное решение системы типа КдФ. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi}$.

В старшем порядке при t^0 уравнение выполнено автоматически.

При $t^{-1/2} e^{i\Phi}$ и $t^{-1/2} e^{-i\Phi}$ имеем

$$\psi_{101}(z) = w\varphi \frac{\frac{2k}{z} + 1}{k^2 - (z + k)^2} = -\frac{w\varphi}{z^2}$$

и

$$\psi_{10-1}(z) = w\varphi \frac{\frac{2k}{z} + 1}{k^2 - (-z + k)^2} = \bar{w}\varphi \frac{2k + z}{z^2(2k - z)}.$$

Приравнивая слагаемые при t^{-1} , получаем уравнение

$$2ik\varphi'_z - w\frac{2k}{z}\psi_{10,-1} - \bar{w}\frac{2k}{z}\psi_{101} - w\psi_{10,-1} - \bar{w}\psi_{101} - ku_{200}\varphi - v_{200}\varphi = 0,$$

которое позволяет определить функцию $\varphi(z)$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = C \exp \left(- \int_z^\infty \frac{1}{2ik} \left[|w(\tilde{z})|^2 \left(\frac{2k + \tilde{z}}{\tilde{z}^2(2k - \tilde{z})} \left(\frac{2k}{\tilde{z}} + 1 \right) - \frac{1}{\tilde{z}^2} \left(\frac{2k}{\tilde{z}} + 1 \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + ku_{200}(\tilde{z}) + v_{200}(\tilde{z}) \right] d\tilde{z} \right). \end{aligned}$$

Аналогично определяются все остальные коэффициенты $\psi_{pqm}(z)$. $\square$

Замечание 4.2. Легко видеть, что функция $\varphi(z)$ имеет особенность при $z = 2k$. Это резонансная точка. В ее окрестности нам потребуются специальное решение. Помимо этой особой точки в случае общего положения (т.е. при произвольных рядах $\hat{v}(x, t)$ и $\hat{u}(x, t)$), построенное решение будет иметь целую серию младших резонансных точек при $z = \frac{2k}{m}, m = 2, 3, 4, \dots$, а также при $k = 0$. Однако, все эти особенности исчезают, если ряды $\hat{u}(x, t)$ и $\hat{v}(x, t)$ – являются формальным решением системы типа КдФ. В частности, при $k = 0$ особенность исчезает за счет выбора функции $v_{200}(z)$

$$v_{200}(z) = \frac{2|w|^2}{z^2}.$$

Теорема 4.1, в частности, дает возможность определить асимптотики конкретных решений спектрального уравнения, которые мы ввели в ходе обсуждения теории рассеяния для данной модели.

При $z > z_0$, можно получить асимптотическое решение $f(x, k, t)$

$$\begin{aligned} f(x, k, t) \sim e^{ikx} \exp \left(- \int_z^\infty \frac{1}{2ik} \left[|w(\tilde{z})|^2 \left(\frac{2k + \tilde{z}}{\tilde{z}^2(2k - \tilde{z})} \frac{2k}{\tilde{z}} + \frac{2k + \tilde{z}}{\tilde{z}^2(2k - \tilde{z})} - \frac{2k}{\tilde{z}^3} - \frac{1}{\tilde{z}^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + ku_{200}(\tilde{z}) + v_{200}(\tilde{z}) \right] d\tilde{z} \right), \end{aligned}$$

а при $z < z_0$, можно получить асимптотическое решение $\bar{g}(x, k, t)$

$$\bar{g}(x, k, t) \sim e^{ikx} \exp \left(\int_{-\infty}^z \frac{1}{2ik} \left[|w(\tilde{z})|^2 \left(\frac{2k+\tilde{z}}{\tilde{z}^2(2k-\tilde{z})} \frac{2k}{\tilde{z}} + \frac{2k+\tilde{z}}{\tilde{z}^2(2k-\tilde{z})} - \frac{2k}{\tilde{z}^3} - \frac{1}{\tilde{z}^2} \right) + ku_{200}(\tilde{z}) + v_{200}(\tilde{z}) \right] d\tilde{z} \right).$$

