

М. А. Лялинов, Е. Е. Матвеев

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА ПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ δ -ПОТЕНЦИАЛОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Оператор Шрёдингера с сингулярным δ -потенциалом, носитель которого состоит из лучей на плоскости с общим началом, возникает в квантово-механических системах при моделировании короткодействующих взаимодействий одномерных частиц, а также в задачах дифракции в клиновидных и конусовидных областях. Оператор задаётся замыкаемой плотно определенной полуограниченной квадратичной формой

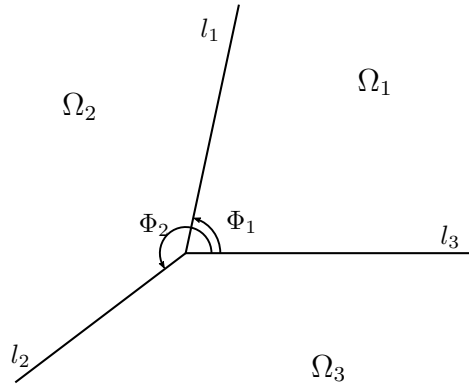
$$a[U] = \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx - \sum_{j=1}^3 \gamma_j \int_{l_j} |U|^2 ds, \quad U \in H^1(\Omega), \quad (1)$$

где l_j являются тремя лучами, выходящими из одной точки в $\mathbb{R}^2 = \Omega$, а параметры Робэна γ_j положительны для $j = 1, 2, 3$, что означает притяжение частиц в случае квантового рассеяния. Спектральные свойства такого оператора изучались во многих работах, связанных с квантовым рассеянием трёх одномерных частиц [1–3] и с дифракцией на клиньях и конусах [4]. Основная цель исследования заключается в получении достаточного условия на параметры задачи для непустоты дискретного спектра и описание собственных функций дискретного спектра для конкретного собственного числа.

В данной работе рассматривается связь данной канонической задачи с системой однородных функционально-разностных уравнений второго рода с мероморфными коэффициентами посредством интегралов

Ключевые слова: собственные функции, дискретный спектр, сингулярный потенциал, функционально-разностные уравнения.

Работа поддержана Российским Научным Фондом,
<https://rscf.ru/project/22-11-00070>.

Рис. 1. Области Ω_j , $j = 1, 2, 3$.

Конторовича–Лебедева. Решения ищутся из класса мероморфных векторов, каждая компонента которых экспоненциально убывает на бесконечности вдоль мнимой оси. Показано, что данный подход применим не только для полученной системы функционально-разностных уравнений, но и для целого класса подобных задач, в которых матричный потенциал принадлежит специальному классу.

Затем система функционально-разностных уравнений редуцируется к системе однородных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с характеристическим параметром. Положительный интегральный оператор оказывается компактным возмущением некоторого оператора типа Мёлера в $L_2(0, 1)$

$$(Mr)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{x+y} r(y) dy,$$

существенный спектр которого лежит на отрезке $[0, 1]$. Дискретный спектр, если существует, будет лежать правее единицы.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим самосопряжённый оператор Шрёдингера H его полуторалинейной формой a в $H^1(\Omega)$, где $\Omega = \mathbb{R}^2$ разбита на три области (угла или “клины”) Ω_j лучами l_j , $j = 1, 2, 3$, как показано на рис. 1.

Введём полярные координаты $\{(r, \varphi) : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi\}$, тогда

$$\Omega_1 = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < \Phi_1\},$$

$$\Omega_2 = \{(r, \varphi) : r > 0, \Phi_1 < \varphi < \Phi_2\},$$

$$\Omega_3 = \{(r, \varphi) : r > 0, \Phi_2 < \varphi < 2\pi\},$$

$$l_1 = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi = \Phi_1\}, \quad l_2 = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi = \Phi_2\},$$

$$l_3 = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi = 2\pi\},$$

где $0 < \Phi_1 < \Phi_2 < 2\pi$. Соответствующая квадратичная форма имеет вид (1), где γ_j являются положительными показателями Робэна, причём не умаляя общности, считаем $\gamma_1 \geq \gamma_2, \gamma_3 > 0$. Оказывается, что эта форма плотно определена, замкнута и полуограничена снизу в $H^1(\Omega)$ (см. [2]).

Форма a порождает самосопряжённый и ограниченный снизу оператор H в $H^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) \cup H^1(\Omega)$, который формально записывается как

$$HU := -\Delta U - \sum_{j=1}^3 \gamma_j \delta_j U,$$

оператор Шрёдингера H с сингулярным δ -потенциалом, носитель которого находится на объединении лучей $l_j, j = 1, 2, 3$. Изучается уравнение

$$HU = EU,$$

где спектральный параметр E считается отрицательным. Из [3] известно, что существенный спектр лежит на луче $\sigma_{\text{ess}}(H) = \left[-\frac{\gamma_1^2}{4}, \infty\right)$.

