Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 541, 2025 г.

А. С. Михайлов, В. С. Михайлов

О ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

Посвящается 95-летию Василия Михайловича Бабича

§1. Введение

Для заданной последовательности комплексных чисел $\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{b_1, b_2, \ldots\}$, $a_i \neq 0$, такой, что $\sup_{n\geqslant 1}\{|a_n|, |b_n|\} \leqslant B$ для некоторого $B > 0$, мы задаём

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Для $N \in \mathbb{N}$ через A^N мы обозначаем матрицу Якоби размера $N \times N$, которая является блоком матрицы (1.1), состоящим из пересечения первых N столбцов с первыми N строками матрицы A.

Мы рассматриваем оператор H, соответствующий полубесконечной матрице Якоби A, определённый на $l^2(\mathbb{N}) \ni \psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$, задаваемый формулой

$$\begin{cases} (H\psi)_n & = a_{n-1}\psi_{n-1} + b_n\psi_n + a_n\psi_{n+1}, \quad n \geqslant 2, \\ (H\psi)_1 & = b_1\psi_1 + a_1\psi_2, \quad n = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

С матрицей A^N мы связываем оператор H^N. Функции Вейля для H и H^N определяются (см. [2]) следующим образом:

$$m(\lambda) = \left((H-\lambda)^{-1}e_1, e_1\right), \tag{1.3}$$

$$m^N(\lambda) = \left((H^N-\lambda)^{-1}e_1, e_1\right), \tag{1.4}$$

где $e_n = (0, , \ldots, 1, 0, \ldots)^T$ – вектор с 1 на n-м месте.

Ключевые слова: комплексные матрицы Якоби, функция Вейля.

Отметим, что в случае вещественной матрицы A, в соответствии со спектральной теоремой, это определение эквивалентно следующему:

$$m(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\rho(z)}{z-\lambda}, \tag{1.5}$$

где $d\rho = d\left(E_H e_1, e_1\right)$ и E_H – (проекторнозначная) спектральная мера самосопряжённого оператора H.

С матрицей A и дополнительным параметром $a_0 \neq 0$ связана динамическая система с дискретным временем:

$$\begin{cases} u_{n,t+1}+u_{n,t-1}-a_n u_{n+1,t}-a_{n-1}u_{n-1,t}-b_n u_{n,t}=0, \quad n,t\in\mathbb{N}, \\ u_{n,-1}=u_{n,0}=0, \quad n\in\mathbb{N}, \\ u_{0,t}=f_t, \quad t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \end{cases} \tag{1.6}$$

которая является естественным аналогом динамической системы, ассоциированной с волновым уравнением на полуоси [1, 4]. По аналогии с непрерывными задачами [3], мы рассматриваем комплексную последовательность $f=(f_0, f_1, \dots)$ как *граничное управление*. Решение системы (1.6) обозначается через $u^f_{n,t}$. Мы также рассматриваем динамическую систему, связанную с конечной матрицей A_N:

$$\begin{cases} v_{n,t+1}+v_{n,t-1}-a_n v_{n+1,t}-a_{n-1}v_{n-1,t}-b_n v_{n,t}=0, \quad t\in N_0, \\ \qquad\qquad n\in 1,\dots,N, \\ v_{n,\,-1}=v_{n,\,0}=0, \quad n=1,2,\dots,N+1, \\ v_{0,\,t}=f_t, \quad v_{N+1,\,t}=0, \quad t\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \end{cases} \tag{1.7}$$

которая является естественным аналогом динамической системы, ассоциированной с волновым уравнением на отрезке. Решение системы (1.7) обозначается через v^f.

Фиксируя $T\in\mathbb{N}$, мы вводим *операторы реакции* для систем (1.6) и (1.7), которые действуют по правилам:

$$\left(R^T f\right)_t := u^f_{1,t}, \quad t=1,\dots,T, \tag{1.8}$$

$$\left(R^T_N f\right)_t := v^f_{1,t}, \quad t=1,\dots,T. \tag{1.9}$$

Во втором разделе мы вспоминаем некоторые результаты о комплексных матрицах Якоби в нашем случае в соответствии с [2]. Мы также приводим некоторые результаты из [5] о представлении резольвенты $(H-\lambda I)^{-1}$.

