

С. А. Симонов

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПОЛУОСИ С ЛОКАЛЬНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть L_0 – симметричный положительно определённый вполне несамосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим динамическую систему α с граничным управлением:

$$u(t) \in \text{Dom } L_0^*, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u''(t) + L_0^* u(t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad (3)$$

$$\Gamma_1 u(t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Здесь Γ_1 – первый из двух граничных операторов [10] так называемой граничной тройки Вишика $(\mathcal{K}; \Gamma_1, \Gamma_2)$, где $\mathcal{K} := \text{Ker } L_0^*$ и $\Gamma_1, \Gamma_2 : \text{Dom } L_0^* \rightarrow \mathcal{K}$,

$$\Gamma_1 := L^{-1} L_0^* - I, \quad \Gamma_2 := P_{\mathcal{K}} L_0^*,$$

$P_{\mathcal{K}}$ – проектор на $\mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$, а L – расширение оператора L_0 по Фридрихсу. Построение этой граничной тройки основано на разложении Вишика [8]:

$$\text{Dom } L_0^* = \text{Dom } L_0 \dot{+} \mathcal{K} \dot{+} L^{-1} \mathcal{K}.$$

Граничное управление f представляет собой функцию из класса $\mathcal{C}^\infty([0, \infty); \mathcal{K})$ с носителем $\text{supp } f \subset (0, \infty)$.

В одном из подходов к решению обратных задач, методе граничного управления (ВС-методе, [1, 13, 2, 3]), рассматривают семейство (гнездо) α^T подсистем системы α на конечных интервалах $[0, T]$, $T > 0$. Для каждого T особый интерес представляют «гладкие волны» – решения

Ключевые слова: начально-краевая задача, телеграфное уравнение, матричный оператор Шрёдингера, метод граничного управления, управляющий оператор, задача Гурса.

системы α в момент времени T , $u^f(T) \in \mathcal{H}$, порождаемые гладкими управлениями. Гладкие волны образуют линейал $\mathcal{U}^T$, *достижимое множество*, замыкание которого называется *достижимым подпространством* $\mathcal{U}^T$ системы α^T . Гладкие управления образуют класс $\mathcal{F}^T := \{f \in C^\infty([0, T]; \mathcal{H}) \mid \text{supp } f \subset (0, T]\}$, который плотен во *внешнем пространстве* $\mathcal{F}^T := \mathcal{L}_2([0, T]; \mathcal{H})$ системы α^T . Пространство $\mathcal{H}$ рассматривается как *внутреннее пространство* системы α^T , а соответствие между управлениями и решениями устанавливается с помощью *оператора управления* $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}$, действующего по правилу $f \mapsto u^f(T)$ на $\text{Dom } W^T = \mathcal{F}^T$.

Свойства оператора управления определяются оператором L_0 и играют важную роль в ВС-методе. Например, для задачи электромагнитной томографии W^T неограничен [2], для задач акустической томографии W^T ограничен, но может быть необратимым при достаточно больших T [2], а для оператора Шрёдингера на полуоси W^T является *изоморфизмом* из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{U}^T$ (т.е. ограниченным оператором, имеющим ограниченный обратный) [5]. Гнездо проекторов на достижимые подпространства $\{P_{\mathcal{U}^T}\}_{T \in [0, \infty]}$ служит разложением единицы для *оператора эйконала* $E = \int_{[0, \infty)} T dP_{\mathcal{U}^T}$ в $\mathcal{H}$. Переходя к спектральному

представлению этого оператора, мы получаем *модельное пространство* функций, в котором оператор L_0 имеет своё представление $\tilde{L}_0$, рассматриваемое как *функциональная модель* L_0 [7, 6]. Из множества возможных спектральных представлений особую роль играет представление, основанное на *треугольной факторизации* [9] *связывающего оператора* $C^T := (W^T)^* W^T$ относительно гнезда подпространств запаздывающих управлений $\{\mathcal{F}_s^T\}_{s \in [0, T]}$, $\mathcal{F}_s^T := \mathcal{L}_2([T-s, T]; \mathcal{H})$, поскольку оно приводит к *локальной функциональной модели* L_0 , дающей способ решения обратных задач.

В настоящей работе мы рассматриваем минимальный матричный оператор Шрёдингера $L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2([0, \infty); \mathbb{C}^n)$ с локально суммируемым эрмитовым матричнозначным потенциалом q и изучаем свойства соответствующих

гладких волн и оператора управления. В этом случае система α^T принимает эквивалентный вид α_v^T :

$$u(\cdot, t) \in \text{Dom } L_0^*, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\ddot{u}(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(x)u(x, t) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (7)$$

$$u(0, t) = f_v(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

где управление $f_v \in \mathcal{F}_v^T := \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ просто связано с управлением f , так что решение задачи $u_{\alpha}^{f_v}(x, t)$ совпадает с $u^f(x, t)$ (см. (14)). Дифференцирование следует понимать в следующем смысле: $\dot{u}$ – это производная функции со значениями в $\mathcal{H}$ (по t), а u_x – это частная производная векторнозначной функции двух переменных x и t по x . Система α_v^T почти идентична начально-краевой задаче β_v^T для телеграфного уравнения:

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(x)u(x, t) = 0, \quad x \in (0, \infty), \quad t \in (0, T), \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad (10)$$

$$u(0, t) = f_v(t), \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

где u_t обозначает частную производную по t .

Если потенциал q и управление f_v гладкие, а управление обращается в нуль в окрестности начального момента времени, то хорошо известно, что система (9)–(11) имеет классическое решение:

$$u_{\beta}^{f_v}(x, t) := f_v(t - x) + \int_x^t w(x, s) f_v(t - s) ds, \quad (12)$$

где w – гладкое ядро. Можно увидеть, что это решение также является решением системы α_v^T , и, следовательно, $W^T f = u^f(T) = u_{\alpha}^{f_v}(T) = u_{\beta}^{f_v}(T)$. Это определяет соответствующий оператор управления $W_v^T : f_v \mapsto u_{\alpha}^{f_v}(T)$, который является изоморфизмом в $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ (что ясно из (12)). Поэтому W^T (или, точнее, его замыкание) – изоморфизм из $\mathcal{F}^T = \mathcal{L}_2([0, T]; \mathcal{H})$ в $\mathcal{U}^T = \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. Для гладких управлений $f(t)$ решение $u^f(\cdot, T)$ является гладким, и если рассмотреть сужение W_v^T на $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$, то такой оператор окажется изоморфизмом и в этом пространстве (т. е. в норме этого пространства).