Дискретная часть спектра $\sigma_d(H)$, если не пуста, находится левее $-\frac{\gamma_1^2}{4}$. Основная цель работы заключается в получении достаточного условия непустоты дискретного спектра $\sigma_d(H)$ и описании собственных функций дискретного спектра. Мы также получим представление для собственных функций. В дальнейшем мы будем использовать классическую реализацию задачи для оператора H в терминах дифференциальных уравнений и краевых условий.

Ищем классическое решение $u(r, \varphi) = u_j(r, \varphi)$ в $\Omega_j, j = 1, 2, 3$, при $k > 0$ удовлетворяющее дифференциальным уравнениям

$$(-\Delta + k^2) u_j(r, \varphi) = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) \Big|_{l_1} &= \gamma_1 u_1|_{l_1}, & (u_1 - u_2)|_{l_1} &= 0, \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} - \frac{\partial u_3}{\partial n} \right) \Big|_{l_2} &= \gamma_2 u_2|_{l_2}, & (u_2 - u_3)|_{l_2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial n} - \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) \Big|_{l_3} &= \gamma_3 u_3|_{l_3}, & (u_3 - u_1)|_{l_3} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где нормаль направлена против часовой стрелки. Выполняется условие Мейкснера в вершине

$$u(r, \varphi) = C + O(r^{\delta_0}), \quad \delta_0 > 0 \quad (4)$$

при $r \rightarrow 0$ равномерно по φ . Это условие означает принадлежность решения $H_{loc}^1(\Omega_j)$ вблизи вершин клиньев. Будем считать, что выполняется условие

$$\int_{\Omega} |u(r, \varphi)|^2 e^{2dr} r dr d\varphi < \infty, \quad d > 0, \quad (5)$$

которое означает экспоненциальное убывание решений на бесконечности. Таким образом, мы ищем такие значения спектрального параметра E ($E = -k^2 < -\frac{\gamma_1^2}{4}$), для которых задача (2)–(4) имеет нетривиальные классические решения, которые принадлежат $H^1(\Omega)$ и, кроме того, удовлетворяют оценке (5).

§3. ИНТЕГРАЛЫ КОНТОРОВИЧА–ЛЕБЕДЕВА

Посредством неполного разделения переменных в задаче (2)–(4) будем искать решения в виде интегралов типа Конторовича–Лебедева

$$u_j(r, \varphi) = \frac{1}{\pi i} \int_{i\mathbb{R}} \sin(\pi\nu) K_{\nu}(kr) (S_j(\nu) \sin(\nu\varphi) + C_j(\nu) \cos(\nu\varphi)) d\nu, \quad (6)$$

при $(r, \varphi) \in \Omega_j$, $j = 1, 2, 3$. Функция $K_{\nu}(x) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} (I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x))$ является модифицированной функцией Бесселя второго рода или функцией Макдональда, где $I_{\nu}(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода. Стоит отметить следующие известные свойства функции Макдональда:

- $K_{\nu}(x) = K_{-\nu}(x)$,

$$\bullet \quad \frac{K_\nu(x)}{x} = \frac{K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x)}{2\nu}.$$

Неизвестные функции $S_j(\nu)$ и $C_j(\nu)$, $j = 1, 2, 3$ удовлетворяют системе функционально-разностных уравнений, которая получается из краевых условий (3).

Из условий непрерывности на границах $[u_j]|_{l_j} = 0$ получаем следующую систему, которую сразу запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \sin \nu \Phi_1 & -\sin \nu \Phi_1 & 0 \\ 0 & \sin \nu \Phi_2 & -\sin \nu \Phi_2 \\ 0 & 0 & \sin 2\pi \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(\nu) \\ S_2(\nu) \\ S_3(\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \nu \Phi_1 & \cos \nu \Phi_1 & 0 \\ 0 & -\cos \nu \Phi_2 & \cos \nu \Phi_2 \\ 1 & 0 & -\cos 2\pi \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\nu) \\ C_2(\nu) \\ C_3(\nu) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из условий Робэна $\left[\frac{\partial u_j}{\partial n} \right] \Big|_{l_j} - \gamma_j u_j|_{l_j} = 0$, с учётом $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, имеем

$$\int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu \frac{K_\nu(kr)}{kr} 2\nu \mathbf{A}(\nu) \mathbf{c}(\nu) d\nu - \frac{2\gamma_1}{k} \alpha \int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu K_\nu(kr) \mathbf{B}(\nu) \mathbf{c}(\nu) d\nu = 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{A}(\nu) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin(\nu \Phi_1)} & \frac{1}{\sin(\nu \Phi_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin(\nu \Phi_2)} & \frac{1}{\sin(\nu \Phi_2)} \\ \operatorname{ctg}(\nu \Phi_1) - \operatorname{tg}(\pi \nu) & \operatorname{ctg}(\nu \Phi_2) - \operatorname{ctg}(\nu \Phi_1) & -\operatorname{ctg}(\nu \Phi_2) - \operatorname{tg}(\pi \nu) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\nu) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\nu \Phi_1)}{\sin(2\pi \nu)} & \cos(\nu \Phi_1) - \operatorname{ctg}(\nu \Phi_2) \sin(\nu \Phi_1) & (\operatorname{ctg}(\nu \Phi_2) - \operatorname{ctg}(2\pi \nu)) \sin(\nu \Phi_1) \\ \frac{\sin(\nu \Phi_2)}{\sin(2\pi \nu)} & 0 & \frac{\sin(\nu(2\pi - \Phi_2))}{\sin(2\pi \nu)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}(\nu) = \begin{pmatrix} C_1(\nu) \\ C_2(\nu) \\ C_3(\nu) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \end{pmatrix}.$$