§5. РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСНОЙ ТОЧКИ

Построим решение в окрестности резонансной точки

$$z = z_0 = 2k.$$

Для этого введем новую переменную

$$s = (z - z_0)\sqrt{t}.$$

Разложим медленную функцию $w(z)$

$$w(z) = w(z_0) + w'(z_0) \frac{s}{\sqrt{t}} + \dots,$$

а также функции $u_{pqt}(z)$, $v_{pqt}(z)$ и производные функции $\Phi(z)$ (экспоненты от этой функции не являются медленными функциями в окрестности резонансной точки и мы их не раскладываем) в асимптотические ряды по степеням $(\frac{s}{\sqrt{t}})^l$ в окрестности резонансной точки. Тогда можно перестроить решение спектрального уравнения. Будем искать решение в виде

$$h(x, t, k) = e^{ikx} [\gamma(s) + e^{-i\Phi} \gamma_1(s) \sum_{\substack{p \geq 1, \\ 0 \leq q \leq p, \\ |m| \leq p}} \frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi} h_{pqt}(s)]. \quad (5.1)$$

Теорема 5.1. Если подставить асимптотическое решение (4.1) в спектральное уравнение и приравнять коэффициенты при $\frac{\ln^q t}{t^{p/2}} e^{im\Phi}$, то можно выразить все коэффициенты $h_{pqt}(z)$ через функцию $\gamma(s)$. В частности,

$$\gamma_1(s) = \frac{ik}{w(z_0)} \gamma(s).$$

А сама функция $\gamma(s)$ является решением дифференциального уравнения

$$\gamma''(s) - is\gamma'(s) - \frac{|w(z_0)|^2}{k^2}\gamma(s). \quad (5.2)$$

Доказательство. В старшем порядке при t^0 уравнение выполнено автоматически.

При $t^{-1/2}$ и $t^{-1/2}e^{-i\Phi}$ имеем

$$-ik\gamma' + w\gamma_1 = 0,$$

$$ik\gamma'_1 + sk\gamma_1 + \bar{w}(z_0)\gamma = 0.$$

Отсюда, выражая из первого соотношения функцию $\gamma_1(s)$

$$\gamma_1(s) = \frac{ik}{w(z_0)}\gamma(s)$$

и подставляя ее во второе соотношение, получим уравнение для функции $\gamma(s)$

$$\gamma''(s) - is\gamma'(s) - \frac{|w(z_0)|^2}{k^2}\gamma(s).$$

Аналогично определяются все остальные коэффициенты $h_{pqm}(z)$. $\square$

Легко видеть, что уравнение (5.2) сводится к уравнению параболического цилиндра со значком iB

$$y''_{\tau\tau} + \left(-\frac{\tau^2}{4} + \frac{1}{2} + iB\right)y = 0, \quad B = -\frac{|w(z_0)|^2}{k^2}, \quad \gamma(s) = e^{\frac{-is^2}{4}}y(e^{\frac{3i\pi}{4}}s).$$

Для дальнейших построений нам удобно выбрать

$$\gamma(s) = e^{\frac{-is^2}{4}}D_{iB}(e^{\frac{3i\pi}{4}}s).$$

Здесь $D_\nu(\tau)$ -функция параболического цилиндра. Приведем интегральное представление для этой функции

$$D_{iB}(\tau) = \frac{\Gamma(iB+1)e^{-\tau^2/4}}{2\pi i} \int_{\gamma_0} e^{\tau t} e^{-t^2/2} t^{-1-iB} dt.$$

Выберем разрез для многозначной подынтегральной функции по отрицательной полуоси. Контур γ_0 берется вокруг разреза в положительном направлении. Веточку многозначной функции можно зафиксировать, потребовав вещественность $\ln t$ на положительной полуоси.

§6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА КДФ

Таким образом, мы получили асимптотические решения спектрального уравнения f и g (справа и слева от резонансной точки), а также решение h в окрестности резонансной точки. Теперь необходимо сшить эти решения друг с другом, чтобы получить решение на всей оси и вычислить данные обратной задачи соответствующие функции $w(z)$.