В общем случае имеется представление

$$u^f(t) = -f(t) + \int_0^t L^{-\frac{1}{2}} \sin(L^{\frac{1}{2}}(t-s)) f''(s) ds \quad (13)$$

для решения системы α^T , однако оно не помогает в установлении свойств гладкости упомянутых выше волн. Тем не менее, оно позволяет увидеть, что $u^f(t)$ единственно и является гладким по t как $\mathcal{H}$ -значная функция.

В настоящей работе мы рассматриваем потенциалы q из класса $\mathcal{L}_{1,\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, где $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n$ обозначает квадратные матрицы размера n с комплексными элементами. В теореме 1 мы показываем, что, хотя ядро $w(x, t)$ является лишь $\mathcal{W}_1^1$ -гладким по x , решение $u_{\alpha}^{f_v}(x, t)$ оказывается $\mathcal{W}_1^2$ -гладким по x (и C^∞ -гладким по t). Оператор W^T тесно связан с оператором W_v^T , являющимся изоморфизмом в $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. В теореме 3 мы показываем, что если $q \in \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, то W_v^T можно рассматривать в пространстве $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$, где он является ограниченным оператором и, более того, такое сужение представляет собой изоморфизм в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. Эти результаты будут использованы в статье [14] о характеристике операторов, унитарно эквивалентных матричным операторам Шрёдингера.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы определяем оператор L_0 и получаем эквивалентную систему α_v^T из системы α^T . В разделе 3 мы рассматриваем начально-краевую задачу β_v^T и доказываем формулу для её решения, анализируя соответствующую задачу Гурса. В разделе 4 мы устанавливаем связь между системами α_v^T и β_v^T , показывая, что решения последней удовлетворяют первой. В разделе 5 мы изучаем свойства «гладкости» оператора W_v^T , т. е. его ограниченность и обратимость в классе Соболева.

§2. МИНИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЁДИНГЕРА

Пусть q — эрмитова матричнозначная функция из класса $\mathcal{L}_{1,\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$. Рассмотрим минимальный и максимальный матричные операторы Шрёдингера $L_{\min}$ и $L_{\max}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2([0, \infty); \mathbb{C}^n)$ с областями определения

$$\text{Dom } L_{\max}$$

$$= \{y \in \mathcal{L}_2([0, \infty); \mathbb{C}^n) \cap \mathcal{W}_{1,\text{loc}}^2([0, \infty); \mathbb{C}^n) \mid -y'' + qy \in \mathcal{L}_2([0, \infty); \mathbb{C}^n)\},$$

$$\text{Dom } L_{\min} = \{y \in \text{Dom } L_{\max} \mid \text{supp } y \subset (0, \infty) \text{ компактен}\}.$$

Пусть L_0 – замыкание $L_{\min}$, тогда $L_0^* = L_{\max}$. Предположим, что потенциал q таков, что оператор L_0 положительно определён. Тогда по теореме Повзнера – Вингольца [15] его индексы дефекта равны $n_{\pm}(L_0) = n$, а области определения L_0 и его расширения Фридрихса L имеют вид

$$\begin{aligned}\text{Dom } L &= \{y \in \text{Dom } L_0^* \mid y(0) = 0\}, \\ \text{Dom } L_0 &= \{y \in \text{Dom } L_0^* \mid y(0) = y'(0) = 0\}.\end{aligned}$$

Ядро L_0^* состоит из решений уравнения на собственные функции для нулевого спектрального параметра:

$$\mathcal{K} = \text{Ker } L_0^* = \{y \in \text{Dom } L_0^* \mid -y'' + qy = 0\}, \quad \dim \mathcal{K} = n.$$

Разложение Вишика $\text{Dom } L_0^* = \text{Dom } L_0 \dot{+} L^{-1}\mathcal{K} \dot{+} \mathcal{K} = \text{Dom } L \dot{+} \mathcal{K}$ позволяет определить граничную тройку $(\mathcal{K}; \Gamma_1, \Gamma_2)$ с граничными операторами $\Gamma_1 = L^{-1}L_0^* - I$, $\Gamma_2 = P_{\mathcal{K}}L_0^*$, которые для $y = y_0 + L^{-1}g + h \in \text{Dom } L_0^*$, $y_0 \in \text{Dom } L_0$, $h, g \in \mathcal{K}$, действуют по правилу $\Gamma_1 y = -h$, $\Gamma_2 y = g$. Используя Γ_1 , рассмотрим динамическую систему с граничным управлением α^T , (1)–(4), где $f \in \mathcal{F}^T$, т. е. $f \in C^\infty([0, T]; \mathcal{K})$ и $\text{supp } f \subset (0, T]$.

Пусть $K(x)$ – такое матричное решение уравнения $-y'' + qy = 0$, что его столбцы $k_1, \dots, k_n$ образуют базис в $\mathcal{K}$ и $K(0) = I_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n}$. Такое решение существует, поскольку для любого базиса $k_1, \dots, k_n \in \mathcal{K}$ выполняется $\det K(0) \neq 0$: в противном случае существует линейная комбинация $k(x) = \sum_{i=1}^n c_i k_i(x)$, для которой $k(0) = 0$, и тогда $k \in \text{Dom } L \cap \mathcal{K}$, но это пересечение тривиально в силу разложения Вишика.

Для нахождения Γ_1 и Γ_2 необходимо определить g и h в разложении $y = y_0 + L^{-1}g + h$. Поскольку $h, g \in \mathcal{K}$, положим $g(x) = K(x)c$, $h(x) = K(x)d$, где $c, d \in \mathbb{C}^n$. Обозначим $K_1(x) = (L^{-1}K)(x)$, где оператор применяется к столбцам матрицы $K(x)$. Так как $y_0 \in \text{Dom } L_0$, имеем $y_0(0) = 0$ и $y_0'(0) = 0$, следовательно,

$$y(0) = h(0) = K(0)d = d, \quad y'(0) = K_1'(0)c + K'(0)d,$$

а также

$$\begin{aligned}(\Gamma_1 y)(x) &= -h(x) = -K(x)d = -K(x)y(0), \\ (\Gamma_2 y)(x) &= g(x) = K(x)c = K(x)(K_1'(0))^{-1}(y'(0) - K'(0)y(0)).\end{aligned}$$

Здесь матрица $K_1'(0)$ обратима, поскольку если $\det K_1'(0) = 0$, то существует такая нетривиальная линейная комбинация $k(x) = \sum_{i=1}^n c_i k_i(x)$, что $(L^{-1}k)'(0) = 0$, и вместе с $(L^{-1}k)(0) = 0$ это означало бы, что

$L^{-1}k \in \text{Dom } L_0 \cap (L^{-1}\mathcal{K}) = \{0\}$, а это пересечение тривиально в силу разложения Вишика.