В уравнении (8) сделаем замены

$$\mathbf{D}(\nu) = \mathbf{A}(\nu) \mathbf{c}(\nu), \quad \mathbf{W}(\nu) = 2i \mathbf{B}(\nu) \mathbf{A}(\nu)^{-1}$$

и $\Lambda = \frac{\gamma_1}{2k}$ и применим тождество $\frac{K_\nu(x)}{x} = \frac{K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x)}{2\nu}$. Получим

$$\begin{aligned}
& \int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu (K_{\nu+1}(kr) - K_{\nu-1}(kr)) \mathbf{D}(\nu) d\nu \\
& + 2i\Lambda\alpha \int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu K_{\nu}(kr) \mathbf{W}(\nu) \mathbf{D}(\nu) d\nu \\
& = \int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu K_{\nu}(kr) \mathbf{D}(\nu-1) d\nu - \int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu K_{\nu}(kr) \mathbf{D}(\nu+1) d\nu \\
& + 2i\Lambda\alpha \int_{i\mathbb{R}} \sin \pi \nu K_{\nu}(kr) \mathbf{W}(\nu) \mathbf{D}(\nu) d\nu = 0, \quad (9)
\end{aligned}$$

где в первых двух интегралах сделана замена переменных $\nu \pm 1 \rightarrow \nu$ и деформированы контуры $i\mathbb{R} \pm 1 \rightarrow i\mathbb{R}$. Для корректности преобразований нужно, чтобы $\mathbf{D}$ принадлежало требуемому классу функций, описанному ниже. Наконец, можно заключить, что если выполнено равенство

$$\mathbf{D}(\nu+1) - \mathbf{D}(\nu-1) - 2i\Lambda\alpha \mathbf{W}(\nu) \mathbf{D}(\nu) = 0, \quad (10)$$

то справедливы граничные условия (3). Выпишем вид матрицы $\mathbf{W}(\nu)$ и укажем её свойства:

$$\mathbf{W}(\nu) = -i \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}(\pi\nu) & \frac{\cos(\nu(\Phi_1 - \Phi_2 + \pi))}{\sin(\pi\nu)} & \frac{\cos(\nu(\pi - \Phi_1))}{\sin(\pi\nu)} \\ \frac{\cos(\nu(\Phi_1 - \Phi_2 + \pi))}{\sin(\pi\nu)} & \operatorname{ctg}(\pi\nu) & \frac{\cos(\nu(\pi - \Phi_2))}{\sin(\pi\nu)} \\ \frac{\cos(\nu(\pi - \Phi_1))}{\sin(\pi\nu)} & \frac{\cos(\nu(\pi - \Phi_2))}{\sin(\pi\nu)} & \operatorname{ctg}(\pi\nu) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{W}(\nu) = -\mathbf{W}(-\nu);$$

$\mathbf{W}(\nu) = \pm \mathbf{I} + o(1)$ при $\nu \rightarrow \pm i\infty$ вдоль мнимой оси, $\mathbf{I}$ – единичная матрица 3×3 ;

$$\mathbf{W}(\nu) \sim \mathbf{C}\nu^{-1} \text{ при } \nu \rightarrow 0, \mathbf{C} \text{ – некоторая числовая матрица } 3 \times 3;$$

$$\mathbf{W}(it) \text{ положительная при } t > 0;$$

$$\mathbf{W}(\cdot) \text{ – мероморфная функция.}$$

Также определим класс $\mathcal{M}$ мероморфных 3-векторов $\mathbf{D}(\cdot)$: $\mathbf{D}(\nu) \in \mathcal{M}$, если его компоненты $D_j(\nu)$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют условиям:

$$\bullet D_j(\nu) = D_j(-\nu);$$

- $D_j(\cdot)$ голоморфны в $\Pi_{1+\delta} \setminus \{\pm 1\}$, где

$$\Pi_{1+\delta} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \nu| < 1 + \delta\}, \quad \delta > 0;$$

- $|D_j(\nu)| < \operatorname{Const}|e^{i\nu(\pi/2+\delta_1)}|$ при $\nu \rightarrow +i\infty$ в $\Pi_{1+\delta}$, $\delta_1 \in (0, \pi/2)$.

Решения из класса $\mathcal{M}$ обеспечивают равномерную сходимость интегралов в (9) и корректность преобразований. Приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{D}(\cdot)$ принадлежит классу $\mathcal{M}$ и доставляет нетривиальное решение уравнения (10) для некоторого Λ . Тогда интегралы Конторовича–Лебедева в (9) задают классическое решение задачи (2)–(4) для соответствующего $k^2 = \frac{\gamma_1^2}{4\Lambda^2} = -E$.

