

В. А. Слоущ, Н. М. Фаддеева

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§0. ВВЕДЕНИЕ

Работа относится к теории усреднения в пределе малого периода (*гомогенизации*) периодических дифференциальных операторов (ДО). Класс периодических задач математической физики, изучаемых с точки зрения теории усреднения, крайне широк. Этим задачам посвящена обширная литература. Отметим прежде всего книги [1, 2, 10]. В серии работ [3–6] был предложен новый теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения. В этих работах изучался широкий класс матричных периодических ДО, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$\mathcal{A} = f(x)^* b(\mathbf{D})^* g(x) b(\mathbf{D}) f(x), \quad (0.1)$$

где $g(x)$ – ограниченная и равномерно положительно определённая $(m \times m)$ -матрица, $f(x)$ – $(n \times n)$ -матрица, причём $f, f^{-1} \in L_\infty$. Предполагается, что коэффициенты $g(x)$, $f(x)$ периодичны относительно некоторой решётки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Далее, через $b(\mathbf{D})$ в (0.1) обозначен $(m \times n)$ -матричный однородный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geq n$ и символ $b(\xi)$ имеет ранг n при всех $\xi \neq 0$. При сделанных предположениях оператор $\mathcal{A}$ эллиптичен.

Ниже систематически используется обозначение $F^\varepsilon(x) := F\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$.

Основной объект исследования в вышеперечисленных работах – это оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(x))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(x) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(x),$$

действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, коэффициенты которого быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ключевые слова: теория усреднения, операторные оценки, оператор Дирака, сингулярный магнитный потенциал, матричный потенциал.

Работа поддержана РФФ (грант No. 22-11-00092-П).

В [3] был найден старший член аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка ε . Важно отметить, что характер аппроксимации различен для случаев, когда $f(x)$ – единичная матрица и когда это не так. В первом случае, когда

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(x) b(\mathbf{D}),$$

было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте *эффективного оператора*

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}),$$

где g^0 – постоянная *эффективная матрица*. Более того, выполнена оценка

$$\left\| (\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\varepsilon.$$

В случае, когда $f(x)$ непостоянна, уже не удаётся найти эффективный оператор, к резольвенте которого сходилась бы резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$. Однако можно получить аппроксимацию резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ через обобщенную резольвенту *эффективного оператора*, окаймлённую быстро осциллирующими множителями.

Среди операторов, допускающих факторизацию (0.1), в [3, 5, 6] рассматривался двумерный оператор Паули, для которого была получена аппроксимация резольвенты по операторной норме. В работе [8] эти результаты были использованы при усреднении двумерного оператора Дирака, квадрат которого совпадает с двумерным оператором Паули. В [8] рассматривался оператор Дирака с постоянной массой и без электрического потенциала.

В настоящей работе изучается усреднение двумерного самосопряженного оператора Дирака с сингулярным магнитным потенциалом $\varepsilon^{-1} \mathbf{A}^\varepsilon(x)$ и матричным потенциалом $V^\varepsilon(x)$:

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left(D_1 - \frac{1}{\varepsilon} A_1^\varepsilon(x) \right) \sigma_1 + \left(D_2 - \frac{1}{\varepsilon} A_2^\varepsilon(x) \right) \sigma_2 + V^\varepsilon(x), \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр; коэффициенты $\mathbf{A} = (A_1, A_2)^t$ и V предполагаются периодическими с решеткой периодов $\mathbb{Z}^2$. Найдена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{D}_\varepsilon - iI)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$.

Применяется теоретико-операторный подход, разработанный в [3–6]. При этом используется как техника работы [8], так и техника работы [9]. В отличие от [8], где вопрос об аппроксимации резольвенты оператора Дирака сводился к такому же вопросу для резольвенты оператора Паули, мы используем прямое вычисление соответствующей аппроксимации. В случае нулевого электрического потенциала и постоянной массы результаты настоящей работы и работы [8] совпадают.

Ниже через $L_p(U)$ обозначается стандартный L_p -класс на области U . Через $W_p^1(U)$, $p \geq 1$, обозначается стандартный соболевский класс на области U ; $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ – класс функций, для которых произведения на произвольные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ принадлежат классу $W_p^1(\mathbb{R}^2)$. Через $\Omega := [0, 1]^2$ обозначается ячейка решётки $\mathbb{Z}^2$; через $\tilde{\Omega} := [-\pi, \pi]^2$ обозначается ячейка двойственной решётки $(2\pi\mathbb{Z})^2$. Через $\widetilde{W}_p^1(\Omega)$ обозначается подпространство пространства $W_p^1(\Omega)$, состоящее из функций, периодическое продолжение которых принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$. Далее систематически используются обозначения

$$H^1(\mathbb{R}^2) := W_2^1(\mathbb{R}^2), \quad H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) := W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2), \\ H^1(\Omega) := W_2^1(\Omega), \quad \tilde{H}^1(\Omega) := \widetilde{W}_2^1(\Omega).$$

Для всякого банахова пространства $\mathcal{X}$ через $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ обозначается норма в $\mathcal{X}$. Через $\|\cdot\|_\infty$ обозначается норма в пространстве L_∞ . Через σ_j , $j = 1, 2, 3$, обозначаются матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Через D_j , $j = 1, 2$, обозначаются операторы $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Для самосопряжённого оператора A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ через $\sigma(A)$, $\rho(A)$, $E_A(X)$, $\text{Dom } A$ и $\text{Ker } A$ обозначаются спектр оператора A , множество регулярных точек оператора A , спектральный проектор оператора A , отвечающий борелевскому множеству X , область определения оператора A и ядро оператора A .

Через $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ обозначается скалярное произведение в $\mathfrak{H}$. Если $e_1, e_2 \in \mathfrak{H}$, то через $\mathcal{L}\{e_1, e_2\}$ обозначается линейная оболочка векторов e_1 и e_2 . Через $[f]$ обозначается оператор умножения на функцию f . Через I обозначается тождественный оператор, а через $\mathbb{1}$ – единичная матрица размера 2×2 .

Через 1_Ω обозначается характеристическая функция ячейки Ω .