Определим изоморфизм $\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{K}$, $(\lambda v)(x) = -K(x)v$, и соответствующий изоморфизм $\Lambda^T : \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{L}_2([0, T]; \mathcal{K})$:

$$(\Lambda^T f_v)(t) := \lambda(f_v(t)), \quad t \in [0, T].$$

Параметризуя

$$f = \Lambda^T f_v, \quad (14)$$

запишем систему α^T , (1)–(4), в эквивалентной форме α_v^T , (5)–(8), причем управляющие операторы W^T и W_v^T будут связаны соотношением

$$W_v^T = W^T \Lambda^T. \quad (15)$$

§3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА β_v^T

В этом разделе мы устанавливаем свойства решения системы β_v^T , (9)–(11). Мы показываем, что существует такая непрерывная матричнозначная функция $w(x, t)$, определённая при $0 \leq x \leq t < \infty$, что функция

$$u_{\beta}^{f_v}(x, t) = f_v(t - x) + \int_x^t w(x, s) f_v(t - s) ds, \quad x \in [0, \infty), \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

(при условии, что f_v продолжена на отрицательную полуось нулём) будет решением системы β_v^T .

Ядро w является обобщённым решением следующей задачи Гурса:

$$w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) + q(x)w(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, t), \quad (17)$$

$$w(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

$$w(x, x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds, \quad x \geq 0, \quad (19)$$

в том смысле, что оно является решением соответствующего интегрального уравнения. Далее мы выведем это уравнение тем же способом, что и в [12], см. также [11], и покажем, что оно имеет единственное непрерывное решение. Затем мы докажем, что $u_{\beta}^{f_v}$, определённая формулой (16), удовлетворяет (9)–(11).

Чтобы свести задачу Гурса к интегральному уравнению, сделаем замену переменных

$$\xi = t - x, \quad \eta = t + x, \quad v(\xi, \eta) := w\left(\frac{\eta - \xi}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right).$$

Тогда (17)–(19) принимает вид

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + q\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) \frac{v(\xi, \eta)}{4} = 0, \quad \eta > 0, \quad \xi \in (0, \eta), \quad (20)$$

$$v(\xi, \xi) = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (21)$$

$$v(0, \eta) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\eta}{2}} q(s) ds, \quad \eta \geq 0. \quad (22)$$

Формально решая неоднородное дифференциальное уравнение

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) := -q\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) \frac{v(\xi, \eta)}{4},$$

получаем

$$v(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\eta} d\eta_1 g(\xi_1, \eta_1) + v_1(\xi) + v_2(\eta)$$

с функциями v_1 и v_2 , которые могут быть определены из (21) и (22). Это приводит к интегральному уравнению

$$v(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} q(s) ds - \frac{1}{4} \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 q\left(\frac{\eta_1 - \xi_1}{2}\right) v(\xi_1, \eta_1). \quad (23)$$

Обозначим

$$v_0(\xi, \eta) := -\frac{1}{2} \int_{\frac{\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} q(s) ds, \quad \tilde{v} := Vv,$$

где V – оператор, действующий по правилу

$$(Vv)(\xi, \eta) := -\frac{1}{4} \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 q\left(\frac{\eta_1 - \xi_1}{2}\right) v(\xi_1, \eta_1).$$

Тогда интегральное уравнение (23) можно записать в виде $v = v_0 + Vv$, и его решение есть $v = (I - V)^{-1}v_0 = \sum_{n=0}^{\infty} V^n v_0$. Нужно показать, что ряд сходится в подходящем смысле. Зафиксируем $T > 0$ и рассмотрим это уравнение в пространстве $\mathcal{C}(\{(\xi, \eta) \mid \eta \in [0, T], \xi \in [0, \eta]\})$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|v_0(\xi, \eta)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\eta}{2}} \|q(s)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} ds =: S(\eta), \quad \xi \geq 0, \\ \|(Vv_0)(\xi, \eta)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 S(\eta_1) \left\| q\left(\frac{\eta_1 - \xi_1}{2}\right) \right\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} \\ &= S(\eta) \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 S'(\eta_1 - \xi_1) \leq S^2(\eta)\xi, \end{aligned}$$

аналогично получаем

$$\begin{aligned} \|(V^2v_0)(\xi, \eta)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 S^2(\eta_1)\xi_1 \left\| q\left(\frac{\eta_1 - \xi_1}{2}\right) \right\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} \\ &= S^2(\eta) \int_0^{\xi} d\xi_1 \xi_1 \int_{\xi}^{\eta} d\eta_1 S'(\eta_1 - \xi_1) \leq \frac{S^3(\eta)\xi^2}{2}, \end{aligned}$$

и, по индукции, $\|(V^n v_0)(\xi, \eta)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} \leq \frac{S^{n+1}(\eta)\xi^n}{n!}$. Следовательно, ряд сходится и полученное решение v лежит в $\mathcal{C}(\{(\xi, \eta) \mid \eta \in [0, T], \xi \in [0, \eta]\})$ при всех $T > 0$ и удовлетворяет оценке

$$\|v(\xi, \eta)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} \leq S(\eta)e^{\xi S(\eta)}.$$

Из равенства (23) видно, что v дифференцируема и что

$$\begin{aligned} v_{\xi}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}q\left(\frac{\xi}{2}\right) - \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\eta} q\left(\frac{\eta_1 - \xi}{2}\right) v(\xi, \eta_1) d\eta_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^{\xi} q\left(\frac{\xi - \xi_1}{2}\right) v(\xi_1, \xi) d\xi_1, \end{aligned}$$

$$v_\eta(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\eta}{2}\right) - \frac{1}{4}\int_0^\xi q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)v(\xi_1, \eta)d\xi_1.$$

Кроме того, равенство

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)v(\xi, \eta)$$

выполняется для фиксированного ξ и п. в. η , а также для фиксированного η и п. в. ξ , что дает (20). Условия (21) и (22), очевидно, выполнены, так что v является решением задачи (20)–(22). Отметим, что производные $v_{\xi\xi}$ и $v_{\eta\eta}$ могут не существовать.