§4. РЕДУКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы воспользуемся следующей известной леммой (см. [5])

Лемма 1. Пусть функция $q(\cdot)$ голоморфна в Π_δ при $\delta > 0$, мероморфна и нечётна, причём $|q(\nu)| < c_q e^{-\kappa_* |\nu|}$ при $|\nu| \rightarrow \infty$ в Π_δ , $\kappa_* > 0$. Тогда чётное решение $s(\cdot)$ уравнений

$$s(\nu \pm 1) - s(-\nu \pm 1) = \pm 2iq(\nu),$$

которое голоморфно и экспоненциально убывает при $|\nu| \rightarrow \infty$ в $\Pi_{1+\delta} \setminus \{\pm 1\}$, задаётся выражением

$$s(\nu) = -\frac{1}{2} \int_{i\mathbb{R}} \frac{\sin \pi \tau}{\cos \pi \tau + \cos \pi \nu} q(\tau) d\tau, \quad \nu \in \Pi_{1+\delta},$$

при этом $s(\nu)$ продолжается как мероморфная функция посредством уравнений (1).

Применим данную лемму к уравнению (10) и получим, что

$$\mathbf{D}(\nu) = -\frac{\Lambda}{2} \int_{i\mathbb{R}} \frac{\sin \pi \tau}{\cos \pi \tau + \cos \pi \nu} \alpha \mathbf{W}(\tau) \mathbf{D}(\tau) d\tau \quad \text{при } \nu \in \Pi_{1+\delta}. \quad (11)$$

Данная формула даёт голоморфное продолжение $\mathbf{D}(\nu)$ с мнимой оси в полосу $\Pi_{1+\delta}$. Полагая ν на мнимую ось, получим интегральное уравнение для вектора $\mathbf{D}(\nu)$. Подынтегральное выражение чётное, так что

достаточно вычислить $\mathbf{D}(\nu)$ на $(0; +i\infty)$. Также, пользуясь положительностью $\mathbf{W}(\nu)$ на $i\mathbb{R}_+$, домножим уравнение слева на $\sqrt{\mathbf{W}(\nu)}$ и на $i\mathbb{R}_+$ введём новую вектор-функцию

$$\mathbf{q}(\cdot) = \sqrt{\mathbf{W}(\cdot)}\mathbf{D}(\cdot). \quad (12)$$

Тогда получаем эквивалентную систему интегральных уравнений с характеристическим параметром Λ

$$\mathbf{q}(\nu) = -\Lambda \int_{i\mathbb{R}_+} \frac{\sin \pi \tau}{\cos \pi \tau + \cos \pi \nu} \sqrt{\mathbf{W}(\nu)} \alpha \sqrt{\mathbf{W}(\tau)} \mathbf{q}(\tau) d\tau \quad \text{при } \nu \in i\mathbb{R}_+. \quad (13)$$

Процедура восстановления вектор-функции $\mathbf{D}(\nu) \in \mathcal{M}$ такова:

- (0) Пусть на полуоси $i\mathbb{R}_+$ имеется интегрируемое экспоненциально убывающее на бесконечности решение $\mathbf{q}(\nu)$ интегрального уравнения (13) для некоторого характеристического числа Λ ;
- (1) Из (12) находим на полуоси $i\mathbb{R}_+$ функцию $\mathbf{D}(\nu)$;
- (2) Пользуясь чётностью функции $\mathbf{D}(\nu)$, определяем её на всю мнимую ось $i\mathbb{R}$;
- (3) Продолжаем $\mathbf{D}(\nu)$ на полосу $\Pi_{1+\delta}$, пользуясь уравнением (11);
- (4) $\mathbf{D}(\nu)$ продолжаем как мероморфную функцию на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с помощью (10).

Таким образом, чтобы найти нетривиальное решение задачи (2)–(4), необходимо исследовать нетривиальные экспоненциально убывающие на бесконечности решения (13) для некоторого характеристического числа Λ , то есть собственные функции дискретного спектра интегрального оператора (13). Для этого удобно ввести новые переменные

$$x = \frac{1}{\cos \pi \nu}, \quad y = \frac{1}{\cos \pi \tau}, \quad x, y \in (0; 1]. \quad (14)$$

Также введём обозначения

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{q}(it) \Big|_{t=\frac{1}{\pi} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}, \quad \mathbf{w}(x) = \mathbf{W}(it) \Big|_{t=\frac{1}{\pi} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}}, \quad t > 0.$$

После замены переменных (14) интегральное уравнение (13) переходит в уравнение

$$\mathbf{r}(x) = \Lambda (\mathcal{K}\mathbf{r})(x)$$

с интегральным оператором $\mathcal{K} \in L_2([0, 1], \mathbb{C}^3)$:

$$(\mathcal{K}\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\mathbf{w}(x)}\alpha\sqrt{\mathbf{w}(y)}}{x+y} \mathbf{r}(y) dy. \quad (15)$$

