

Д. В. Корилов

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕОРИЕНТИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ ПО ЕЕ ДН-ОПЕРАТОРУ

Введение. Пусть (M, g) – поверхность (двумерное компактное гладкое риманово многообразие) с метрикой g и краем (Γ, dl) ; здесь и далее dl это элемент длины на Γ , индуцированный метрикой g . Для простоты далее будем считать, что край Γ диффеоморфен окружности. Обозначим через u^f гармоническое продолжение функции $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ внутрь (M, g) . Отображение $\Lambda : f \mapsto \partial_\nu u^f|_\Gamma$, где ν – единичный вектор внешней нормали на Γ , называется ДН-оператором поверхности (M, g) . Известно (см. [1, 2]), что Λ определяет (M, g) с точностью до конформной эквивалентности: если (M', g') – другая поверхность с тем же краем $(\Gamma; , dl)$ и ДН-оператором Λ' , то $\Lambda' = \Lambda$ если и только если существует конформный диффеоморфизм β из (M, g) на (M', g') , который не двигает точки общего края Γ . Классы поверхностей (M, g) относительно указанной эквивалентности будут обозначаться через $[(M, g)]$.

В работах [3, 4, 5] получен следующий результат об устойчивости определения поверхности по ее ДН-оператору. Далее будем считать, что рассматриваемые поверхности имеют один и тот же край (Γ, dl) и один и тот же топологический тип (χ, o) , где $\chi = \chi(M)$ – эйлерова характеристика M и $o = +$ ($o = -$) если M ориентируема (неориентируема). Пространство $\mathcal{M}_{m,o}$ конформных классов таких поверхностей наделяется естественной метрикой Тейхмюллера d_T , которая определяется следующим образом. Пусть $\beta : M \rightarrow M'$ – диффеоморфизм; число

$$K_\beta(x) := \sqrt{\max_{a \in T_x M} \frac{\beta^* g'(a, a)}{g(a, a)} \Big/ \min_{a \in T_x M} \frac{\beta^* g'(a, a)}{g(a, a)}}$$

называется дилатацией отображения β в точке x , а его максимум $K_\beta := \max_{x \in M} K_\beta(x)$ – дилатацией β . Логарифм дилатации является естественной мерой отклонения отображения β от конформности;

Ключевые слова: электроимпедансная томография поверхностей, ДН-операторы, устойчивость решений, расстояние Тейхмюллера, оценки устойчивости.

в частности, $K_\beta \geq 1$ и $K_\beta = 1$ если и только если β конформно. Величина $d_T([(M, g)], [(M', g')])$ определяется как инфимум $\frac{1}{2} \log K_\beta$ на множестве все конформных диффеоморфизмов β , которые не двигают точки общего края Γ . Отметим, что $d_T([(M, g)], [(M', g')])$ не зависит от выбора представителей конформных классов $[(M, g)]$ и $[(M', g')]$ и действительно является метрикой на $\mathcal{M}_{m,o}$. В то же время множество $\mathcal{D}_{m,o}$ всех ДН-операторов поверхностей с краем (Γ, dl) и топологического типа (m, o) наделяется метрикой $d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') = \|\Lambda' - \Lambda\|_{H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow L_2(\Gamma; \mathbb{R})}$. Введем “решающее” отображение $\mathcal{R} : \mathcal{D}_{m,o} \rightarrow \mathcal{M}_{m,o}$, такое, что $\mathcal{R}(\Lambda)$ является конформным классом $[(M, g)]$ всех поверхностей (M, g) с ДН-оператором Λ . В [4, 5] доказано, что отображение $\mathcal{R} : (\mathcal{D}_{m,o}, d_{\text{op}}) \rightarrow (\mathcal{M}_{m,o}, d_T)$ непрерывно. Иными словами, если поверхность (M', g') диффеоморфна (M, g) , имеет тот же край (Γ, dl) и ее ДН-оператор Λ' близок к ДН-оператору Λ поверхности (M, g) по операторной норме, то между (M, g) и (M', g') существует почти конформный (т.е. обладающий близкой к единице дилатацией) диффеоморфизм, недвигающий точки Γ . Более того, в [5] доказаны локальные оценки устойчивости:

$$\begin{aligned} c(\Lambda) d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') &\leq d_T(\mathcal{R}(\Lambda), \mathcal{R}(\Lambda')) \leq C(\Lambda) d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') \\ (o = +, \quad d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') &\in [0, t_0(\Lambda)); \\ c(\Lambda) d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') &\leq d_T(\mathcal{R}(\Lambda), \mathcal{R}(\Lambda')) \leq C(\Lambda) d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda')^{1/3} \\ (o = -, \quad d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') &\in [0, t_0(\Lambda)), \end{aligned} \quad (1)$$

где положительные константы c, C, t_0 зависят только от Λ . В ориентированном случае оценка (1) является оптимальной, а отображение $\mathcal{R}$ – поточечно билипшицевым.

Результат. В этой заметке мы выводим оптимальную оценку устойчивости

$$d_T(\mathcal{R}(\Lambda), \mathcal{R}(\Lambda')) \leq C(\Lambda) d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') \quad (o = -, \quad d_{\text{op}}(\Lambda, \Lambda') \in [0, t_0(\Lambda)) \quad (2)$$

в неориентируемом случае. С этой целью мы применяем аргументы из предыдущей статьи [5], которые сводят доказательство (2) к исследованию свойств определенных нелинейных уравнений, содержащих ДН-оператор Λ .

Редукция доказательства оценки (2) с помощью метода [5]. Пусть (M, g) – фиксированная неориентируемая поверхность с краем (Γ, dl) и ДН-оператором Λ , а (M', g') – произвольная поверхность

с тем же краем и того же топологического типа, что и (M, g) , а ее ДН-оператор Λ' удовлетворяет оценке $\|\Lambda' - \Lambda\|_{H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow L_2(\Gamma; \mathbb{R})} \leq \varepsilon$, где ε – малый параметр. Пусть $\pi : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \rightarrow (M, g)$ – двулистное неразветвленное локально изометрическое накрытие, где поверхность $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ ориентируема и наделена инволюцией τ , причем $\pi \circ \tau = \pi$ (тогда $\mathbf{M}$ называется двулистным ориентируемым накрытием M). Граница $\Gamma = \partial \mathbf{M} \equiv \Gamma \times \{+, -\}$ представляет собой две копии края (Γ, dl) . Конформный класс метрики $\mathbf{g}$ и ориентация определяют комплексную структуру (комплексный атлас) на $\mathbf{M}$. Обозначим через $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$ алгебру (гладких вплоть до края) голоморфных функций на $\mathbf{M}$. Тогда (антиголоморфная) инволюция τ на $\mathbf{M}$ индуцирует инволюцию $\dagger : w \mapsto w^\dagger := \overline{w} \circ \tau$ на алгебре $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$. Введем пространство $\mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) = \{\mathbf{w} \in \mathcal{A}^\infty(\mathbf{M}) \mid \overline{\mathbf{w}} \circ \tau = \mathbf{w}\}$ эрмитовых элементов в $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$, тогда $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M}) = \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) + i\mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M})$. Обозначим (инъективный) оператор следа $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}|_\Gamma$ на $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M})$ через Tr . Аналогичным образом вводится двулистное ориентируемое накрытие $(\mathbf{M}', \mathbf{g}', \tau', \pi')$ поверхности (M', g') , алгебра $\mathcal{A}^\infty(\mathbf{M}')$ голоморфных функций на нем, оператор следа Tr' и т.д.