В третьем разделе мы выводим специальное "спектральное представление" для решения системы (1.7).

В заключительном разделе мы вводим дискретное преобразование Фурье из [9] и выводим представления для функций Вейля для H и H^N.

§2. Операторы, связанные с комплексными матрицами Якоби, и их функции Вейля

С матрицей A можно связать оператор H, действующий в линейном пространстве векторов из l_2 с конечным числом ненулевых элементов, используя обычное матричное умножение.

Максимальный оператор $H_{\max}$, связанный с матрицей A, определяется на области

$$D(H_{\max}) := \{y \in l_2 \,|\, Ay \in l_2\}\,.$$

Другой оператор, связанный с A, – это *минимальный оператор* $H_{\min}$, который по определению является наименьшим замкнутым расширением оператора A.

Определение 1. *Матрица A называется* правильной (proper)*, если операторы $H_{\max}$ и $H_{\min}$ совпадают.*

Мы рассматриваем два решения разностного уравнения

$$H\phi = z\psi, \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$q_0(z) = 1, \quad q_1(z) = 0, \quad p_0(z) = 0, \quad p_1(z) = 1.$$

Определение 2. *Комплексная матрица Якоби называется определенной (determinate), если хотя бы одна из последовательностей $\{p_k(0)\}$ или $\{q_k(0)\}$ не принадлежит l_2.*

В случае конечной матрицы Якоби через $\phi^+(z)$ мы определяем решение уравнения (2.1) с данными Коши "на правом конце отрезка"

$$\phi^+_{N+1} = 0, \quad \phi^+_N = 1.$$

Для случая полубесконечной матрицы A известно [2, раздел 2.1], что ограниченная матрица является правильной. Более того, согласно [2, теорема 2.6], правильная матрица является определенной, и по [2, теорема 2.8] для $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\text{ess}}(H)$ существует l_2-решение уравнения (2.1), которое мы также обозначаем через $\phi^+(z)$. Отметим, что поскольку наша матрица ограничена, $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ содержится в шаре радиуса B.

Для двух решений u, v уравнения (2.1) мы вводим *вронскиан* $W(u,v)$ по правилу

$$W(u,v)[n] := a_n\left(u_n v_{n+1} - u_{n+1} v_n\right).$$

Нетрудно заметить (как и в вещественном случае), что W не зависит от n. Действительно, для двух решений

$$a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n + a_n u_{n+1} = z u_n,$$
$$a_{n-1}v_{n-1} + b_n v_n + a_n v_{n+1} = z v_n,$$

умножая первую строку на v_n, а вторую на u_n и вычитая вторую из первой, получаем

$$a_{n-1}(u_{n-1}v_n - v_{n-1}u_n) = a_n(u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1}),$$

таким образом, мы имеем

$$W(u,v) := W(u,v)[n], \quad n = 1, 2, \dots.$$

В дальнейшем нам потребуется определить ϕ_0^+. Для этого мы формально полагаем $a_0 = 1$, тогда ϕ_0^+ можно определить (см. вторую строку в (1.2)) из равенства

$$a_0\phi_0^+ + b_1\phi_1^+ + a_1\phi_2^+ = z\phi_1^+.$$

Таким образом, мы имеем $W(u,v) = W(u,v)[0]$.

Следующая лемма представляет собой комплексный аналог [5, предложения 2.2, 2.3].

Лемма 1. *Функции Вейля для H и H^N имеют представление*

$$m(z) = -\frac{\phi_1^+(z)}{\phi_0^+(z)}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Функция Грина (ядро резольвенты) определяется как

$$G_{m,n}(z) = \left((H-z)^{-1}e_m, e_n\right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$G_{m,n}(z) = \frac{1}{W(p,\phi^+)} p_{\min\{m,n\}}(z)\phi^+_{\max\{m,n\}},$$

где выбор p, ϕ^+ гарантирует выполнение уравнения при $n = 1$ и $n = N$ в конечном случае и при $n = 1$, а также то, что $\{\sum_n G_{m,n}(z) f_n\}_{m=1}^{\infty} \in l_2$ для любой $f \in l_2$ с конечным числом ненулевых элементов.