Работа состоит из введения, двух параграфов и приложения. Первый параграф посвящен описанию оператора Дирака и формулировке основного результата. Второй параграф содержит доказательство основного результата. Доказательство некоторых технических утверждений вынесено в приложение.

Авторы признательны проф. Т. А. Суслиной за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§1. ДВУМЕРНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ДИРАКА

1.1. Двумерный оператор Дирака. Факторизация оператора Дирака. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ рассматриваем оператор Дирака

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left(D_1 - \frac{1}{\varepsilon} A_1^\varepsilon(x) \right) \sigma_1 + \left(D_2 - \frac{1}{\varepsilon} A_2^\varepsilon(x) \right) \sigma_2 + V^\varepsilon(x), \quad (1.1)$$

$$\text{Dom } \mathcal{D}_\varepsilon = H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2), \quad \varepsilon > 0.$$

Предполагается, что *магнитный потенциал* $\mathbf{A}(x) = (A_1(x), A_2(x))^t$ удовлетворяет условиям

$$A_j(x+n) = A_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad A_j = \overline{A_j} \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad (1.2)$$

$$p > 2, \quad j = 1, 2;$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} = 0, \quad \int_{\Omega} A_j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2; \quad (1.3)$$

матричный потенциал $V(x)$ удовлетворяет условиям

$$V(x) = V^*(x) = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x) \\ V_{21}(x) & V_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad V(x+n) = V(x), \quad (1.4)$$

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{Z}^2;$$

$$V_{ij} \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.5)$$

При условиях (1.2), (1.4) и (1.5) оператор $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, самосопряжён. Условия (1.3) представляют собой условия калибровки. Равенство $\text{div } \mathbf{A}(x) = 0$ в условии (1.3) понимается в смысле теории распределений. Внедиагональные элементы матрицы V не предполагаются вещественными.

Важным примером оператора Дирака с матричным потенциалом является оператор Дирака с переменной массой и электрическим потенциалом

$$V(x) = \mu(x) \sigma_3 + \mathcal{V}(x) I.$$

Здесь *переменная масса* $\mu(x)$ и *электрический потенциал* $\mathcal{V}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \mu(x+n) &= \mu(x), \quad \mathcal{V}(x+n) = \mathcal{V}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \\ \mu &= \bar{\mu}, \quad \mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2. \end{aligned}$$

При условиях (1.2), (1.3) существует единственное (см., например, [3, глава 6, §2]) $\mathbb{Z}^2$ -периодическое решение задачи

$$\begin{cases} \nabla \varphi(x) = (A_2(x), -A_1(x))^t, \\ \int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Отметим, что из (1.2), (1.6) вытекает включение $\varphi \in \widetilde{W}_p^1(\Omega)$. Определим $\mathbb{Z}^2$ -периодические функции ω_+ , ω_- , полагая $\omega_{\pm}(x) = e^{\pm \varphi(x)}$, и введём обозначения

$$f_0(x) := \begin{pmatrix} \omega_+(x) & 0 \\ 0 & \omega_-(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{E} := \begin{pmatrix} 0 & \partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{\pm} = D_1 \pm iD_2.$$

Функция φ принадлежит $\widetilde{W}_p^1(\Omega)$, $p > 2$, а потому в силу теоремы вложения Соболева принадлежит и некоторому классу Гёльдера. Соответственно, функции $\omega_{\pm}$ также принадлежат некоторому классу Гёльдера и являются мультипликаторами как в $H^1(\mathbb{R}^2)$, так и в $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Оператор (1.1) допускает (см., напр., [3]) представление

$$\mathcal{D}_{\varepsilon} = f_0^{\varepsilon} \mathcal{E} f_0^{\varepsilon} + V^{\varepsilon}(x). \quad (1.7)$$

Удобно принять представление (1.7) за *определение* оператора $\mathcal{D}_{\varepsilon}$, предполагая, что $\omega_{\pm}$ – произвольные $\mathbb{Z}^2$ -периодические функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &\in L_{\infty}(\mathbb{R}^2), \quad \omega_{\pm}(x) > 0, \quad \omega_+(x)\omega_-(x) = 1, \\ \omega_{\pm}(x+n) &= \omega_{\pm}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Итак, далее считаем, что оператор $\mathcal{D}_{\varepsilon}$ задаётся выражением (1.7) на области определения

$$\text{Dom } \mathcal{D}_{\varepsilon} := \{u \in L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) : f_0^{\varepsilon} u \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)\}.$$

Так определенный оператор $\mathcal{D}_\varepsilon$ самосопряжен, $\lambda = i$ – регулярная точка оператора $\mathcal{D}_\varepsilon$. Мы исследуем поведение резольвенты $(\mathcal{D}_\varepsilon - iI)^{-1}$ при малом ε .

1.2. Основной результат. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1.1. При условиях (1.4), (1.5) и (1.8) справедлива оценка

$$\left\| (\mathcal{D}_\varepsilon - iI)^{-1} - \Xi^\varepsilon (\mathcal{D}^0 - iI)^{-1} \Xi^\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)} \leq C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.9)$$

Здесь $\mathcal{D}^0 := \gamma(D_1\sigma_1 + D_2\sigma_2) + V^0$ – эффективный оператор,

$$\begin{aligned} \Xi(x) &= \begin{pmatrix} \hat{\omega}_-(x) & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_+(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega}_\pm(x) = \omega_\pm(x) \|\omega_\pm\|_{L_2(\Omega)}^{-1}; \\ V^0 &= \int_{\Omega} \Xi(x) V(x) \Xi(x) dx; \\ \gamma &= \int_{\Omega} \hat{\omega}_+(x) \hat{\omega}_-(x) dx = \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-1} \|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Константа C зависит только от p , $\|\omega_+\|_\infty$, $\|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\omega_-\|_\infty$, $\|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|V\|_{L_p(\Omega)}$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