Решение v является суммой явной части v_0 , которая лишь дифференцируема, и части $\tilde{v}$, имеющей две производные, как мы сейчас покажем. Имеем:

$$\begin{aligned} v_{0\xi}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}q\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad v_{0\eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}q\left(\frac{\eta}{2}\right), \\ \tilde{v}_\xi(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}\int_\xi^\eta q\left(\frac{\eta_1-\xi}{2}\right)v(\xi, \eta_1)d\eta_1 + \frac{1}{4}\int_0^\xi q\left(\frac{\xi-\xi_1}{2}\right)v(\xi_1, \xi)d\xi_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\eta-\xi}{2}} q(\tau)v(\xi, \xi+2\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\xi}{2}} q(\tau)v(\xi-2\tau, \xi)d\tau,$$

$$\tilde{v}_\eta(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\int_0^\xi q\left(\frac{\eta-\xi_1}{2}\right)v(\xi_1, \eta)d\xi_1 = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\eta-\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} q(\tau)v(\eta-2\tau, \eta)d\tau. \quad (25)$$

Подставляя v из уравнения (23), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}v(\xi, \xi+2\tau) &= \frac{1}{4}\left(q\left(\frac{\xi}{2}\right) - q\left(\frac{\xi}{2} + \tau\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\xi}{2}} q(\sigma)v(\xi-2\sigma, \xi)d\sigma - \int_0^\tau q(\sigma)v(\xi, \xi+2\sigma)d\sigma\right) \end{aligned}$$

$$- \int_{\tau}^{\tau + \frac{\xi}{2}} q(\sigma) v(\xi + 2\tau - 2\sigma, \xi + 2\tau) d\sigma \Bigg),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} v(\eta - 2\tau, \eta) &= \frac{1}{4} \left(q\left(\frac{\eta}{2} - \tau\right) - q\left(\frac{\eta}{2}\right) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\eta}{2} - \tau} q(\sigma) v(\eta - 2\tau - 2\sigma, \eta - 2\tau) d\sigma - \int_0^{\tau} q(\sigma) v(\eta - 2\tau, \eta - 2\tau + 2\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^{\frac{\eta}{2}} q(\sigma) v(\eta - 2\sigma, \eta) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Подстановка в (24) и (25) даёт

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\xi\xi}(\xi, \eta) &= \frac{q((\eta - \xi)/2)v(\xi, \eta) + q(\xi/2)v(0, \xi)}{4} \\ &+ \frac{1}{8} \left(\int_0^{\frac{\eta - \xi}{2}} q(\tau)(q(\xi/2 + \tau) - q(\xi/2)) d\tau + \int_0^{\frac{\xi}{2}} q(\tau)(q(\xi/2 - \tau) - q(\xi/2)) d\tau \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\eta - \xi}{2}} d\tau q(\tau) \left(\int_0^{\tau} d\sigma q(\sigma) v(\xi, \xi + 2\sigma) - \int_0^{\frac{\xi}{2}} d\sigma q(\sigma) v(\xi - 2\sigma, \xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\tau}^{\tau + \frac{\xi}{2}} d\sigma q(\sigma) v(\xi + 2\tau - 2\sigma, \xi + 2\tau) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\xi}{2}} d\tau q(\tau) \left(\int_0^{\frac{\xi}{2} - \tau} d\sigma q(\sigma) v(\xi - 2\tau - 2\sigma, \xi - 2\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{\tau} d\sigma q(\sigma) v(\xi - 2\tau, \xi - 2\tau + 2\sigma) - \int_{\tau}^{\frac{\xi}{2}} d\sigma q(\sigma) v(\xi - 2\sigma, \xi) \right) \right) \Bigg), \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_{\eta\eta}(\xi, \eta) = & \frac{q((\eta - \xi)/2)v(\xi, \eta) - q(\eta/2)v(0, \eta)}{4} \\
& + \frac{1}{8} \int_{\frac{\eta-\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} q(\tau)(q(\eta/2) - q(\eta/2 - \tau))d\tau \\
& + \frac{1}{4} \left(\int_{\frac{\eta-\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} d\tau q(\tau) \left(\int_0^{\tau} d\sigma q(\sigma)v(\eta - 2\tau, \eta - 2\tau + 2\sigma) \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_0^{\frac{\eta}{2}-\tau} d\sigma q(\sigma)v(\eta - 2\tau - 2\sigma, \eta - 2\tau) + \int_{\tau}^{\frac{\eta}{2}} d\sigma q(\sigma)v(\eta - 2\sigma, \eta) \right) \right), \quad (27)
\end{aligned}$$

и

$$\tilde{v}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{q((\eta - \xi)/2)v(\xi, \eta)}{4}.$$

Возвращаясь к функции w , мы можем записать её в виде $w = w_0 + \tilde{w}$, где

$$w_0(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{\frac{t-x}{2}}^{\frac{t+x}{2}} q(s)ds.$$

Для второго слагаемого $\tilde{w}$ найдём производные второго порядка:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_{tt}((\eta - \xi)/2, (\eta + \xi)/2) = & \tilde{v}_{\xi\xi}(\xi, \eta) + \tilde{v}_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 2\tilde{v}_{\xi\eta}(\xi, \eta) \\
= & \frac{q(\xi/2)v(0, \xi) - q(\eta/2)v(0, \eta)}{4} \\
& + \frac{1}{8} \left(q(\eta/2) \int_{\frac{\eta-\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} q(\tau)d\tau - q(\xi/2) \int_0^{\frac{\eta-\xi}{2}} q(\tau)d\tau - q(\xi/2) \int_0^{\frac{\xi}{2}} q(\tau)d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^{\frac{\eta-\xi}{2}} q(\tau)q(\xi/2 + \tau)d\tau + \int_0^{\frac{\xi}{2}} q(\tau)q(\xi/2 - \tau)d\tau - \int_{\frac{\eta-\xi}{2}}^{\frac{\eta}{2}} q(\tau)q(\eta/2 - \tau)d\tau \right) \\
& + \hat{w}((\eta - \xi)/2, (\eta + \xi)/2),
\end{aligned}$$

где функция $\widehat{w}$ содержит все оставшиеся интегральные члены и является непрерывной. Возвращаясь к исходным переменным, получаем:

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_{tt}(x, t) = & \frac{1}{4} q\left(\frac{t-x}{2}\right) w\left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) - \frac{1}{4} q\left(\frac{t+x}{2}\right) w\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2}\right) \\ & + \frac{1}{8} \left(q\left(\frac{t+x}{2}\right) \int_t^{\frac{t+x}{2}} q(\tau) d\tau - q\left(\frac{t-x}{2}\right) \int_0^t q(\tau) d\tau \right. \\ & \left. - q\left(\frac{t-x}{2}\right) \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\tau) d\tau + \int_0^x q(\tau) q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) d\tau \right. \\ & \left. + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\tau) q\left(\frac{t-x}{2} - \tau\right) d\tau - \int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\tau) q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) d\tau \right) + \widehat{w}(x, t). \quad (28) \end{aligned}$$

В то же время, используя (21), имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_{xx}((\eta - \xi)/2, (\eta + \xi)/2) &= \widetilde{v}_{\xi\xi}(\xi, \eta) + \widetilde{v}_{\eta\eta}(\xi, \eta) - 2\widetilde{v}_{\xi\eta}(\xi, \eta) \\ &= \widetilde{w}_{tt}((\eta - \xi)/2, (\eta + \xi)/2) - 4\widetilde{v}_{\xi\eta}(\xi, \eta) \\ &= \widetilde{w}_{tt}((\eta - \xi)/2, (\eta + \xi)/2) + q((\eta - \xi)/2)v(\xi, \eta), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\widetilde{w}_{xx}(x, t) = \widetilde{w}_{tt}(x, t) + q(x)w(x, t).$$

Следующая лемма является следствием теоремы Фубини.