Тогда по определению (1.3), (1.4), выбору $a_0 = 1$ и условиям на p при $n = 0, 1$, мы получаем, что в конечном и полубесконечном случаях

$$m(z) = G_{1,1}(z) = \frac{p_1(z)\phi_1^+(z)}{a_0((p_0(z)\phi_1^+(z) - p_1(z)\phi_0^+(z)))} = -\frac{\phi_1^+(z)}{\phi_0^+(z)},$$

что завершает доказательство. □

§3. Специальное представление решения системы (1.7)

Здесь мы излагаем вывод без подробностей специального представления решения системы (1.7) в соответствии с [8]. Сначала нам потребуется факторизация Отона–Такаги [10]:

Теорема 1. *Пусть $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – комплексная симметрическая матрица: $H^* = \overline{H}$. Тогда существует унитарная матрица U такая, что*

$$UHU^T = D = \begin{pmatrix} \widehat{d}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{d}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{d}_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\widehat{d}_i \geqslant 0$, $i = 1\dots, n$.

Мы используем эту теорему для матрицы A^N: в [8] показано, что можно выбрать унитарную матрицу U (мы опускаем индекс N) такую, что

$$UA^N\,(U)^T = \begin{pmatrix} \widehat{d}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{d}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{d}_n \end{pmatrix},$$
$$\widehat{d}_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad \widehat{d}_i \neq \widehat{d}_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1\dots, N.$$

Если мы введём обозначения

$$U = \begin{pmatrix} \hat{u}^1 \\ \hat{u}^2 \\ \dots \\ \hat{u}^N \end{pmatrix}, \quad U^T = \left(\hat{u}^1 \,|\, \hat{u}^2 \,|\, \dots \,|\, \hat{u}^N\right),$$

то есть $\hat{u}^i$ является строкой в первом равенстве или столбцом во втором, тогда $\hat{u}^i$ удовлетворяет:

$$A^N\hat{u}^i = \widehat{d}_i\overline{\hat{u}^i}, \quad A^N\begin{pmatrix}\hat{u}^i_1\\ \hat{u}^i_2\\ \dots\\ \hat{u}^i_n\end{pmatrix} = \widehat{d}_i\begin{pmatrix}\overline{\hat{u}^i_1}\\ \overline{u^i_2}\\ \dots\\ \overline{\hat{u}^i_n}\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Отметим, что первые компоненты всех векторов не равны нулю:

$$\hat{u}^i_1 \neq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

в противном случае непосредственно из (3.2) следует, что $\hat{u}^i = 0$.

Теперь мы вводим векторы, которые используем в разложении типа Фурье для решения (1.7) следующим образом:

$$u^i = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\hat{u}^i_1}{\hat{u}^i_1}\\ \dots\\ \frac{\hat{u}^i_N}{\hat{u}^i_1}\\ 0\end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N,$$

таким образом, мы формально добавляем два значения: $u^i_0 = u^i_{N+1} = 0$ и нормируем векторы так, что $u^i_1 = 1$. В этом случае мы получим, см. (3.2)

$$A^N\begin{pmatrix}\frac{\widehat{u}^i_1}{\widehat{u}^i_1}\\ \frac{\widehat{u}^i_2}{\widehat{u}^i_1}\\ \dots\\ \frac{\widehat{u}^i_n}{\widehat{u}^i_1}\end{pmatrix} = d_i\begin{pmatrix}\overline{\frac{\widehat{u}^i_1}{\widehat{u}^i_1}}\\ \overline{\frac{\widehat{u}^i_2}{\widehat{u}^i_1}}\\ \dots\\ \overline{\frac{\widehat{u}^i_n}{\widehat{u}^i_1}}\end{pmatrix},$$

где мы обозначили

$$d_i := \widehat{d}_i\frac{\overline{\widehat{u}^i_1}}{\widehat{u}^i_1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Теперь мы ищем решение системы (1.7) в виде:

$$v^f_{n,t} = \begin{cases}\sum_{k=1}^N c^k_t\overline{u^k_n},\\ f_t, \quad n = 0.\end{cases} \tag{3.3}$$

Вводя обозначения

$$\sum_{n=1}^{N} \overline{u_n^k} u_n^i = \delta_{ki}\rho_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{3.4}$$

$$H_{ki} = \sum_{n=1}^{N} \overline{u_n^k u_n^i}, \quad k, i = 1, \dots, N, \tag{3.5}$$