2.1. Масштабное преобразование. Преобразование Гельфанда. Определим масштабное преобразование: $T_\varepsilon u(x) = \varepsilon u(\varepsilon x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, которое при всех $\varepsilon > 0$ является унитарным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$. Справедливы соотношения

$$T_\varepsilon \mathcal{D}_\varepsilon T_\varepsilon^* = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}(\varepsilon), \quad T_\varepsilon \mathcal{D}^0 T_\varepsilon^* = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}^0(\varepsilon), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varepsilon) &= f_0 \mathcal{E} f_0 + \varepsilon V(x), \quad \text{Dom } \mathcal{D}(\varepsilon) = \{u \in L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) : f_0 u \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)\}; \\ \mathcal{D}^0(\varepsilon) &= \gamma(D_1\sigma_1 + D_2\sigma_2) + \varepsilon V^0, \quad \text{Dom } \mathcal{D}^0(\varepsilon) = H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2). \end{aligned}$$

Из (2.1) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} T_\varepsilon (\mathcal{D}_\varepsilon - iI)^{-1} T_\varepsilon^* &= \varepsilon (\mathcal{D}(\varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}, \\ T_\varepsilon (\mathcal{D}^0 - iI)^{-1} T_\varepsilon^* &= \varepsilon (\mathcal{D}^0(\varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что оценка (1.9) эквивалентна неравенству

$$\left\| (\mathcal{D}(\varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} - \Xi (\mathcal{D}^0(\varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \Xi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)} \leq C. \quad (2.3)$$

Определим преобразование Гельфанда

$$\tilde{u}(x, k) = \mathcal{U} u(x, k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} u(x + n) e^{-i(x+n)k}, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2).$$

Определённое на классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ продолжается до унитарного оператора из $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ на

$$L_2(\tilde{\Omega} \times \Omega; \mathbb{C}^2) = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) dk.$$

Класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ под действием преобразования Гельфанда отображается на прямой интеграл пространств $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$:

$$\mathcal{U} H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2) dk = L_2(\tilde{\Omega}; \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)).$$

Операторы $\mathcal{D}(\varepsilon)$, $\mathcal{D}^0(\varepsilon)$ частично диагонализуются с помощью преобразования Гельфанда. Именно, справедливы соотношения

$$\mathcal{U} \mathcal{D}(\varepsilon) \mathcal{U}^* = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{D}(k, \varepsilon) dk, \quad \mathcal{U} \mathcal{D}^0(\varepsilon) \mathcal{U}^* = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{D}^0(k, \varepsilon) dk. \quad (2.4)$$

Иными словами, справедливы равенства

$$\mathcal{U} \mathcal{D}(\varepsilon) \mathcal{U}^* \tilde{u}(x, k) = \mathcal{D}(k, \varepsilon) \tilde{u}(x, k), \quad \mathcal{U} \mathcal{D}^0(\varepsilon) \mathcal{U}^* \tilde{u}(x, k) = \mathcal{D}^0(k, \varepsilon) \tilde{u}(x, k).$$

Здесь операторы $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$ и $\mathcal{D}^0(k, \varepsilon)$ определены следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k, \varepsilon) &= f_0 \mathcal{E}(k) f_0 + \varepsilon V, \quad \mathcal{E}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_-(k) \\ \partial_+(k) & 0 \end{pmatrix}, \\ \partial_{\pm}(k) &= (D_1 + k_1) \pm i(D_2 + k_2), \\ \text{Dom } \mathcal{D}(k, \varepsilon) &= \{u \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) : f_0 u \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)\}; \\ \mathcal{D}^0(k, \varepsilon) &= \gamma((D_1 + k_1) \sigma_1 + (D_2 + k_2) \sigma_2) + \varepsilon V^0, \\ \text{Dom } \mathcal{D}^0(k, \varepsilon) &= \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.4) следуют равенства

$$\mathcal{U} (\mathcal{D}(\varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \mathcal{U}^* = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} dk; \quad (2.6)$$

$$\mathcal{U} \Xi (\mathcal{D}^0(\varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \Xi \mathcal{U}^* = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \Xi (\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \Xi dk. \quad (2.7)$$

В силу (2.6) и (2.7) оценка (2.3) вытекает из неравенства

$$\left\| (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} - \Xi (\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \Xi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)} \leq C, \quad (2.8)$$

$\varepsilon > 0, k \in \tilde{\Omega}.$

2.2. Спектральные свойства оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$.

Лемма 2.1. *Справедливо соотношение*

$$\text{Ker } \mathcal{D}(0, 0) = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} \omega_- \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_+ \end{pmatrix} \right\}.$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля

$$\|\partial_{\pm}(0)u\|_{L_2(\Omega)}^2 = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |n|^2 |\hat{u}_n|^2,$$

если

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{u}_n e^{2\pi i n x}, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega),$$

имеет место равенство $\text{Ker } \partial_{\pm}(0) = \mathcal{L}\{\mathbf{1}_{\Omega}\}$. Далее, соотношение

$$\mathcal{D}(0, 0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

эквивалентно системе уравнений $\partial_-(0)\omega_- u_2 = 0, \partial_+(0)\omega_+ u_1 = 0$, откуда получаем $u_1 = c_1 \omega_-$, $u_2 = c_2 \omega_+$. $\square$

Поскольку $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$, область определения оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$, равная $[f_0^{-1}] \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$, компактно вкладывается в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$, а потому спектр оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$ дискретен при всех $k \in \tilde{\Omega}$, $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 2.1, точка 0 – изолированное собственное значение оператора $\mathcal{D}(0, 0)$ кратности 2. Обозначим через d_0 расстояние от 0 до оставшегося спектра оператора $\mathcal{D}(0, 0)$:

$d_0 = \text{dist} \{0, \sigma(\mathcal{D}(0, 0)) \setminus \{0\}\}$. Из вариационных соображений (см. подробнее [3, гл. 2, п. 2.2]) нетрудно вывести оценки

$$2\pi \left(\max \left\{ \|\omega_+\|_\infty^2, \|\omega_-\|_\infty^2 \right\} \right)^{-1} \leq d_0 \leq 2\pi \max \left\{ \|\omega_+\|_\infty^2, \|\omega_-\|_\infty^2 \right\}.$$

Определим кольцо $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} : \frac{d_0}{3} \leq |z| \leq \frac{2d_0}{3}\}$; введем также обозначения

$$\mathbf{M} := \max \left\{ \|\omega_+\|_\infty^2, \|\omega_-\|_\infty^2 \right\},$$

$$\Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) := \mathcal{D}(k, \varepsilon) - \mathcal{D}(0, 0) = f_0(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2)f_0 + \varepsilon V.$$