Мы построим функцию $\bar{g}(x, k, t)$, которая имеет следующие асимптотики при $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned}\bar{g} &= e^{ikx}, & x &\rightarrow -\infty, \\ \bar{g} &= \bar{a}e^{ikx} - be^{-ikx}, & x &\rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Для этого, в начале проведем склейку асимптотического решения $\bar{g}$ и решения h в области слева от резонансной точки при $1 \gg |z - z_0| \gg t^{-\frac{1}{2}}$. В этой области, в старшем порядке, можно асимптотически перестроить решение $\bar{g}$

$$\bar{g}(x, k, t) \sim \alpha(k)e^{ikx} e^{\frac{i \ln |s| |w(z_0)|^2}{k^2}} e^{-\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{2k^2}},$$

$$\begin{aligned}\alpha(k) = \exp \left(\int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{2ik} [\ln(2k - \tilde{z})] \frac{d}{d\tilde{z}} \left(|w(\tilde{z})|^2 \frac{(2k + \tilde{z})^2}{\tilde{z}^3} \right) - \frac{|w(\tilde{z})|^2 (2k + \tilde{z})}{\tilde{z}^3} \right. \\ \left. + ku_{200}(\tilde{z}) + v_{200}(\tilde{z}) \right] d\tilde{z} \Big),\end{aligned}$$

и решение h

$$h(x, k, t) \sim e^{ikx} |s|^{-iB} e^{\frac{\pi B}{4}}.$$

Таким образом, в старшем порядке, в этой области

$$\bar{g}(x, k, t) \sim c(k, t)h(x, k, t).$$

Здесь

$$c(k, t) = \alpha(k) e^{-\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{2k^2}} e^{-\frac{\pi B}{4}}.$$

Аналогично, справа от резонансной точки, при $1 \gg |z - z_0| \gg t^{-\frac{1}{2}}$ можно перестроить решение h

$$h(x, k, t) \sim e^{ikx} s^{-iB} e^{-\frac{3\pi B}{4}} + e^{ikx - i\frac{tz^2}{2} - iB(z_0) \ln t} \sqrt{2\pi} \frac{ike^{\frac{i\pi}{4}}}{w\Gamma(iB)} s^{iB} e^{\frac{is^2}{2}} e^{-\frac{\pi B}{4}}.$$

Причем

$$ikx - i\frac{tz^2}{2} + \frac{is^2}{2} = -ikx + 2ik^2t.$$

Таким образом,

$$h(x, k, t) \sim e^{ikx} s^{-iB} e^{-\frac{3\pi B}{4}} + e^{-ikx - iB(z_0) \ln t} \sqrt{2\pi} \frac{ike^{\frac{i\pi}{4}}}{w\Gamma(iB)} s^{iB} e^{-\frac{\pi B}{4}}.$$

Решение f в этой области перестраивается аналогично решению $\bar{g}$

$$f(x, k, t) \sim \beta(k) e^{ikx} e^{\frac{i \ln(s)|w(z_0)|^2}{k^2}} e^{-\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{2k^2}},$$

$$\begin{aligned} \beta(k) = \exp \left(\int_{z_0}^{\infty} \frac{1}{2ik} [\ln(2k - \tilde{z}) \frac{d}{d\tilde{z}} (|w(\tilde{z})|^2 \frac{(2k + \tilde{z})^2}{\tilde{z}^3}) + \frac{|w(\tilde{z})|^2 (2k + \tilde{z})}{\tilde{z}^3} \right. \\ \left. - ku_{200}(\tilde{z}) - v_{200}(\tilde{z})] d\tilde{z} \right). \end{aligned}$$

В старшем порядке, справа от резонансной точки решение h можно сплести с линейной комбинацией решений f и $\bar{f}$

$$h(x, k, t) \sim d_1(k, t)f + d_2(k, t)\bar{f}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_1(k, t) &= \frac{1}{\beta(k)} e^{\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{2k^2}} e^{-\frac{3\pi B}{4}}, \\ d_2(k, t) &= \frac{1}{\beta(k)} e^{-iB(z_0) \ln t} \sqrt{2\pi} \frac{ike^{\frac{i\pi}{4}}}{w\Gamma(iB)} s^{iB} e^{-\frac{\pi B}{4}} e^{2ik^2t}. \end{aligned}$$

В итоге, мы получаем асимптотические формулы для $a(k)$ и $b(k, t)$

$$\begin{aligned} a(k) &= \overline{c(k, t)} \frac{1}{\beta(k)} e^{-\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{2k^2}} e^{-\frac{3\pi B}{4}} = \frac{\overline{\alpha(k)}}{\beta(k)} e^{-\pi B}, \\ b(k, t) &= -c(k, t) d_2(k, t) \\ &= \alpha(k) e^{-\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{k^2}} \frac{1}{\beta(k)} e^{-iB(z_0) \ln t} \sqrt{2\pi} \frac{ike^{\frac{i\pi}{4}}}{w\Gamma(iB)} e^{-\frac{\pi B}{2}} e^{2ik^2t}. \end{aligned}$$