Мы видим, что c_t^i определяются из уравнения

$$c_{t+1}^i + c_{t-1}^i - \frac{d_i}{\rho_i} \sum_{k=1}^{N} c_t^k H_{ki} = \frac{a_0}{\rho_i} f_t, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.6}$$

Мы ищем решение системы (3.6) в виде:

$$c_t^i = \frac{a_0}{\rho_i} \sum_{l=0}^{t} f_l T_{t-l}^{(i)}. \tag{3.7}$$

Мы вводим обозначение

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{N} d_i \frac{H_{ki}}{\rho_k}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{3.8}$$

тогда $T_t^{(i)}$ удовлетворяет

$$\begin{cases} T_{t+1}^{(i)} + T_{t-1}^{(i)} - \omega_i T_t^{(i)} = 0, \\ T_0^{(i)} = 0, \ T_{-1}^{(i)} = -1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Или, другими словами, $T_t^{(i)}$ — это полиномы Чебышёва второго рода, вычисленные в точках ω_i: $T_t^{(i)} = T_t(\omega_i)$.

Мы фиксируем некоторое положительное целое число T и обозначаем через $\mathcal{F}^T$ *внешнее пространство* системы (1.7), пространство управлений: $\mathcal{F}^T := \mathbb{C}^T$, $f \in \mathcal{F}^T$, $f = (f_0, \dots, f_{T-1})$, $f, g \in \mathcal{F}^T$, $(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \sum_{k=0}^{T-1} f_k \overline{g_k}$. И пусть $\mathcal{F}^\infty = \{(f_0, f_1, \dots) \,|\, f_i \in \mathbb{C},\, i = 0, 1, \dots\}$, так что $\mathcal{F}^\infty$ — это множество комплексных последовательностей.

Определение 3. *Для $f, g \in \mathcal{F}^\infty$ мы определяем свёртку $c = f * g \in \mathcal{F}^\infty$ по формуле*

$$c_t = \sum_{s=0}^{t} f_s g_{t-s}, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Определение 4. Оператор реакции $R^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathbb{C}^T$ *для системы* (1.6) *определяется формулой* (1.8)

Вектор реакции – это ядро свёртки оператора реакции,

$$r = (r_0, r_1, \ldots, r_{T-1}) = (a_0, w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots w_{1,T-1}),$$

в [6] показано, что R является оператором свёртки:

$$\left(R^T f\right)_t = u^f_{1,t} = r * f_{\cdot-1}.$$

Выбирая специальное управление $f = \delta = (1, 0, 0, \ldots)$, ядро оператора реакции может быть определено как

$$\left(R^T \delta\right)_t = u^\delta_{1,t} = r_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, для специального управления $f = \delta$, используя (3.3), (3.7), (3.9), имеем:

$$r^N_{t-1} = v^\delta_{1,t} = \sum_{k=1}^N c^k_t \overline{u^k_1} = \sum_{k=1}^N c^k_t = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\rho_k} T_t(\omega_k), \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{3.10}$$

где ρ_k и ω_k определены в (3.4) и (3.8).

Мы вводим дискретную меру $d\rho^N$ на $\mathbb{C}$, сосредоточенную на множестве точек $\{\omega_k\}_{k=1}^N$, по определению полагая

$$d\rho^N(\{\omega_k\}) = \frac{1}{\rho_k},$$

так что в точках ω_k она имеет веса $\frac{1}{\rho_k}$. Тогда мы можем переписать (3.10) в форме, напоминающей спектральное представление динамических обратных данных (см. [7]).

Вследствие конечной скорости распространения волны в системе (1.6) решение u^f зависит от коэффициентов a_n, b_n следующим образом.

Замечание 1. Для $M \in \mathbb{N}$, $u^f_{M-1,M}$ зависит от $\{a_0, \ldots, a_{M-1}\}$, $\{b_1, \ldots, b_{M-1}\}$, отклик R^{2T} (или, что эквивалентно, вектор отклика $(r_0, r_1, \ldots, r_{2T-2})$) зависит от $\{a_0, \ldots, a_{T-1}\}$, $\{b_1, \ldots, b_T\}$.