Лемма 2.2. *При условиях (1.4), (1.5), (1.8) для $\zeta \in \mathcal{R}$ справедливо неравенство*

$$\|\Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon)(\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq C_0(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Величина C_0 зависит только от p , $\mathbf{M}$ и $\|V\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Из очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \| [f_0] \|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} &\leq \mathbf{M}^{1/2}, \quad \| [k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2] \|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq |k|, \\ k &= (k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}, \end{aligned}$$

вытекает оценка

$$\begin{aligned} \| f_0(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2)f_0(\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} &\leq 3\mathbf{M}|k|d_0^{-1}, \\ k &= (k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}, \quad \zeta \in \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В силу следствия 3.7 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \| \varepsilon V(\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} &\leq 6\varepsilon C_p \mathbf{M} \|V\|_{L_p(\Omega)} (1 + d_0^{-1}), \\ \zeta &\in \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь величина C_p зависит только от p . Теперь (2.9) вытекает из (2.10) и (2.11). При этом

$$C_0 = 3\mathbf{M}(d_0^{-2} + 4C_p^2 \|V\|_{L_p(\Omega)}^2 (1 + d_0^{-1})^2)^{1/2}. \quad \square$$

Далее, положим $\delta_0 = (4C_0)^{-1}$, где C_0 – константа в правой части (2.9).

Следствие 2.3. *При условиях (1.4), (1.5), (1.8) и $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$ кольцо $\mathcal{R}$ не пересекается со спектром оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$, и справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq 4d_0^{-1}, \quad \zeta \in \mathcal{R}, \quad (2.12)$$

$$\|(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq d_0^{-1}, \quad \zeta \in \mathcal{R}. \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$. Согласно лемме 2.2, при $\zeta \in \mathcal{R}$ справедлива оценка

$$\|\Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon)(\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq C_0 \delta_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (2.14)$$

Следовательно, при каждом $\zeta \in \mathcal{R}$ существует ограниченная резольвента $(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1}$, допускающая представление

$$(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1} = (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon)(\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1})^n. \quad (2.15)$$

Оценки (2.12) и (2.13) вытекают из (2.14) и (2.15). $\square$

Предложение 2.4. Пусть выполнены условия (1.4), (1.5), (1.8) и $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} E_{\mathcal{D}(k, \varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] &= 2, \\ \sigma(\mathcal{D}(k, \varepsilon)) \cap \left(-\frac{2d_0}{3}, -\frac{d_0}{3} \right) &= \sigma(\mathcal{D}(k, \varepsilon)) \cap \left(\frac{d_0}{3}, \frac{2d_0}{3} \right) = \emptyset. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу следствия 2.3 интервалы $(-\frac{2d_0}{3}, -\frac{d_0}{3})$ и $(\frac{d_0}{3}, \frac{2d_0}{3})$ свободны от спектра оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$ при $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$.

Введем контур $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{d_0}{2}\}$. Согласно формуле Рисса (см., например, [7]) имеем

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{D}(k, \varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] - E_{\mathcal{D}(0, 0)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] \\ = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} ((\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.13) и (2.16) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \left\| E_{\mathcal{D}(k, \varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] - E_{\mathcal{D}(0, 0)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] \right\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} &\leq \frac{1}{2}, \\ (\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} &\leq \delta_0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из неравенства (2.17) следует (см. [7], I.4.6), что при $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$ справедливы соотношения

$$\operatorname{rank} E_{\mathcal{D}(k,\varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] = \operatorname{rank} E_{\mathcal{D}(0,0)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] = 2. \quad \square$$

2.3. Аппроксимации операторов $E_{\mathcal{D}(k,\varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right]$ и $\mathcal{D}(k,\varepsilon)E_{\mathcal{D}(k,\varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right]$ при малых k, ε . Обозначим для краткости $E_{\mathcal{D}(k,\varepsilon)} \left[-\frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3} \right] =: F(k,\varepsilon)$. При этом $F(0,0) =: P$ – ортопроектор на $\operatorname{Ker} \mathcal{D}(0,0)$. Как и выше, положим $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{d_0}{2}\}$. Воспользуемся предложением 2.4; при $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$ в силу формулы Рисса справедливы представления

$$F(k,\varepsilon) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathcal{D}(k,\varepsilon) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{D}(k,\varepsilon)F(k,\varepsilon) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathcal{D}(k,\varepsilon) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta. \quad (2.19)$$

Здесь контур Γ обходится против часовой стрелки.

Предложение 2.5. При условиях (1.4), (1.5), (1.8) и $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$ справедлива оценка

$$\|F(k,\varepsilon) - P\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega;\mathbb{C}^2)} \leq 2C_0(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2}. \quad (2.20)$$

Здесь C_0 определена в лемме 2.2.

Доказательство. Из (2.9), (2.12) и резольвентного тождества

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}(k,\varepsilon) - \zeta I)^{-1} \\ &= (\mathcal{D}(0,0) - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{D}(k,\varepsilon) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k,\varepsilon) (\mathcal{D}(0,0) - \zeta I)^{-1}, \quad \zeta \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.21)$$

вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}(k,\varepsilon) - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{D}(0,0) - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega;\mathbb{C}^2)} \\ & \leq 4d_0^{-1} C_0(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2}, \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Используя (2.18) и (2.22), получаем (2.20). $\square$

Предложение 2.6. При условиях (1.4), (1.5), (1.8) и $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{D}(k,\varepsilon)F(k,\varepsilon) - P\Delta \mathcal{D}(k,\varepsilon)P\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega;\mathbb{C}^2)} \leq d_0 C_0^2(\varepsilon^2 + |k|^2). \quad (2.23)$$

Здесь C_0 – та же, что и в лемме 2.2.