Лемма 1. Если $q \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, то интегралы

$$\int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\tau) q\left(\frac{t-x}{2} - \tau\right) d\tau, \quad \int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\tau) q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) d\tau \quad \text{и} \quad \int_0^x q(\tau) q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) d\tau$$

как функции x и t локально суммируемы по обоим переменным: при всех $t > 0$ они лежат в $\mathcal{L}_1([0, t]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$ как функции x , а при всех $x > 0$ в $\mathcal{L}_{1,\text{loc}}([x, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$ как функции t .

Доказательство. Первый интеграл равен $p((t-x)/2)$, где

$$p(x) := \int_0^x q(\tau) q(x - \tau) d\tau.$$

Возьмём $T > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|p(x)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} dx &\leq \int_0^T dx \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \|q(x-\tau)\| \\
 &= \int_0^T d\tau \|q(\tau)\| \int_{\tau}^T dx \|q(x-\tau)\| = \int_0^T d\tau \|q(\tau)\| \int_0^{T-\tau} d\sigma \|q(\sigma)\| \\
 &\leq \int_0^T \|q(\tau)\| d\tau \int_0^T \|q(\sigma)\| d\sigma < \infty,
 \end{aligned}$$

что оправдывает изменение порядка интегрирования. Следовательно, $p \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, и мы получаем утверждение для первого интеграла.

Второй интеграл можно записать как разность

$$\int_0^{\frac{t+x}{2}} q(\tau) q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) d\tau = p\left(\frac{t+x}{2}\right)$$

и $\int_0^x q(\tau) q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) d\tau$. Таким образом, остаётся рассмотреть

$$\int_0^x q(\tau) q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) d\tau \quad \text{и} \quad \int_0^x q(\tau) q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) d\tau.$$

При всех $t \geq 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t dx \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \left\| q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) \right\| &= \int_0^t d\tau \|q(\tau)\| \int_{\tau}^t dx \left\| q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) \right\| \\
 &= 2 \int_0^t d\tau \|q(\tau)\| \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{t-\tau} d\sigma \|q(\sigma)\| \leq 2 \int_0^t \|q(\tau)\| d\tau \int_0^t \|q(\sigma)\| d\sigma < \infty,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dx \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \left\| q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) \right\| = \int_0^t d\tau \|q(\tau)\| \int_\tau^t dx \left\| q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) \right\| \\
& = 2 \int_0^t d\tau \|q(\tau)\| \int_\tau^{\frac{t+\tau}{2}} d\sigma \|q(\sigma)\| \leq 2 \int_0^t \|q(\tau)\| d\tau \int_0^t \|q(\sigma)\| d\sigma < \infty.
\end{aligned}$$

В то же время при всех $x \geq 0$ и $T > x$:

$$\begin{aligned}
& \int_x^T dt \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \left\| q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) \right\| = \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \int_x^T dt \left\| q\left(\frac{t+x}{2} - \tau\right) \right\| \\
& = 2 \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \int_{x-\tau}^{\frac{T+x}{2}-\tau} d\sigma \|q(\sigma)\| \leq 2 \int_0^x \|q(\tau)\| d\tau \int_0^{\frac{T+x}{2}} \|q(\sigma)\| d\sigma < \infty, \\
& \int_x^T dt \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \left\| q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) \right\| = \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \int_x^T dt \left\| q\left(\frac{t-x}{2} + \tau\right) \right\| \\
& = 2 \int_0^x d\tau \|q(\tau)\| \int_\tau^{\frac{T-x}{2}+\tau} d\sigma \|q(\sigma)\| \leq 2 \int_0^x \|q(\tau)\| d\tau \int_0^{\frac{T+x}{2}} \|q(\sigma)\| d\sigma < \infty.
\end{aligned}$$

Из этого следует утверждение для второго и третьего интегралов, что завершает доказательство. $\square$

Мы получили следующий результат.

Лемма 2. Пусть $q \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$. Тогда выполнено следующее.

1. При всех $t \geq 0$ верно, что $\tilde{w}_{tt}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_1([0, t]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$.
2. При всех $x \geq 0$ верно, что $\tilde{w}_{tt}(x, \cdot) \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}([x, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$.
3. При всех $t \geq 0$ равенство $\tilde{w}_{tt}(x, t) - \tilde{w}_{xx}(x, t) + q(x)w(x, t) = 0$ выполняется для п. в. $x \in [0, t]$.
4. Если выбран представитель класса эквивалентности q , то для п. в. $x \geq 0$ равенство $\tilde{w}_{tt}(x, t) - \tilde{w}_{xx}(x, t) + q(x)w(x, t) = 0$ выполняется для п. в. $t \in [x, \infty)$.

Замечание 1. Равенство частных производных $w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) + q(x)w(x, t) = 0$ может не выполняться нигде.

Теорема 1. Пусть $q \in \mathcal{L}_{1,\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, $f_v \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty([0, \infty); \mathbb{C}^n)$ и $\text{supp } f_v \subset (0, \infty)$. Тогда функция

$$u^{f_v}(x, t) = f_v(t - x) + \int_x^t w(x, s) f_v(t - s) ds \quad (29)$$

является решением системы

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(x)u(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, t), \quad (30)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \geq t, \quad (31)$$

$$u(0, t) = f_v(t), \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Кроме того, для каждого $t \geq 0$ выполнено:

$$u^{f_v}(\cdot, t) \in \mathcal{W}_1^2([0, t]; \mathbb{C}^n), \quad -u_{xx}^{f_v}(\cdot, t) + q(\cdot)u^{f_v}(\cdot, t) \in \mathcal{C}([0, t]; \mathbb{C}^n).$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (29) по t дважды:

$$u_{tt}^{f_v}(x, t) = f_v''(t - x) + \int_x^t w(x, s) f_v''(t - s) ds.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}^{f_v}(\cdot, t) \in \mathcal{C}([0, t]; \mathbb{C}^n)$ при всех $t \geq 0$. Мы видим, что при всех x функции $\tilde{w}(x, \cdot)$ и $\tilde{w}_t(x, \cdot)$ абсолютно непрерывны. Таким образом, можно проинтегрировать по частям:

$$\begin{aligned} u_{tt}^{f_v}(x, t) &= f_v''(t - x) + \int_x^t w_0(x, s) f_v''(t - s) ds + \int_x^t \tilde{w}(x, s) f_v''(t - s) ds \\ &= f_v''(t - x) + \int_x^t w_0(x, s) f_v''(t - s) ds + \tilde{w}_t(x, x) f_v(t - x) \\ &\quad + \int_x^t \tilde{w}_{tt}(x, s) f_v(t - s) ds, \end{aligned}$$