Это, в частности, означает, что для векторов реакции систем (1.6), (1.7) выполняется следующее соотношение:

$$r_t = r^N_t, \quad t = 1, 2, \ldots, 2N - 2. \tag{3.11}$$

Следующее предложение является одним из результатов работы [8]:

Предложение 1. *Вектор реакции системы (1.7) допускает следующее представление:*

$$r^N_{t-1} = \int\limits_{\mathbb{C}} T_t(\lambda)\, d\rho^N(\lambda), \quad t = 1, 2, \dots. \tag{3.12}$$

Вектор реакции системы (1.6) допускает представление:

$$r_{t-1} = \int\limits_{\mathbb{C}} T_t(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad t = 1, 2, \dots. \tag{3.13}$$

Доказательство. Формула (3.12) является следствием (3.10) и определения меры $d\rho^N(\lambda)$. Из (3.11) следует, что $r_t = \int\limits_{\mathbb{C}} T_t(\lambda)\, d\rho^N(\lambda)$ для любого N, при условии $t \leqslant 2N-2$. Тогда для произвольного полинома $P \in C[\lambda]$, $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{M} a_k \lambda^k$, мы имеем

$$\int\limits_{\mathbb{C}} P(\lambda)\, d\rho^N(\lambda) \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{k=0}^{M} a_k s_k, \quad s_k = \int\limits_{\mathbb{C}} \lambda^k\, d\rho^N(\lambda). \tag{3.14}$$

Сходимость (3.14) означает, что $d\rho^N$ сходится $*$-слабо при $N \to \infty$ к некоторой мере $d\rho$, что доказывает (3.13). $\square$

§4. Представление функций Вейля.

Нам необходимо ввести соответствующее преобразование Фурье для перехода от “динамической” задачи со временем t к “спектральной” задаче с параметром λ. Здесь мы следуем работе [9]:

4.1. Дискретное преобразование Фурье. Рассмотрим два решения уравнения

$$\psi_{n-1} + \psi_{n+1} = \lambda \psi_n, \tag{4.1}$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad Q_0 = -1, \quad Q_1 = 0.$$

Мы ищем единственное l^2-решение S:

$$S_n(\lambda) = Q_n(\lambda) + m_0(\lambda) P_n(\lambda),$$

где m_0 — функция Вейля для H_0 (частный случай H с $a_n \equiv 1$, $b_n \equiv 0$). Рассмотрим новую переменную z, связанную с λ соотношениями

$$\lambda = z + \frac{1}{z}, \quad z = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \frac{\lambda - i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}, \tag{4.2}$$

$z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{C}_-$ для $\lambda \in \mathbb{C}_+$, где $\mathbb{D} = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$. Известно [9], что

$$m_0(\lambda) = -z.$$

Уравнение (4.1) имеет два решения: z^n и z^{-n}. Поскольку $S \in l^2(\mathbb{N})$ и $S_1(\lambda) = m_0(\lambda) = -z$, мы получаем

$$S_n(\lambda) = -z^n.$$

Пусть $\chi_{(a,b)}(\lambda)$ — характеристическая функция интервала (a, b). Спектральная мера невозмущённого оператора H_0, соответствующего (4.1), имеет вид

$$d\rho(\lambda) = \chi_{(-2,2)}(\lambda)\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi}\,d\lambda.$$

Тогда преобразование Фурье $F : l^2(\mathbb{N}) \mapsto L_2((-2, 2), \rho)$ действует по правилу: для $(v_n) \in l^2(\mathbb{N})$:

$$F(v)(\lambda) = V(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\lambda) v_n.$$

Обратное преобразование задаётся формулой:

$$v_n = \int_{-2}^{2} V(\lambda) S_n(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

4.2. Основной результат. Следующая теорема является комплексным аналогом теоремы из работы [9]. Стратегия снова состоит в использовании преобразования Фурье для перехода от динамических систем (1.6), (1.7) к «спектральным» системам с параметром λ. Различие заключается в доказательстве для полубесконечного случая. В случае вещественной матрицы A мы использовали сходимость функций Вейля, соответствующих блокам A^N, к функции Вейля для полубесконечной матрицы; здесь у нас нет этой возможности, и нам нужно непосредственно показать, что соответствующее решение принадлежит l_2.