Доказательство. Проитерируем резольвентное тождество (2.21):

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1} &= (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \\ &\quad - (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \\ &\quad + (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}, \\ &\quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Введём обозначение

$$\begin{aligned} Z(k, \varepsilon, \zeta) \\ := (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}, \\ \zeta \in \Gamma. \end{aligned}$$

Из (2.9) и (2.12) следует оценка

$$\|Z(k, \varepsilon, \zeta)\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq 4d_0^{-1} C_0^2 (\varepsilon^2 + |k|^2), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.24) в (2.19), получаем

$$\mathcal{D}(k, \varepsilon) F(k, \varepsilon) = G_0 + G_1(k, \varepsilon) + G_2(k, \varepsilon), \quad (2.26)$$

где

$$G_0 = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta, \quad (2.27)$$

$$G_1(k, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} \zeta d\zeta, \quad (2.28)$$

$$G_2(k, \varepsilon) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} Z(k, \varepsilon, \zeta) \zeta d\zeta. \quad (2.29)$$

Заметим, что $G_0 = 0$ в силу (2.27). Далее, из (2.25), (2.29) и равенства $|\zeta| = \frac{d_0}{2}$, $\zeta \in \Gamma$, вытекает оценка

$$\|G_2(k, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq d_0 C_0^2 (\varepsilon^2 + |k|^2). \quad (2.30)$$

Для вычисления $G_1(k, \varepsilon)$ используем разложение резольвенты оператора $\mathcal{D}(0, 0)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} &= (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} P + (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1} (I - P) \\ &= -\frac{1}{\zeta} P + R_0^{\perp}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Функция $R_0^\perp(\zeta) := (\mathcal{D}(0, 0) - \zeta I)^{-1}(I - P)$ голоморфна внутри контура Γ . Из (2.28) и (2.31) следуют равенства

$$G_1(k, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(-\frac{1}{\zeta} P + R_0^\perp(\zeta) \right) \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) \left(-\frac{1}{\zeta} P + R_0^\perp(\zeta) \right) \zeta d\zeta \quad (2.32)$$

$$= P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P.$$

Соотношения (2.26), (2.30) и (2.32) приводят к (2.23). $\square$

2.4. Оценка нормы резольвенты $(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}$.

Лемма 2.7. При условиях (1.4), (1.5) и (1.8) справедливо неравенство

$$\|(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq C_1 + C_2(\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}, \quad (2.33)$$

$$\varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

Константы C_1, C_2 зависят только от $p, \mathbf{M}$ и $\|V\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Воспользуемся резольвентным тождеством (ср. (2.21))

$$(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} = (\mathcal{D}(k, 0) - i\varepsilon I)^{-1} - (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \varepsilon V (\mathcal{D}(k, 0) - i\varepsilon I)^{-1},$$

$$\varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}. \quad (2.34)$$

Теперь осталось заметить, что (2.33) следует из (2.34), (3.5), (3.15) и очевидного неравенства

$$\|\varepsilon(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq 1, \quad \varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

При этом $C_1 = 4C_p \mathbf{M}^2 \|V\|_{L_p(\Omega)}$, $C_2 = \mathbf{M} + 2C_p \mathbf{M}^2 \|V\|_{L_p(\Omega)}$. $\square$

2.5. Операторы $P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P$ и $(P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P - i\varepsilon I)^{-1} P$. Как и выше, через $\Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon)$ мы будем обозначать оператор

$$\Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) := \mathcal{D}(k, \varepsilon) - \mathcal{D}(0, 0) = f_0(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) f_0 + \varepsilon V,$$

а через P — ортопроектор на $\text{Ker } \mathcal{D}(0, 0)$. Также будем использовать обозначение $\hat{\omega}_\pm = \omega_\pm / \|\omega_\pm\|_{L_2(\Omega)}$. Оператор P допускает матричное представление

$$P = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}, \quad \text{где } P_\pm := (\cdot, \hat{\omega}_\pm)_{L_2(\Omega)} \hat{\omega}_\pm. \quad (2.35)$$

Определим скалярный проектор на константы $P_0 := (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} \mathbf{1}_\Omega$ и матричный проектор на константы

$$\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Из (2.35) нетрудно вывести соотношение $P = \Xi \mathbb{P}_0 \Xi$, где матрица $\Xi(x)$ определена в (1.10). Следовательно, оператор $P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P$ допускает представление

$$P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P = \Xi \mathbb{P}_0 \Xi (f_0(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) f_0 + \varepsilon V) \Xi \mathbb{P}_0 \Xi, \quad \varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}. \quad (2.36)$$

Прямым вычислением нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} \Xi f_0(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) f_0 \Xi &= \gamma(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2), \\ \mathbb{P}_0(\gamma(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) + \varepsilon \Xi V \Xi) \mathbb{P}_0 &= (\gamma(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) + \varepsilon V^0) \mathbb{P}_0, \\ \varepsilon > 0, \quad k &= (k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь число $\gamma > 0$ и матрица V^0 определены в (1.10). Обозначим для краткости $\gamma(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2) + \varepsilon V^0 =: \mathcal{B}(k, \varepsilon)$. Из (2.36) и (2.37) следует, что

$$P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P = \Xi \mathcal{B}(k, \varepsilon) \mathbb{P}_0 \Xi, \quad k = (k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}. \quad (2.38)$$

Лемма 2.8. *При условиях (1.4), (1.5), (1.8) имеет место соотношение*

$$(P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P - i\varepsilon I)^{-1} P = \Xi \mathbb{P}_0 (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} \mathbb{P}_0 \Xi, \quad \varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}. \quad (2.39)$$

Доказательство. Из равенства $(P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) P - i\varepsilon I)^{-1} P v = u$ следуют соотношения

$$u = Pu, \quad P \Delta \mathcal{D}(k, \varepsilon) Pu - i\varepsilon Pu = Pv.$$

Перепишем последнюю систему с учётом равенства $P = \Xi \mathbb{P}_0 \Xi$ и (2.38):

$$u = \Xi \mathbb{P}_0 \Xi u, \quad \Xi (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1}) \mathbb{P}_0 \Xi u = \Xi \mathbb{P}_0 \Xi v. \quad (2.40)$$

Из (2.40) вытекает, что $u = \Xi (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} \mathbb{P}_0 \Xi v$, что и приводит к (2.39). $\square$

Из (2.39) и (3.17) вытекает следующее следствие.

Следствие 2.9. При условиях (1.4), (1.5), (1.8) имеет место неравенство

$$\|(P\Delta\mathcal{D}(k, \varepsilon)P - i\varepsilon I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq S(\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

Здесь $S = 2^{1/2} \mathbf{M} \max\{\|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-2}\}(1 + |V^0|)\gamma^{-1}$.