Также введём спектральный параметр $\mu = \Lambda^{-1}$, тогда имеем уравнение

$$(\mathcal{K}\mathbf{r})(x) = \mu \mathbf{r}(x) \quad (16)$$

в $L_2([0, 1], \mathbb{C}^3)$. Теперь естественно изучить интегральный оператор $\mathcal{K}$, который имеет симметричное ядро $\sqrt{\mathbf{w}(x)}\alpha\sqrt{\mathbf{w}(y)}$. Справедлива оценка ядра оператора

$$\sqrt{\mathbf{w}(x)}\alpha\sqrt{\mathbf{w}(y)} = \alpha + O(x^b + y^b) \text{ при } (x, y) \rightarrow 0. \quad (17)$$

Кроме того, $\sqrt{\mathbf{w}(x)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$ при $x \rightarrow 1$.

Из этих двух оценок можно сделать вывод, что интегральный оператор $\mathcal{K}$ ограничен в $L_2([0, 1], \mathbb{C}^3)$, а также он является самосопряжённым оператором в $L_2([0, 1], \mathbb{C}^3)$.

Принимая во внимание представление

$$(\mathcal{K}\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{x+y} \alpha \mathbf{r}(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\mathbf{w}(x)}\alpha\sqrt{\mathbf{w}(y)} - \alpha}{x+y} \mathbf{r}(y) dy,$$

назовём оператор $\mathcal{K}$ возмущением ограниченного самосопряжённого оператора Мелёра M в $L_2([0, 1], \mathbb{C}^3)$, определённого как

$$(M\mathbf{r})(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{x+y} \alpha \mathbf{r}(y) dy$$

и хорошо изученного (см., например, [6] и приложение А [4]). Интегральный оператор $\mathcal{V}$ в сумме $\mathcal{K} = M + \mathcal{V}$ (возмущение оператора Мёлера) имеет ядро $v(x, y) = \sqrt{\mathbf{w}(x)}\alpha\sqrt{\mathbf{w}(y)} - \alpha = O(x^b + y^b)$ при $(x, y) \rightarrow 0$. Мы видим, что это возмущение принадлежит классу Гильберта–Шмидта S_2 , что следует из свойств его ядра. Таким образом имеем компактное возмущение $\mathcal{K}$ оператора Мёлера, и следовательно, можем изучать его спектральные характеристики традиционными методами.

§5. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\mathcal{K}$

Оператор $\mathcal{K}$ является компактным возмущением оператора Мёлера M , а следовательно, по теореме Вейля о сохранении существенного спектра при компактном возмущении существенный спектр оператора $\mathcal{K}$ совпадает с существенным спектром оператора M , то есть $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{K}) = \sigma_{\text{ess}}(M) = [0, 1]$.

Из свойств ядра оператора $\mathcal{K}$ следует то, что он положительный, тогда дискретный спектр, если он непуст, будет лежать правее существенного. Непустота дискретного спектра важна при рассмотрении данной задачи, так как каждое собственное число соответствует существованию нетривиального решения функционально-разностных уравнений (10) из класса $\mathcal{M}$ для соответствующего числа $\Lambda_m = \frac{1}{\mu_m}$. Здесь рассматривается достаточное условие непустоты дискретного спектра оператора $\mathcal{K}$.

Так как дискретный спектр находится правее существенного, то для некоторой собственной функции u выполнено $\mathcal{K}u = \mu u$, где собственное число $\mu > 1$. Найдём такой единичный вектор $u \in \mathcal{H} = L_2([0, 1], \mathbb{C}^3)$, что

$$(\mathcal{K}u, u)_{\mathcal{H}} > 1, \quad (18)$$

это и означает непустоту дискретного спектра. Выберем u специальным образом:

$$u(x) = (\alpha \mathbf{w}(x))^{-1} u_0$$

с постоянным вектором $u_0 \in \mathbb{C}^3$. Такой выбор обусловлен специальным видом ядра: $\sqrt{\mathbf{w}(x)} \alpha \sqrt{\mathbf{w}(y)} = \sqrt{\alpha \mathbf{w}(x)}^{-1} \sqrt{\alpha \mathbf{w}(y)}$, так как матрица α также положительна. Таким образом, условие (18) примет вид

$$(\mathcal{K}u, u)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\|u_0\|_{\mathbb{C}^3}^2}{x+y} = \frac{2 \ln 2}{\pi} \|u_0\|_{\mathbb{C}^3}^2 > 1.$$