поскольку $\tilde{w}(x, x) = 0$. Продифференцируем теперь (29) по x ,

$$\begin{aligned}
u_{xx}^{f_v}(x, t) &= f_v''(t - x) + \left(\int_x^t w_0(x, s) f_v(t - s) ds \right)_{xx} \\
&+ \left(\int_x^t \tilde{w}(x, s) f_v(t - s) ds \right)_{xx} = f_v''(t - x) + \left(\int_x^t w_0(x, s) f_v(t - s) ds \right)_{xx} \\
&\quad - \tilde{w}_x(x, x) f_v(t - x) + \int_x^t \tilde{w}_{xx}(x, s) f_v(t - s) ds,
\end{aligned}$$

снова воспользовались тем, что $\tilde{w}(x, x) = 0$. Тогда при всех $t \geq 0$ и п. в. $x \in (0, t)$

$$\begin{aligned}
u_{tt}^{f_v}(x, t) - u_{xx}^{f_v}(x, t) &= \int_x^t w_0(x, s) f_v''(t - s) ds - \left(\int_x^t w_0(x, s) f_v(t - s) ds \right)_{xx} \\
&+ (\tilde{w}_t(x, x) + \tilde{w}_x(x, x)) f_v(t - x) + \int_x^t (\tilde{w}_{tt}(x, s) - \tilde{w}_{xx}(x, s)) f_v(x, s) ds \\
&= \int_x^t w_0(x, s) f_v''(t - s) ds - \left(\int_x^t w_0(x, s) f_v(t - s) ds \right)_{xx} \\
&\quad - q(x) \int_x^t \tilde{w}(x, s) f_v(x, s) ds,
\end{aligned}$$

где мы использовали равенство $\tilde{w}_t(x, x) + \tilde{w}_x(x, x) = 0$. Рассмотрим отдельно первое и второе слагаемые:

$$\begin{aligned}
\int_x^t w_0(x, s) f_v''(t - s) ds &= w_0(x, x) f_v'(t - x) + \int_x^t w_{0_t}(x, s) f_v'(t - s) ds \\
&= -\frac{f_v'(t - x)}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^t \left(q\left(\frac{s+x}{2}\right) - q\left(\frac{s-x}{2}\right) \right) f_v'(t - s) ds
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \left(\int_x^t w_0(x, s) f_v(t-s) ds \right)_{xx} = \left(-\frac{1}{2} \int_x^t ds \int_{\frac{s-x}{2}}^{\frac{s+x}{2}} d\tau q(\tau) f_v(t-s) \right)_{xx} \\
& = \frac{1}{2} \left(\left(\int_0^x q(\tau) d\tau \right) f_v(t-x) - \int_x^t \left(q\left(\frac{s+x}{2}\right) + q\left(\frac{s-x}{2}\right) \right) f_v(t-s) ds \right)_x \\
& = \frac{q(x) f_v(t-x)}{2} - \frac{f'_v(t-x)}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \\
& - \frac{1}{2} \left(\int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\sigma) f_v(t+x-2\sigma) d\sigma + \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\sigma) f_v(t-x-2\sigma) d\sigma \right)_x \\
& = q(x) f_v(t-x) - \frac{f'_v(t-x)}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \\
& - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{t+x}{2}} q(\sigma) f'_v(t+x-2\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{t-x}{2}} q(\sigma) f'_v(t-x-2\sigma) d\sigma \\
& = q(x) f_v(t-x) - \frac{f'_v(t-x)}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau \\
& - \frac{1}{4} \int_x^t \left(q\left(\frac{s+x}{2}\right) - q\left(\frac{s-x}{2}\right) \right) f'_v(t-s) ds.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\int_x^t w_0(x, s) f''_v(t-s) ds - \left(\int_x^t w_0(x, s) f_v(t-s) ds \right)_{xx} = -q(x) f_v(t-x)$$

и

$$u_{tt}^{f_v}(x, t) - u_{xx}^{f_v}(x, t)$$

$$= -q(x) \left(f_v(t-x) + \int_x^t w(x,s) f_v(t-s) ds \right) = -q(x) u^{f_v}(x, t).$$

Мы видим, что выполнено утверждение (30). При всех $t \geq 0$ имеем $u_{xx}^{f_v}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_1([0, t]; \mathbb{C}^n)$, что означает $u^{f_v}(\cdot, t) \in \mathcal{H}_1^2([0, t]; \mathbb{C}^n)$, а также то, что $-u_{xx}^{f_v}(x, t) + q(x)u^{f_v}(x, t) = -u^{f_v}(x, t)$ есть непрерывная функция x . Условие (31), очевидно, выполнено, а (32) выполняется, поскольку $w(0, t) \equiv 0$. $\square$

§4. ГЛАДКИЕ ВОЛНЫ

В этом разделе мы покажем, что решение $u_{\beta}^{f_v}(x, t)$ системы β_v^T одновременно является решением системы α_v^T . Поскольку последнее, как известно, единственно, см. (13), это означает, что $u_{\alpha}^{f_v} = u_{\beta}^{f_v}$.

Теорема 2. Пусть q – локально суммируемый эрмитов $M_{\mathbb{C}}^n$ -значный потенциал. Тогда функция $u_{\beta}^{f_v}(x, t)$, заданная формулой (16), является решением системы α_v^T , (5)–(8).