Замечание 2.10. В силу (1.10) верно неравенство

$$|V^0| \leq \|\Xi\|_{\infty}^2 \|V\|_{L_1(\Omega)} \leq \mathbf{M} \max\{\|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-2}\} \|V\|_{L_p(\Omega)},$$

и значит константа S контролируется в терминах величин $\|\omega_+\|_{\infty}$, $\|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\omega_-\|_{\infty}$, $\|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|V\|_{L_p(\Omega)}$.

Пространство $\mathbb{P}_0 L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$ приводит оператор $\mathcal{D}^0(k, \varepsilon)$, и справедливо очевидное равенство $(\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I) \mathbb{P}_0 = (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1}) \mathbb{P}_0$. Следовательно,

$$(\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \mathbb{P}_0 = (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} \mathbb{P}_0.$$

Далее, из (2.39) вытекает

$$P(P\Delta\mathcal{D}(k, \varepsilon)P - i\varepsilon I)^{-1}P = \Xi \mathbb{P}_0 (\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \mathbb{P}_0 \Xi, \quad (2.42)$$

$$\varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

2.6. Аппроксимация резольвенты $(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}$.

Предложение 2.11. При условиях (1.4), (1.5) и (1.8) справедливо неравенство

$$\|(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} - \Xi \mathbb{P}_0 (\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} \mathbb{P}_0 \Xi\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq \mathbf{S}, \quad (2.43)$$

$$\varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

Константа $\mathbf{S}$ зависит только от p , $\|V\|_{L_p(\Omega)}$, $\mathbf{M}$ и $\|\omega_{\pm}\|_{L_2(\Omega)}$.

Доказательство. При условии $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} > \delta_0$ неравенство вида (2.43) с постоянной $C_1 + C_2 \delta_0^{-1} + S \delta_0^{-1}$ следует из неравенств (2.33) и (2.41). При условии $(\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0$ резольвенту $(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}$ представим в виде

$$(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} = (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} F(k, \varepsilon) + (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} (I - F(k, \varepsilon)). \quad (2.44)$$

Для второго слагаемого в (2.44) справедлива очевидная оценка

$$\|(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} (I - F(k, \varepsilon))\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq 3d_0^{-1}.$$

Таким образом, с учетом (2.42) нам остается проверить неравенство

$$\|(\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} F(k, \varepsilon) - P(P\Delta\mathcal{D}(k, \varepsilon)P - i\varepsilon I)^{-1} P\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq \mathbf{S}_1, \\ \varepsilon > 0, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad (\varepsilon^2 + |k|^2)^{1/2} \leq \delta_0. \quad (2.45)$$

Из очевидного тождества

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} F(k, \varepsilon) - P(P\Delta\mathcal{D}P - i\varepsilon I)^{-1} P \\ &= F(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} (P\Delta\mathcal{D}P - \mathcal{D}(k, \varepsilon)F(k, \varepsilon)) (P\Delta\mathcal{D}P - i\varepsilon I)^{-1} P \\ &+ F(k, \varepsilon) (\mathcal{D}(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1} (F(k, \varepsilon) - P) + (F(k, \varepsilon) - P) (P\Delta\mathcal{D}P - i\varepsilon I)^{-1} P, \end{aligned}$$

и оценок (2.20), (2.23), (2.33), (2.41) следует оценка (2.45). При этом

$$\mathbf{S}_1 = C_0(C_1\delta_0 + C_2)(d_0C_0S + 2) + 2C_0S.$$

Следовательно, верно неравенство (2.43) с константой

$$\mathbf{S} = \max\{C_1 + C_2\delta_0^{-1} + S\delta_0^{-1}, 3d_0^{-1} + \mathbf{S}_1\}. \quad \square$$

Из (2.43) и (3.21) вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.12. *При условиях (1.4), (1.5) и (1.8) справедлива оценка (2.8) с константой*

$$C = \mathbf{S} + \mathbf{C}\pi^{-1}\mathbf{M} \max\{\|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-2}\}.$$

Здесь $\mathbf{S}$ определена в предложении 2.11, $\mathbf{C}$ определена в следствии 3.9.

Доказательство теоремы 1.1. Как было отмечено в п. 2.1, оценка (1.9) эквивалентна неравенству (2.3), а (2.3) равносильно неравенству (2.8). Поэтому (1.9) вытекает из предложения 2.12. $\square$

§3. ПРИЛОЖЕНИЕ

3.1. Необходимые оценки операторов $\partial_{\pm}(k)$ и $\mathcal{E}(k)$. В $L_2(\Omega)$ рассмотрим операторы $\partial_{\pm}(k) := D_1 + k_1 \pm i(D_2 + k_2)$, $k = (k_1, k_2) \in \tilde{\Omega}$, на области определения $\tilde{H}^1(\Omega)$. Операторы $\partial_{\pm}(k)$ диагонализуются унитарным дискретным преобразованием Фурье $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^2)$, заданным соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u(n) &= \hat{u}_n = \int_{\Omega} u(x) e^{-2\pi i n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad u \in L_2(\Omega); \\ \mathcal{F}^*v(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{v}_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in \Omega, \quad v = \{\hat{v}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^2} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Для функции $u \in L_2(\Omega)$ справедливо*

$$u \in \tilde{H}^1(\Omega) \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |n|^2 |\hat{u}_n|^2 < +\infty, \quad \{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^2} = \mathcal{F}u.$$

Далее, справедливы соотношения

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (1 + |2\pi n|^2) |\hat{u}_n|^2, \quad \{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^2} = \mathcal{F}u, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega);$$

$$\partial_{\pm}(k)u = \mathcal{F}^* [2\pi n_1 + k_1 \pm i(2\pi n_2 + k_2)] \mathcal{F}u,$$

$$u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad k = (k_1, k_2) \in \tilde{\Omega};$$

$$\|\partial_{\pm}(k)u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |2\pi n + k|^2 |\hat{u}_n|^2,$$

$$\{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^2} = \mathcal{F}u, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

Используя элементарные неравенства

$$|2\pi n + k|^2 \geq |k|^2, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad (3.1)$$

$$|2\pi n + k|^2 \geq |\pi n|^2, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad (3.2)$$