Условие нормировки u запишется в виде

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 &= ((\alpha \mathbf{w}(x))^{-1} u_0, u_0)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^1 ((\alpha \mathbf{w}(x))^{-1} u_0, u_0)_{\mathbb{C}^3} dx = (Bu_0, u_0)_{\mathbb{C}^3} = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Матрица B является вещественной с элементами

$$b_{k,j} = \int_0^1 \{(\alpha \mathbf{w}(x))^{-1}\}_{k,j} dx.$$

Неизвестный комплексный вектор u_0 запишем как $(r_1 + ig_1, r_2 + ig_2, r_3 + ig_3)^T$ с вещественными $\vec{r}, \vec{g}$ так, что $u_0 = \vec{r} + i\vec{g}$. Тогда условия (18) и (19) запишутся как

$$\frac{2 \ln 2}{\pi} (\|\vec{r}\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\vec{g}\|_{\mathbb{R}^3}^2) > 1, \quad (20)$$

$$(B\vec{r}, \vec{r})_{\mathbb{R}^3} + (B\vec{g}, \vec{g})_{\mathbb{R}^3} - i((B - B^T)\vec{r}, \vec{g})_{\mathbb{R}^3} = 1 \quad (21)$$

соответственно. Из уравнения (21) ясно, что мнимая часть в левой части уравнения равна нулю, а вещественная часть равна единице. Для обнуления мнимой части положим

$$r_1 g_2 - r_2 g_1 = r_2 g_3 - r_3 g_2 = r_3 g_1 - r_1 g_3 = 0. \quad (22)$$

Будем искать минимальное значение функции $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = \|\vec{r}\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\vec{g}\|_{\mathbb{R}^3}^2$ при условии (21). При отсутствии условий (22) минимум левой части (20) ищется на большем множестве. От этого он может только уменьшиться, что приведёт к более грубой оценке. Составим функцию Лагранжа L с множителем Лагранжа $\lambda \neq 0$

$$L(\vec{r}, \vec{g}, \lambda) = \|\vec{r}\|_{\mathbb{R}^3}^2 + \|\vec{g}\|_{\mathbb{R}^3}^2 - \lambda \left((B\vec{r}, \vec{r})_{\mathbb{R}^3} + (B\vec{g}, \vec{g})_{\mathbb{R}^3} - 1 \right). \quad (23)$$

Необходимым условием экстремума функции (23) является равенство нулю градиента $\nabla L(\vec{r}, \vec{g}, \lambda) = 0$. При дифференцировании по координатам $r_j, j = 1, 2, 3$ получается система из трёх уравнений, которую удобнее записать в матричной форме $2\vec{r} - \lambda(B + B^T)\vec{r} = 0$ или же

$$(B + B^T)\vec{r} = \frac{2}{\lambda}\vec{r}. \quad (24)$$

Аналогично запишется и система из трёх уравнений, получаемая при дифференцировании функции Лагранжа по переменным $g_j, j = 1, 2, 3$

$$(B + B^T)\vec{g} = \frac{2}{\lambda}\vec{g}. \quad (25)$$

Видно, что векторы $\vec{r}, \vec{g}$ являются собственными векторами матрицы $B + B^T$, отвечающие собственному числу $\frac{2}{\lambda}$. Матрица B зависит от

параметров $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Phi_1, \Phi_2)$, и если окажется, что при каких-то параметрах матрица B будет симметричной, то векторы $\vec{r}, \vec{g}$ будут собственными векторами матрицы B , отвечающие собственному числу $\frac{1}{\lambda}$. Перепишем уравнение, получаемое при дифференцировании функции Лагранжа (23) по λ

$$((B + B^T)\vec{r}, \vec{r})_{\mathbb{R}^3} + ((B + B^T)\vec{g}, \vec{g})_{\mathbb{R}^3} = 2. \quad (26)$$

Подставляя (24) и (25) в уравнение (26), получим

$$\frac{2}{\lambda}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) = 2.$$

В итоге достаточное условие непустоты дискретного спектра принимает вид

$$\omega_{\min}(B + B^T) < \frac{4 \ln 2}{\pi},$$

где $\omega_{\min}(B + B^T) = \frac{2}{\lambda}$ — минимальное собственное число числовой матрицы $B + B^T$.

На рис. 2 представлены численные расчёты допустимых значений отношений $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ и $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$ для разных углов Φ_1 и Φ_2 . Заметим, что в случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ матрица B является симметричной, мнимая часть в условии (21) пропадает, а условия (22) не требуются.

§6. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ (10) И АСИМПТОТИКА ПО $\nu \rightarrow i\infty$

Целью этого параграфа является уточнение асимптотического поведения собственных решений $\mathbf{D}_m(\nu)$ при $\nu \rightarrow i\infty$ функционально-разностных уравнений (10), отвечающих характеристическому числу Λ_m . Ранее уже было сказано, что $\mathbf{D}_m(\nu) = O(e^{i\nu(\pi/2 + \delta_1)})$ при $\nu \rightarrow +i\infty$ в полосе $\Pi_{1+\delta}$, $\delta_1 \in (0, \pi/2)$, $\delta > 0$, так как это потребуется для вычисления асимптотики интегралов Конторовича–Лебедева. Более точная оценка связывает δ_1 и Λ_m посредством выражения $\delta_1 = \tau_m$, где $\sin \tau_m = \Lambda_m$. Предположим теперь, что достаточное условие непустоты спектра выполнено и $\frac{1}{\Lambda_m} \in \sigma_d(\mathcal{K})$. Тогда соответствующее решение $\mathbf{D}_m(\nu)$ удовлетворяет функционально-разностным уравнениям (10) при $\Lambda = \Lambda_m$.