Теорема 2. *Если коэффициенты у полубесконечной матрицы A или конечной матрицы A^N удовлетворяют условию $\sup_{n \geqslant 1}\{|a_n|, |b_n|\} \leqslant B$, то функции Вейля m, m^N допускают представления*

$$m(\lambda) = -\sum_{t=0}^{\infty} z^t r_t, \tag{4.3}$$

$$m^N(\lambda) = -\sum_{t=0}^{\infty} z^t r_t^N \tag{4.4}$$

через векторы реакции (ядра динамических операторов реакции, связанных с (1.6), (1.7)): $(r_0, r_1, r_2, \dots)$, $\left(r_0^N, r_1^N, r_2^N, \dots\right)$, *где переменные* λ *и* z *связаны соотношениями*

$$\lambda = z + \frac{1}{z}, \quad z = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \frac{\lambda - i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}.$$

Эти представления справедливы для $\lambda \in D$, *где* $D \subset \mathbb{C}_+$ *определяется следующим образом. Пусть* $R := 3B + 1$, *тогда*

$$D := \left\{ x + iy \,\middle|\, x > \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\phi,\ y > \left(\frac{1}{R} - R\right)\sin\phi,\ \phi \in (\pi, 2\pi) \right\}.$$

Доказательство теоремы 1. В системах (1.6), (1.7) мы берём специальные управления: $f = \delta$, $g = \delta$ и переходим к преобразованию Фурье по переменной t: для фиксированного n мы вычисляем сумму, используя условия при $t = 0$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} S_t(\lambda) \left[u_{n,t+1}^{\delta} + u_{n,t-1}^{\delta} - a_n u_{n+1,t}^{\delta} - a_{n-1} u_{n-1,t}^{\delta} - b_n u_{n,t}^{\delta} \right] = 0.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем:

$$\sum_{t=0}^{\infty} u_{n,t}^{\delta} \left[S_{t-1}(\lambda) + S_{t+1}(\lambda) \right] - S_t(\lambda) \left[a_n u_{n+1,t}^{\delta} + a_{n-1} u_{n-1,t}^{\delta} + b_n u_{n,t}^{\delta} \right] = 0. \tag{4.5}$$

Вводя обозначение

$$\widehat{u}_n(\lambda) := \sum_{t=0}^{\infty} S_t(\lambda) u_{n,t}^{\delta} \tag{4.6}$$

и предполагая, что S удовлетворяет (4.1), мы выводим из (4.5), что $\widehat{u}$ удовлетворяет

$$\begin{cases} a_{n-1}\widehat{u}_{n-1}(\lambda) + a_n \widehat{u}_{n+1}(\lambda) + b_n \widehat{u}_n(\lambda) = \lambda \widehat{u}_n(\lambda), \\ \widehat{u}_0(\lambda) = -1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Аналогично, вводя

$$\widehat{v}_n(\lambda) := \sum_{t=0}^{\infty} S_t(\lambda) v_{n,t}^{\delta} \tag{4.8}$$

можно проверить, что $\widehat{v}$ удовлетворяет

$$\begin{cases} a_n \widehat{v}_{n+1}(\lambda) + a_{n-1}\widehat{v}_{n-1}(\lambda) + b_n \widehat{v}_n(\lambda) = \lambda \widehat{v}_n(\lambda), \\ \widehat{v}_0(\lambda) = -1, \ \widehat{v}_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Тогда по (2.2) мы немедленно получаем представление для функции Вейля в конечном случае:

$$m^N(\lambda) = \widehat{v}_1(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} S_t(\lambda) r_t^N. \tag{4.10}$$

Переход от динамических систем с дискретным временем (1.6), (1.7) к системам (4.7), (4.9) с параметром λ будет обоснован, как только мы покажем, что суммы в (4.6) и (4.8) сходятся. Это показано в [9] для вещественных матриц, и этот метод без каких-либо изменений работает здесь. Вместо этого мы покажем, что решение $\widehat{u}_n(\lambda) \in l_2$ в некоторой области. Для этого нам нужны оценки для $|u_{n,t}^{\delta}|$. Вводя обозначение

$$M_t := \max_{1 \leqslant n \leqslant t} \left\{ |u_{n,t}^{\delta}|, |u_{n,t-1}^{\delta}| \right\},$$