Доказательство. Согласно теореме 1, решение $u_{\beta}^{f_v}$ удовлетворяет (5). Очевидно, что условия (7) и (8) также выполнены. Остаётся проверить, что выполняется (6). Нужно показать, что производная $\ddot{u}_{\beta}^{f_v}$ в $\mathcal{H}$ существует и совпадает с частной производной $(u_{\beta}^{f_v})_{tt}$. Это получается из следующей леммы (применённой дважды). $\square$

Лемма 3. Если $f_v \in C^\infty([0, \infty); \mathbb{C}^n)$ и $\text{supp } f_v \subset (0, \infty)$, то $\dot{u}_{\beta}^{f_v} = (u_{\beta}^{f_v})_t$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из прямой оценки. Пусть $h \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Поскольку

$$(u_{\beta}^{f_v})_t(x, t) = f'_v(t-x) + \int_x^t w(x,s) f'_v(t-s) ds = u_{\beta}^{f'_v}(x, t)$$

и $f'_v \in C^\infty([0, \infty); \mathbb{C}^n)$ с $\text{supp } f'_v \subset (0, \infty)$, то равенство можно дифференцировать любое число раз, что означает гладкость функции $u^{f_v}(x, \cdot)$. Ипользем формулу Тейлора

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + \frac{1}{2} \int_x^{x+h} (x+h-t)g''(t)dt$$

для гладкой функции g , что дает

$$\left\| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right\|_{\mathbb{C}^n} \leq \frac{|h|}{2} \max_{t \in [x, x+h]} \|g''(t)\|_{\mathbb{C}^n}.$$

Получаем для $u^{f_v}(x, \cdot)$ следующие оценки, предполагая $|h| < 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\| \frac{u^{f_v}(x, t+h) - u^{f_v}(x, t)}{h} - u_t^{f_v}(x, t) \right\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \\ & \leq \frac{h^2}{2} \int_0^\infty \max_{t_1 \in [t, t+h]} \left\| u_{tt}^{f_v}(x, t_1) \right\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \\ & = \frac{h^2}{2} \int_0^{t+h} \max_{t_1 \in [t, t+h]} \left\| f_v''(t_1 - x) + \int_x^{t_1} w(x, s) f_v''(t_1 - s) ds \right\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx \\ & \leq \frac{h^2}{2} \max_{t_1 \in [0, t+1]} \|f_v''(t_1)\|_{\mathbb{C}^n}^2 (t+1) \left[1 + \max_{t_1 \in [0, t+1], x_1 \in [0, t_1]} \|w(x_1, t_1)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n}^2 (t+1) \right]^2. \end{aligned}$$

Это означает, что $\frac{u^{f_v}(\cdot, t+h) - u^{f_v}(\cdot, t)}{h} \rightarrow u_t^{f_v}(\cdot, t)$ при $h \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2([0, \infty); \mathbb{C}^n)$. $\square$

Следующее следствие сразу получается из леммы.

Следствие 1. Если потенциал q из формулировки теоремы 2 таков, что оператор L_0 положительно определен, то функция $u^f(x, t) = u_\beta^{f_v}(x, t)$, где $f = \Lambda^T f_v$, является решением системы α^T , (1)–(4). Замыкание оператора W^T есть изоморфизм из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{U}^T$, и $\mathcal{U}^T = \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$.

§5. УПРАВЛЯЮЩИЙ ОПЕРАТОР И НОРМА $\mathcal{H}^2$

Оператор $W_v^T : f_v \mapsto u_\beta^{f_v}(\cdot, t)$, определённый формулой (16) в $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$, может одновременно рассматриваться как оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. Несложно увидеть, что он ограничен в норме этого пространства. Мы покажем, что он также ограниченно обратим в этой норме.

Теорема 3. Если $q \in \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, то оператор W_v^T , заданный формулой (15) и суженный на $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$, является изоморфизмом в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Пусть $Y^T : f_v(\cdot) \mapsto f_v(T - \cdot)$ – оператор отражения в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. Оператор W_v^T будет изоморфизмом в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ одновременно с оператором $\tilde{W}^T := W_v^T Y^T = I + A^T$, где A^T действует в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ по правилу:

$$(A^T f_v)(x) = (\mathcal{A} f_v)(x) := \int_x^T \left(\tilde{w}(x, s) - \int_{\frac{s-x}{2}}^{\frac{s+x}{2}} \frac{q(\tau)}{2} d\tau \right) f_v(s) ds.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} (A^T f_v)'(x) &= \left(\int_0^x \frac{q(\tau)}{2} d\tau \right) f_v(x) \\ &\quad + \int_x^T \left(\tilde{w}_x(x, s) - \frac{q\left(\frac{s+x}{2}\right) + q\left(\frac{s-x}{2}\right)}{4} \right) f_v(s) ds, \\ (A^T f_v)''(x) &= (q(x) - \tilde{w}_x(x, x)) f_v(x) + \left(\int_0^x \frac{q(\tau)}{2} d\tau \right) f_v'(x) \\ &\quad + \left(\frac{q\left(\frac{T-x}{2}\right) - q\left(\frac{T+x}{2}\right)}{4} \right) f_v(T) \\ &\quad + \int_x^T \tilde{w}_{xx}(x, s) f_v(s) ds - \int_x^T \left(\frac{q\left(\frac{s+x}{2}\right) - q\left(\frac{s-x}{2}\right)}{4} \right) f_v'(s) ds. \end{aligned}$$

Из этих равенств сразу видно, что A^T ограничен в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$.

Выражение для $\mathcal{A}$ определяет несколько операторов в разных пространствах. В $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ оно определяет $A_{\mathcal{L}}^T$, вольтерров интегральный оператор. Следовательно, $(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1}$ существует, ограничен, и ряд Неймана сходится в $\mathfrak{B}(\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n))$:

$$(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A_{\mathcal{L}}^T)^n = I - A_{\mathcal{L}}^T + (A_{\mathcal{L}}^T)^2 - (A_{\mathcal{L}}^T)^3 (I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1}. \quad (33)$$

Покажем, что выражение для $\mathcal{A}$ определяет ограниченные операторы:

- (I) из $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{C}^n)$,
- (II) из $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{C}^n)$,

(III) из $\mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$.

Эти операторы и A^T можно рассматривать как сужения $A_{\mathcal{L}}^T$. Обозначим

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1/2 \|q\|_{\mathcal{L}_1([0, T]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)}, & a_2 &:= \|q\|_{\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)}, \\ b_1 &:= \|\tilde{w}\|_{\mathcal{C}(\{(x, t) \mid t \in [0, T], x \in [0, t]\}; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)}, & b_2 &:= \|\tilde{w}_x\|_{\mathcal{C}(\{(x, t) \mid t \in [0, T], x \in [0, t]\}; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)}, \\ b_3 &:= \int_0^T dx \left(\int_x^T \|\tilde{w}_{xx}(x, t)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} dt \right)^2. \end{aligned}$$

Покажем, что b_3 конечно. Поскольку $\tilde{w}_{xx}(x, t) = \tilde{w}_{tt}(x, t) + q(x)w(x, t)$, функция w непрерывна и $q \in \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$, нужно доказать, что

$$\int_0^T dx \left(\int_x^T \|\tilde{w}_{tt}(x, t)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} dt \right)^2 < \infty.$$

Достаточно увидеть, что $\int_x^T \|\tilde{w}_{tt}(x, t)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} dt$ является ограниченной функцией $x \in [0, T]$. Используя (28) и (26)–(27) для оценки $\hat{w}$, обозначая

$$b_4 := \|w\|_{\mathcal{C}(\{(x, t) \mid t \in [0, T], x \in [0, t]\}; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)},$$