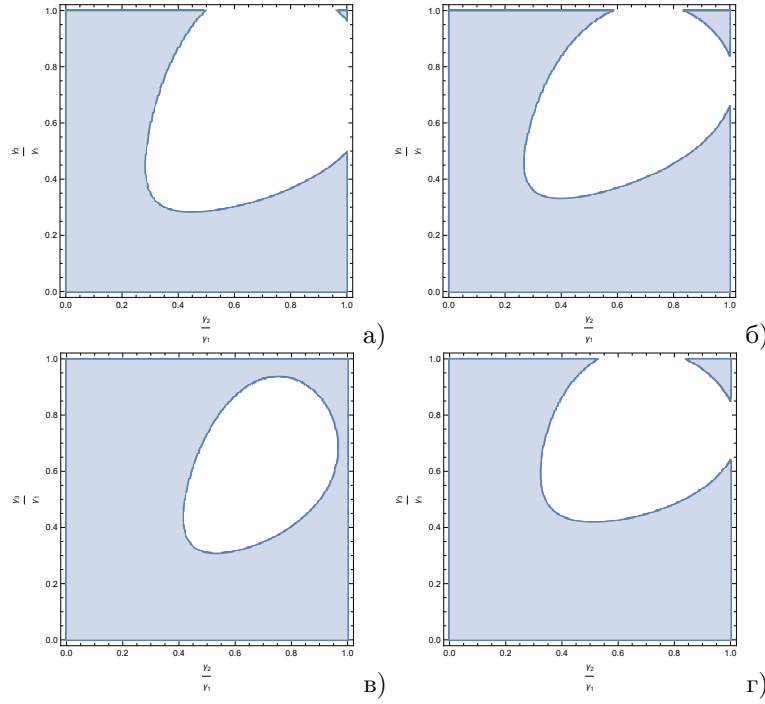


Рис. 2. Область допустимых значений отношений $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ и $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$ для углов а) $\Phi_1 = \frac{2\pi}{3}$ и $\Phi_2 = \frac{4\pi}{3}$, б) $\Phi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\Phi_2 = \frac{3\pi}{2}$, в) $\Phi_1 = \frac{9\pi}{8}$ и $\Phi_2 = \frac{3\pi}{2}$, г) $\Phi_1 = \frac{3\pi}{8}$ и $\Phi_2 = \frac{9\pi}{8}$.

Воспользуемся преобразованием Фурье по мнимой оси и его обратным преобразованием

$$\widehat{\mathbf{D}}(\zeta) = \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{D}(\nu) d\nu, \quad \mathbf{D}(\nu) = -\frac{\text{V.P.}}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{-i\zeta\nu} \widehat{\mathbf{D}}(\zeta) d\zeta \quad (27)$$

и сформулируем полезную лемму, связанную с этим преобразованием.

Лемма 2.

Функция $\mathbf{D}(\nu)$ допускает оценку $\mathbf{D}(\nu) = O(e^{-b|\nu|})$ при $\nu \rightarrow \pm i\infty$ ($b > 0$) тогда и только тогда, когда её образ $\widehat{\mathbf{D}}(\zeta)$ голоморфен в полосе $\Pi(-b, b) = \{\zeta \in \mathbb{C} : -b < \text{Re} \zeta < b\}$.

Применим преобразование Фурье по мнимой оси к функционально-разностным уравнениям (10), тогда

$$\int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{D}_m(\nu+1) d\nu - \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{D}_m(\nu-1) d\nu - 2i\Lambda_m \alpha \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{W}(\nu) \mathbf{D}_m(\nu) d\nu = 0.$$

В первых двух интегралах сделаем замену переменных $\nu \pm 1 \mapsto \nu$ и передвинем контур интегрирования на $i\mathbb{R}$.

$$(e^{-i\zeta} - e^{i\zeta}) \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{D}_m(\nu) d\nu - 2i\Lambda_m \alpha \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{W}(\nu) \mathbf{D}_m(\nu) d\nu = 0.$$

Если разделить уравнение на $(-2i)$, добавить и вычесть $\Lambda_m \alpha \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} \mathbf{D}_m(\nu) d\nu$, то приходим к уравнению

$$(\sin \zeta \mathbf{1} - \sin \tau_m \alpha) \hat{\mathbf{D}}_m(\zeta) = -\Lambda_m \alpha \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} (\mathbf{W}(\nu) + \mathbf{1}) \mathbf{D}_m(\nu) d\nu,$$

где $\mathbf{1}$ - единичная матрица 3×3 , $\sin \tau_m = \Lambda_m$. Для Фурье-образа получаем следующее представление:

$$\hat{\mathbf{D}}_m(\zeta) = -(\sin \zeta \mathbf{1} - \sin \tau_m \alpha)^{-1} \Lambda_m \alpha \int_{i\mathbb{R}} e^{i\zeta\nu} (\mathbf{W}(\nu) + \mathbf{1}) \mathbf{D}_m(\nu) d\nu. \quad (28)$$