из разностного уравнения (первой строки) системы (1.6) мы получаем следующую оценку:

$$|u_{n,t+1}^{\delta}| \leqslant (3B+1) M_t.$$

Из этого соотношения получаем, что

$$M_{t+1} \leqslant (3B+1) M_t, \quad M_0 = 1.$$

Таким образом, M_t ограничена следующим образом:

$$M_t \leqslant (3B+1)^t.$$

Затем заметим, что поскольку $u_{n,t}^{\delta} = 0$, как только $t < n$, сумма в (4.6) имеет вид

$$\widehat{u}_n(\lambda) := \sum_{t=n}^{\infty} S_t(\lambda) u_{n,t}^{\delta} \tag{4.11}$$

Тогда мы можем оценить:

$$|\widehat{u}_n(\lambda)| \leqslant |z(\lambda)|^n M_n \sum_{t=0}^{\infty} |z(\lambda)|^t M_t. \tag{4.12}$$

Сумма в правой части (4.11) сходится при условии

$$|z(\lambda)|^t (3B+1)^t < 1,$$

или

$$|z(\lambda)| < \frac{1}{3B+1}. \tag{4.13}$$

Оценка (4.13) справедлива в области $D \subset \mathbb{C}_+$, указанной в (4.5). Тогда мы можем ввести обозначение $K(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} |z(\lambda)|^t M_t$, и получить из (4.12), что

$$|\widehat{u}_n(\lambda)| \leqslant |z(\lambda)|^n M_n K(\lambda), \quad \text{для} \quad \lambda \in D.$$

Отсюда мы немедленно получаем, что норма $\widehat{u}(\lambda)$ в l_2 может быть оценена как

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{u}_n(\lambda)|^2 \leqslant K(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} |z(\lambda)|^{2n} M_n^2. \tag{4.14}$$

Нам остаётся отметить, что сумма в правой части (4.14) сходится для $\lambda \in D$. Последнее означает, что решение (4.6) системы (4.7) принадлежит l_2 для $\lambda \in D$, и, таким образом,

$$m(\lambda) = \widehat{u}_1(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} S_t(\lambda) r_t.$$

что завершает доказательство. □

Замечание 2. Стандартная формула для функции Вейля в вещественном случае (1.5) использует спектральную меру оператора H. В комплекснозначном случае получено представление для функции Вейля (4.3), (3.13) в терминах некоторой меры, построенной в третьем разделе. Эта мера была впервые введена в работе [8], где она использовалась для решения комплексной проблемы моментов. Детальное изучение этой меры и связанных с ней полиномов будет предметом будущих публикаций.

Список литературы

1. S.A. Avdonin, V.S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spectral theory.* — Inverse Problems, **26**, No. 4 (2010), 045009.
2. B. Beckermann *Complex Jacobi matrices.* — J. Comput. Appl. Math., **127**, No. 1–2 (2001), 17–65.
3. M. I. Belishev, Recent progress in the boundary control method. — *Inverse Problems*, **23** (2007), R1.
4. M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse Ill-Posed Problems, **20**, No. 4 (2012), 461–488.

5. F. Gesztesy, B. Simon, *m−functions and inverse spectral analisys for dinite and semi-infinite Jacobi matrices.* — J. d'Analyse Math., **73** (1997), 267–297.
6. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamic inverse problem for complex Jacobi matrices.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **521** (2023), 136–154.
7. A. S. Mikhaylov, V.S. Mikhaylov, *Discrete dynamical systems: inverse problems and related topics.* — J. Inverse and Ill-posed Problems (2024).
8. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *On the complex moment problem as a dynamic inverse problem for a discrete system.* https://arxiv.org/abs/2509.02443
9. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, S.A. Simonov, *On the relationship between Weyl functions of Jacobi matrices and response vectors for special dynamical systems with discrete time.* — Math. Methods Appl. Sci., **41**, No. 16 (2018), 6401-6408.
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_matrix

Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S. On the Weyl function for complex Jacobi matrices.

We derive a new representation for the Weyl function associated with the complex Jacobi matrix in the finite and semi-infinite cases. In our approach we exploit connections to the discrete-time dynamical system associated with these matrices.

Поступило 5 октября, 2025 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия;
Санкт-Петербургский
государственный университет;
Университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mikhaylov@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия;
Университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ftvsm78@gmail.com