Функция $a(k)$ получилась (как и должно быть в соответствии с леммой 2.4) не зависящей от времени. Зависимость от времени функции

$b(k, t)$ изначально выглядит сложнее чем диктует лемма 2.4. Однако если потребовать, чтобы было выполнено равенство

$$B(k) = -\frac{|w(z_0)|^2}{k^2},$$

то получается нужная динамика. Легко видеть, что функции $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ имеют единичный модуль. Следовательно,

$$|a(k)| = e^{-\pi B}.$$

Отсюда находим

$$B = -\frac{1}{\pi} \ln |a(k)|.$$

Таким образом, в частности мы находим модуль функции $w(z)$. Окончательно, формула для $w(z)$ получается из соотношения для функции $b(k, t)$

$$w(z) = \frac{\alpha(k)}{b(k, 0)} e^{-\frac{i \ln t |w(z_0)|^2}{k^2}} \frac{1}{\beta(k)} e^{-iB(z_0) \ln t} \sqrt{2\pi} \frac{ik e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma(iB)} e^{-\frac{\pi B}{2}}.$$

Видно, что правая часть равенства содержит функцию $b(k, 0)$, т.е. спектральные данные в нулевой момент времени, а также функции $B(z)$ и $|w(z)|^2$, которые мы уже знаем. Функции $v_{200}(z)$ и $u_{200}(z)$ также выражаются через $|w(z)|$. Таким образом, мы нашли аргумент комплексно значной функции $w(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Alber, G. Luther, G. Marsden, *Energy dependent Schrödinger operators and complex Hamiltonian systems on Riemann surfaces...*,
2. M. Antonowicz, A. Fordy, *A Family of Completely Integrable Multi-Hamiltonian Systems*. — Physics Letters A, **122**, No. 2 (1987), 95–99.
3. M. Jaulent, *On an inverse scattering problem with an energy dependent potential*. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, **17** (1972), 363–378.
4. M. Jaulent, C. Jean C, *The inverse problem for the one-dimensional Schrödinger operator with an energy dependent potential*, I, II. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, **25** (1976), 129–134.
5. D. Kaup, *A higher-order water wave equation and the method of solving it*. — Prog. Theor. Phys., **54** (1975), 396–402.
6. A. Laptev, R. Shterenberg, V. Sukhanov, *Inverse Spectral Problem for Shroedinger Operator with Energy Depending Potentials*.— Centre de Recherheres Mathematiques CRM Proseedings and Lecture Notes, **42** (2007), . 1–11.
7. D. Sattinger and J. Sznigielski, *Energy dependent scattering theory*. — Diff. Integral Equations, **8** (1995), 945–959.

8. D. Sattinger, J. Sznigielski, *A Riemann-Hilbert problem for an energy dependent Schrödinger operator*. — Inverse Problems, **12** (1996), 1003–1025.
9. H. Segur, M. J. Ablowitz, *Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation. I*. — J. Math. Phys., **17**, No. 5 (1976), 710–713.
10. V. Sukhanov *Asymptotic behavior of solutions of a system of the KdV type associated with the Schrödinger operator with an energy-dependent potential*. — Russian J. Nonlinear Dynamics, **16**, No. 1 (2020), 173–179
11. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, *Asymptotic behavior of non-linear wave systems integrated by the inverse scattering method*. — JETP, **44**, No. 1 (1976), 106.

Sukhanov V. V. Asymptotic behavior of solutions of a system of the KdV type associated with the Schrödinger operator with an energy-dependent potential.

In this paper, we continue to study the asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for a nonlinear KdV-type system

$$-v_t = -\frac{1}{4}u_{xxx} + vu_x + \frac{1}{2}uv_x, \quad -u_t = \frac{3}{2}uu_x + v_x,$$

associated with the spectral Schrödinger operator with an energy-dependent potential. In the previous paper (see [10]), using a set of integrals of motion for this system, we found the amplitude of the asymptotic solution through the spectral data for the initial condition of the Cauchy problem. In the present paper, using another method (Zakharov and Manakov), we obtain an expression not only for the amplitude, but also for the phase of the solution of the KdV-type system.

С.-Петербургский государственный
университет, НИИФ
Ульяновская ул., 1
Петродворец, 198904 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vvsukhanov@mail.ru

Поступило 27 сентября 2025 г.