Представление (28) позволяет определить полосу на комплексной плоскости ζ , в которой $\hat{\mathbf{D}}_m(\zeta)$ является голоморфной функцией. Уже было показано, что допускается оценка $\mathbf{D}_m(\nu) = O(e^{-|\nu|(\pi/2+\delta_1)})$, и тогда $\hat{\mathbf{D}}_m(\zeta)$ является голоморфной в полосе, чуть более широкой, чем $\Pi(-\pi/2, \pi/2)$, то есть полюс в нуле от матрицы $\mathbf{W}(\nu)$ не влияет на голоморфность интеграла. Матрица $(\sin \zeta \mathbf{1} - \sin \tau_m \alpha)^{-1}$ имеет простые полюсы в точках ζ : $\sin \zeta \mathbf{1} = \sin \tau_m \alpha$. Из первой строки получаем первый полюс $\zeta = \pi - \tau_m$, из второй - $\zeta = \pi - t_m$, где $\sin t_m = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin \tau_m$, из третьей - $\zeta = \pi - \tilde{t}_m$, где $\sin \tilde{t}_m = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin \tau_m$, где $t_m, \tilde{t}_m \in (0, \pi/2)$ и $t_m, \tilde{t}_m \leq \tau_m$. С учётом $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \leq 1$ ближайший полюс к мнимой оси $\zeta = \pi - \tau_m$, таким образом функция $\hat{\mathbf{D}}_m(\zeta)$ голоморфна в полосе $\Pi(-\pi + \tau_m, \pi - \tau_m)$, и допускается более точная оценка $\mathbf{D}_m(\nu) = O(e^{-|\nu|(\pi-\tau_m)})$ при $\nu \rightarrow \pm i\infty$.

Таким образом, исходя из требований асимптотического поведения функций $\mathbf{D}_m(\nu) = O(e^{-|\nu|(\pi/2+\delta_1)})$ при $\nu \rightarrow \pm i\infty$, получается уточнить их асимптотику до $\mathbf{D}_m(\nu) = O(e^{-|\nu|(\pi-\tau_m)})$ при $\nu \rightarrow \pm i\infty$. Данные функции $\mathbf{D}_m(\nu)$ связаны с собственными функциями $u_m(r, \varphi)$ посредством интегралов типа Конторовича–Лебедева (6). Однако, прямая подстановка асимптотики функции Макдональда не приводит к результату – экспоненциальному убыванию по r , интеграл расходится. Несмотря на то что в похожих работах (см., например, [4]) соответствующие вычисления проводились, строгое доказательство экспоненциального убывания собственных функций здесь не приводится и будет предметом будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Buslaev, S. Levin, *Asymptotic behavior of the eigenfunctions of many-particle Schrödinger operator. I. One-dimensional particles*. **12** (2008), 55–71.
2. G. Basti, C. Cacciapuoti, D. Finco, A. Teta, *The three-body problem in dimension one: From short-range to contact interactions*. — J. Math. Phys., **59** (2018).
3. J. Behrndt, P. Exner, V. Lotoreichik, *Schrödinger operators with δ - and δ -interactions on Lipschitz surfaces and chromatic numbers of associated partitions*. — Reviews Math. Phys., **26** (2013), 1450015.
4. А. М. Лялинов, *Оператор Шрёдингера в полуплоскости с условием Неймана на границе и сингулярным δ -потенциалом, сосредоточенным на двух лучах, и системы функционально-разностных уравнений*. — ТМФ, **213**, No. 7 (2022), 287–319.
5. M. Lyalinov, *Eigenoscillations in an angular domain and spectral properties of functional equations*. — Europ. J. Appl. Math., **33** (2021), 1–22.
6. I. N. Sneddon, *The use of integral transforms*. — J. Franklin Institute-engineering and Appl. Math., **300** (1975), 79.

Lyalinov M. A., Matveenko E. E. Discrete spectrum and eigenfunctions of the Schrödinger operator on the plane with a singular δ -potential of special form.

This paper investigates the discrete spectrum and the eigenfunctions of the Schrödinger operator on the plane with a singular δ -potential supported on three rays originating from a single point. Such kind of operator arises in problems of quantum scattering of three one-dimensional particles with a pairwise point interaction and in diffraction problems in wedge-shaped and conical regions. The problem of calculating the eigenfunction of the discrete spectrum of the operator is posed in the classical framework. Using the Kontorovich–Lebedev integral representation, the problem is

reduced to the study of a system of homogeneous functional difference equations of the second order with a spectral parameter. The properties of the solutions to this system are analyzed. Depending on the values of the spectral parameter, nontrivial solutions to the system of functional difference equations are described. The eigenfunctions are studied by reducing the problem to integral equations with an integral operator, which is a compact perturbation of the Mehler operator. A sufficient condition for the non-emptiness of the discrete spectrum is derived.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Ульяновская ул. 1-1, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия

Поступило 30 сентября 2025 г.

E-mail: lyalinov@yandex.ru, m.lyalinov@spbu.ru

E-mail: st068377@student.spbu.ru