из леммы 3.1 выводим следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Справедливы оценки*

$$\|\partial_{\pm}(k)u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq |k|^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad k \in \tilde{\Omega};$$

$$\|\partial_{\pm}(k)u\|_{L_2(\Omega)}^2 + 4^{-1} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 4^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad k \in \tilde{\Omega}.$$

Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{E}(k)$ в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$, заданный соотношением

$$\mathcal{E}(k)u := \begin{pmatrix} \partial_{-}(k)u_2 \\ \partial_{+}(k)u_1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \text{Dom } \mathcal{E}(k) = \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2).$$

Из леммы 3.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Справедливы оценки*

$$\|\mathcal{E}(k)u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \geq |k|^2 \|u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2), \quad k \in \tilde{\Omega}; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(k)u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 + 4^{-1} \|u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 &\geq 4^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2, \\ u &\in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2), \quad k \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2. Оценки резольвенты оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$. В $L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}(k, \varepsilon) = f_0 \mathcal{E}(k) f_0 + \varepsilon V,$$

$$\text{Dom } \mathcal{D}(k, \varepsilon) = \{u \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) : f_0 u \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)\}, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь f_0 – оператор умножения на матрицу-функцию

$$f_0(x) = \begin{pmatrix} \omega_+(x) & 0 \\ 0 & \omega_-(x) \end{pmatrix};$$

V – оператор умножения на матричный потенциал $V(x)$. Функции $\omega_{\pm}$ удовлетворяют условию (1.8); потенциал $V(x)$ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.5). Оператор $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$, $k \in \tilde{\Omega}$, $\varepsilon > 0$, самосопряжен (см., например, [3] или [8]); область определения $\text{Dom } \mathcal{D}(k, \varepsilon)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$, а потому спектр оператора $\mathcal{D}(k, \varepsilon)$ дискретен.

Как и выше, используем обозначение $\mathbf{M} = \max\{\|\omega_+\|_{\infty}^2, \|\omega_-\|_{\infty}^2\}$.

Лемма 3.4. При условии (1.8) справедливо неравенство

$$\|(\mathcal{D}(k, 0) - i\varepsilon I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq \mathbf{M}(\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что справедливо неравенство

$$\|f_0 u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \geq \mathbf{M}^{-1} \|u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2. \quad (3.6)$$

Далее, для любой $u \in \text{Dom } \mathcal{D}(k, 0)$, $k \in \tilde{\Omega}$,

$$\|(\mathcal{D}(k, 0) - i\varepsilon I)u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 = \|f_0 \mathcal{E}(k) f_0 u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 + \varepsilon^2 \|u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2. \quad (3.7)$$

Из (3.3), (3.6), (3.7) и оценки $\mathbf{M} \geq 1$ (вытекающей из равенства $\omega_+(x)\omega_-(x) = 1$) следует соотношение

$$\|(\mathcal{D}(k, 0) - i\varepsilon I)u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \geq \mathbf{M}^{-2}(|k|^2 + \varepsilon^2) \|u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно (3.5). $\square$

Из теорем вложения вытекает неравенство (см., например, [3] или [8])

$$\|Vu\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq C_p \|V\|_{L_p(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega; \mathbb{C}^2)}, \quad u \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2). \quad (3.8)$$

Здесь $p > 2$, константа C_p зависит только от p ;

$$\|V\|_{L_p(\Omega)}^p := \int_{\Omega} |V(x)|^p dx, \quad |V(x)|^2 := \sum_{i,j=1}^2 |V_{ij}(x)|^2, \quad x \in \Omega.$$

Лемма 3.5. При условиях (1.4), (1.5), (1.8) справедлива оценка

$$\|V(\mathcal{D}(k, 0) - iI)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq 2C_p \mathbf{M} \|V\|_{L_p(\Omega)}, \quad k \in \tilde{\Omega}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Используем очевидные неравенства

$$\|V f_0^{-1}\|_{L_p(\Omega)}^2 \leq \mathbf{M} \|V\|_{L_p(\Omega)}^2; \quad (3.10)$$

$$\|f_0 v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \leq \mathbf{M} \|v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2, \quad v \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^2). \quad (3.11)$$

Для произвольного $u \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$ положим $v := (\mathcal{D}(k, 0) - iI)^{-1}u$. Из (3.4), (3.8), (3.10) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \|Vv\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 &= \|V f_0^{-1} f_0 v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \leq C_p^2 \|V f_0^{-1}\|_{L_p(\Omega)}^2 \|f_0 v\|_{H^1(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \leq \\ &\leq C_p^2 \mathbf{M} \|V\|_{L_p(\Omega)}^2 (4\|\mathcal{E}(k) f_0 v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 + \|f_0 v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее, из (3.6), (3.11), (3.12) следует

$$\begin{aligned} \|Vv\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 &\leq C_p^2 \mathbf{M} \|V\|_{L_p(\Omega)}^2 (4\mathbf{M} \|f_0 \mathcal{E}(k) f_0 v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 + \mathbf{M} \|v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2) \\ &\leq 4C_p^2 \mathbf{M}^2 \|V\|_{L_p(\Omega)}^2 (\|f_0 \mathcal{E}(k) f_0 v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Наконец, из (3.7) (при подстановке $\varepsilon = 1$) и (3.13) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|Vv\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 &\leq 4C_p^2 \mathbf{M}^2 \|V\|_{L_p(\Omega)}^2 \|(\mathcal{D}(k, 0) - iI)v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2 \\ &= 4C_p^2 \mathbf{M}^2 \|V\|_{L_p(\Omega)}^2 \|u\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)}^2. \end{aligned}$$