запишем при каждом $x \in [0, T]$, воспользовавшись оценками из доказательства леммы 1:

$$\int_x^T \|\tilde{w}_{tt}(x, t)\|_{\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n} dt \leq 2a_1 b_4 + \frac{3a_1^2}{4} + \frac{4a_1^2 + 2a_1^2}{8} + \frac{9a_1^2 b_4}{4}.$$

Отсюда следует, что $b_3 < \infty$. Тогда при соответствующих предположениях относительно f_v выполняются следующие оценки:

- i. $\|A^T f_v\|_{\mathcal{C}} \leq (a_1 + b_1) \|f_v\|_{\mathcal{L}_1} \leq (a_1 + b_1) \sqrt{T} \|f_v\|_{\mathcal{L}_2},$
- ii. $\|(A^T f_v)'\|_{\mathcal{C}} \leq a_1 \|f_v\|_{\mathcal{C}} + b_2 T \|f_v\|_{\mathcal{C}} + 2a_1 \|f_v\|_{\mathcal{C}} = (3a_1 + b_2 T) \|f_v\|_{\mathcal{C}},$
 $\|A^T f_v\|_{\mathcal{C}} \leq (a_1 + b_1) \|f_v\|_{\mathcal{L}_1} \leq (a_1 + b_1) T \|f_v\|_{\mathcal{C}},$
- iii. $\|(A^T f_v)''\|_{\mathcal{L}_2} \leq (a_2 + b_2 \sqrt{T}) \|f_v\|_{\mathcal{C}} + a_1 \sqrt{T} \|f_v'\|_{\mathcal{C}} + 2a_1 \|f_v\|_{\mathcal{C}} +$
 $\sqrt{b_3} \|f_v\|_{\mathcal{C}} + 2a_1 \|f_v'\|_{\mathcal{C}} \leq (4a_1 + a_2 + (a_1 + b_2) \sqrt{T} + \sqrt{b_3}) \|f_v\|_{\mathcal{C}^1},$
 $\|A^T f_v\|_{\mathcal{L}_2} \leq \sqrt{T} \|A^T f_v\|_{\mathcal{C}} \leq (a_1 + b_1) T^{\frac{3}{2}} \|f_v\|_{\mathcal{C}} \leq (a_1 + b_1) T^{\frac{3}{2}} \|f_v\|_{\mathcal{C}^1}.$

Это означает, что утверждения (I)–(III) верны. Следовательно, $(A_{\mathcal{L}}^T)^3$ можно рассматривать как ограниченный оператор из $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. Поскольку оператор вложения $J_{\mathcal{H}^2}$ пространства

$\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ в $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ ограничен, из (33) видно, что сужение $(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ есть ограниченный оператор в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$:

$$(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n) = I - A^T + (A^T)^2 - (A_{\mathcal{L}}^T)^3(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1}J_{\mathcal{H}^2}.$$

Вместе с равенством $I + A^T = (I + A_{\mathcal{L}}^T) \upharpoonright \mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ это дает

$$\begin{aligned} (I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)(I + A^T) &= I_{\mathcal{H}^2} \\ &= (I + A^T)(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Последнее означает, что

$$(I + A_{\mathcal{L}}^T)^{-1} \upharpoonright \mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n) = (I + A^T)^{-1}.$$

Отсюда получаем, что $\tilde{W}^T = I + A^T$, и, следовательно, W_v^T – изоморфизмы в $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$. Это завершает доказательство. $\square$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Белишеву за внимание к этой работе и за многочисленные обсуждения предмета исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения*. — Докл. АН СССР, **297**, No. 3 (1987), 524–527.
2. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий (BC-метод)*. — Усп. матем. наук, **72**, No. 4 (2017), 3–66.
3. М. И. Белишев, М. Н. Демченко, *Динамическая система с граничным управлением, связанная с симметрическим полуограниченным оператором*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **409** (2012), 17–39.
4. М. И. Белишев, А. Б. Пушницкий, *К треугольной факторизации положительных операторов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **239** (1997), 45–60.
5. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Волновая модель оператора Штурма – Лиувилля на полуоси*. — Алгебра и анализ, **29**, No. 2 (2017), 3–33.
6. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Функциональная модель одного класса симметрических полуограниченных операторов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **521** (2023), 33–53.
7. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Треугольная факторизация и функциональные модели операторов и систем*. — Алгебра и анализ, **36**, No. 5 (2024), 107–127.
8. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*. — Труды Московского матем. общества, **1** (1952), 187–246.
9. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения*. М., Наука (1967).
10. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория симметричных расширений операторов и краевых задач*. — Труды института математики НАН Украины **104** (2017).

11. В. А. Марченко, *Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля*. Научкова Думка, Киев (1972).
12. S. B. Avdonin, V. S. Mikhailov, *The boundary control approach to inverse spectral theory*. — Inverse Problems, **26** (2010).
13. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems, **13**, No. 5 (1997), 1–45.
14. M. I. Belishev, S. A. Simonov, *A model and characterization of a class of symmetric semibounded operators*. — To appear in J. Operator Theory.
15. S. Clark, F. Gesztesy, *On Povzner–Wienholtz-type self-adjointness results for matrix-valued Sturm–Liouville operators*. — Proc. Royal Soc. Edinb., **133**, No. 4 (2003), 747–758.

Simonov S. A. Smoothness of solutions of the initial-boundary value problem for the matrix telegraph equation on the half-line with a locally summable potential

We study solutions of the system

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + q(x)u &= 0, & x > 0, \ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0, & x \geq 0, \\ u|_{x=0} &= f(t), & t \geq 0, \end{aligned}$$

with a locally summable Hermitian matrix-valued potential q and a $\mathcal{C}^\infty$ -smooth $\mathbb{C}^n$ -valued boundary control f vanishing near the origin. We show that the solution $u^f(\cdot, T)$ is a function from $\mathcal{W}_1^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$ and that the control operator $W^T : g \mapsto u^g(\cdot, T)$ is an isomorphism in $\mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{C}^n)$, while for $q \in \mathcal{L}_2([0, T]; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^n)$ it is also an isomorphism in $\mathcal{H}^2([0, T]; \mathbb{C}^n)$.

Санкт-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург, 191023;
Академический университет
им. Ж. И. Алферова, Хлопина 8А,
Санкт-Петербург 194021;
Институт математики, Университет ИТМО,
Кронверкский пр., д. 49, лит. А,
Санкт-Петербург 197101
E-mail: sergey.a.simonov@gmail.com

Поступило 5 октября 2025 г.