Последнее соотношение эквивалентно (3.9). $\square$

Из лемм 3.4, 3.5 и тождества Гильберта

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}(k, 0) - \zeta I)^{-1} &= (\mathcal{D}(k, 0) - iI)^{-1} (I + (\zeta - i)(\mathcal{D}(k, 0) - \zeta I)^{-1}), \\ \zeta &\notin \sigma(\mathcal{D}(k, 0)), \quad k \in \tilde{\Omega}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.6. При условиях (1.4), (1.5) и (1.8) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|V(\mathcal{D}(k, 0) - i\varepsilon I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} &\leq 2C_p \mathbf{M}^2 \|V\|_{L_p(\Omega)} (2 + (\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}), \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Пусть, как и выше, d_0 – расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{D}(0, 0)$ и $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \frac{d_0}{3} \leq |z| \leq \frac{2d_0}{3}\}$. Из леммы 3.5 и равенства (3.14) вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 3.7. При условиях (1.4), (1.5), (1.8) при $\zeta \in \mathcal{R}$ справедливо неравенство

$$\|V(\mathcal{D}(0,0) - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega;\mathbb{C}^2)} \leq 6C_p \mathbf{M} \|V\|_{L_p(\Omega)} (1 + d_0^{-1}).$$

3.3. Оценки резольвенты оператора $\mathcal{D}^0(k, \varepsilon)$. В $L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)$ рассмотрим оператор $\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) = \gamma((D_1 + k_1)\sigma_1 + (D_2 + k_2)\sigma_2) + \varepsilon V^0$, на области определения $\text{Dom } \mathcal{D}^0(k, \varepsilon) = \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^2)$. Здесь число $\gamma > 0$ и (2×2) -матрица $V^0 = (V^0)^*$ определены в (1.10). Оператор $\mathcal{D}^0(k, \varepsilon)$ диагонализует унитарным дискретным преобразованием Фурье $\mathbb{F} : L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$, заданным равенствами

$$\mathbb{F}u(n) = \hat{u}_n = \int_{\Omega} u(x) e^{-2\pi i n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad u \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^2);$$

$$\mathbb{F}^*v(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{v}_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in \Omega, \quad v = \{\hat{v}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^2} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2).$$

Как и выше, положим

$$\mathcal{B}(k, \varepsilon) := \gamma(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2) + \varepsilon V^0, \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Нетрудно проверить равенство

$$\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) = \mathbb{F}^* [\mathcal{B}(2\pi n + k, \varepsilon)] \mathbb{F}, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.16)$$

Лемма 3.8. Справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1}\|_{\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2}^{-1} \leq 2^{1/2} \gamma^{-1} (1 + |V^0|) (\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.17)$$

Здесь $|V^0| = \left(\sum_{j,k=1}^2 |V_{jk}^0|^2 \right)^{1/2}$.

Доказательство. Отметим оценку

$$1 = \int_{\Omega} \omega_+(x) \omega_-(x) dx \leq \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)} \|\omega_-\|_{L_2(\Omega)} = \gamma^{-1}. \quad (3.18)$$

Далее, справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}(k, 0) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} &= \begin{pmatrix} -i\varepsilon & \gamma(k_1 - ik_2) \\ \gamma(k_1 + ik_2) & -i\varepsilon \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (\varepsilon^2 + \gamma^2 |k|^2)^{-1} \begin{pmatrix} i\varepsilon & \gamma(k_1 - ik_2) \\ \gamma(k_1 + ik_2) & i\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0, \quad k \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу (3.18), (3.19) норма Гильберта–Шмидта матрицы $(\mathcal{B}(k, 0) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1}$ не превосходит величины

$$\mathbf{S}_2 := 2^{1/2}(\varepsilon^2 + \gamma^2|k|^2)^{-1/2} \leq 2^{1/2}\gamma^{-1}(\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}.$$

Отсюда с учетом резольвентного тождества

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} \\ &= (\mathcal{B}(k, 0) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} - (\mathcal{B}(k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1} \varepsilon V^0 (\mathcal{B}(k, 0) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1}, \quad \varepsilon > 0, \quad k \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

вытекает оценка (3.17). $\square$

Как и выше, определим скалярный проектор на константы

$$P_0 := (\cdot, \mathbf{1}_\Omega)_{L_2(\Omega)} \mathbf{1}_\Omega$$

и матричный проектор на константы

$$\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{pmatrix}.$$

Из (3.1), (3.2), (3.16), леммы 3.8 и соотношений

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}^2} \|(\mathcal{B}(2\pi n + k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1}\|_{\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2}, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}(I - \mathbb{P}_0)\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \|(\mathcal{B}(2\pi n + k, \varepsilon) - i\varepsilon \mathbb{1})^{-1}\|_{\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2}, \quad k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

вытекает

Следствие 3.9. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq \mathbf{C}(\varepsilon^2 + |k|^2)^{-1/2}, \\ & k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}^0(k, \varepsilon) - i\varepsilon I)^{-1}(I - \mathbb{P}_0)\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^2)} \leq \mathbf{C}\pi^{-1}, \\ & k \in \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Здесь $\mathbf{C} = 2^{1/2}\gamma^{-1}(1 + |V^0|)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М. (1984).
2. A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*. — Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York (1978).
3. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*. — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
4. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом корректора*. — Алгебра и анализ **17**, No. 5 (2005), 69–90.
5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*. — Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 1–104.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* . — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
7. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М. (1972).
8. A. A. Kukushkin, *Homogenization of the two-dimensional periodic Dirac operator*. — J. Math. Sci. **189**, No. 3 (2013), 490–507.
9. A. Piatnitski, V. Sloushch, T. Suslina, E. Zhizhina, *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*. — J. Diff. Equations **352** (2023), 153–188.
10. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М. (1993).

Slousch V. A., Faddeeva N. M. Operator estimates for homogenization of the two-dimensional Dirac operator with periodic coefficients.

The paper concerns the homogenization theory of periodic differential operators. We consider a two-dimensional self-adjoint Dirac operator $\mathcal{D}_\varepsilon$ with a singular magnetic potential $\varepsilon^{-1}\mathbf{A}(x/\varepsilon)$ and a matrix potential $V(x/\varepsilon)$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter. The coefficients $\mathbf{A}$ and V are assumed to be periodic. The behavior of the resolvent $(\mathcal{D}_\varepsilon - iI)^{-1}$ for small ε is studied. We obtain an approximation for the resolvent in the operator norm on $L_2(\mathbb{R}^2)$ with a sharp order error estimate. The approximation is given by the resolvent of the effective operator with constant coefficients sandwiched between rapidly oscillating factors.

С.-Петербургский
государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: vsloushch@list.ru

E-mail: faddeevanina@gmail.com

Поступило 3 октября 2025 г.