Мы рассматриваем *голоморфные вложения* $\mathcal{E} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$, $\mathcal{E}' = (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n)$ римановых поверхностей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ в $\mathbb{C}^n$ (здесь функции $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{w}'_k$ голоморфны на $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ соответственно). Поверхности $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ и $\mathcal{E}'(\mathbf{M}')$ наделяются метриками, индуцируемыми объемлющим пространством $\mathbb{C}^n$; при таком выборе метрик $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ и $\mathcal{E}'(\mathbf{M}')$ конформно эквивалентны $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ и $(\mathbf{M}', \mathbf{g}')$, соответственно. Выбирая достаточно большую размерность $n = n(M, g) = n(\Lambda)$, можно подчинить вложение $\mathcal{E}$ дополнительному условию *проективности*: для любой точки $\xi_0 \in \mathcal{E}(M)$ существует такое $\mathbb{C}$ -линейное отображение (“проекция”) $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и такая область $\mathcal{D} \ni P(\xi_0)$, что сужение P на $\mathcal{E}(M) \cap P^{-1}(\mathcal{D})$ инъективно. Напомним, что *расстоянием Хаусдорфа* $d_H(K, K')$ между двумя компактами K и K' в $\mathbb{C}^n$ называется такое минимальное $\epsilon \geq 0$, что ϵ -окрестность K содержит K' и ϵ -окрестность K' содержит K .

Для доказательства (1) мы используем следующий результат работ [4, 5].

Теорема 0.1 (см. [4, 5]). *Пусть $\mathcal{E}$ – голоморфное проективное вложение римановой поверхности с гладким краем Γ в $\mathbb{C}^n$. Тогда существуют такие достаточно малые положительные числа $t_0 = t_0(\mathcal{E})$ и $c = c(\mathcal{E})$, что для любого голоморфного отображения $\mathcal{E}'$ из римановой*

поверхности, $\mathbf{M}'$ с тем же краем Γ в $\mathbb{C}^n$, подчиненного оценке

$$t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') := \|\mathcal{E}'|_{\Gamma} - \mathcal{E}|_{\Gamma}\|_{C^7(\Gamma; \mathbb{C}^n)} < t_0, \quad (3)$$

отображение $\mathcal{E}'$ является проективным вложением, образы $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ и $\mathcal{E}'(\mathbf{M}')$ близки по метрике Хаусдорфа $d_H(\mathcal{E}(\mathbf{M}), \mathcal{E}'(\mathbf{M}')) \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ и существует диффеоморфизм $\alpha : \mathcal{E}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbf{M}')$, который является почти изометрией

$$\max_{\xi \in \mathcal{E}(\mathbf{M})} \max_{a \in T_{\xi} \mathcal{E}(\mathbf{M})} \left| \frac{\|d\alpha[a]\|_{T_{\alpha(\xi)}(\mathbb{C}^n)}}{\|a\|_{T_{\xi}(\mathbb{C}^n)}} - 1 \right| \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}'),$$

и удовлетворяет соотношению $\alpha \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$ на Γ . Как следствие, отображение $\beta := \mathcal{E}'^{-1} \circ \alpha \circ \mathcal{E} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ является почти конформным диффеоморфизмом $|K_{\beta} - 1| \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, недвигающим точки общего края Γ поверхностей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$; в частности, $d_T([\mathbf{M}], [\mathbf{M}']) \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Если при этом поверхности $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ наделены антиголоморфными инволюциями τ и τ' , $\tau|_{\Gamma} = \tau'_{\Gamma}$, $M = \mathbf{M}/\tau$, $M' = \mathbf{M}'/\tau'$ – (ориентируемые и ли неориентируемые) поверхности с одним и тем же гладким краем $\Gamma = \Gamma/\tau \cong \Gamma/\tau'$ и оба вложения симметричны относительно соответствующих инволюций $\mathcal{E} \circ \tau = \bar{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}' \circ \tau' = \bar{\mathcal{E}'}$ (где верхняя черта обозначает покомпонентное комплексное сопряжение), то $\alpha(\xi) = \bar{\alpha}(\bar{\xi})$ при всех $\xi \in \mathcal{E}(\mathbf{M})$ и, в частности, β удовлетворяет соотношению $\beta \circ \tau = \tau' \circ \beta$ и потому правило $\beta \circ \pi = \pi' \circ \beta$ определяет почти конформный диффеоморфизм $\beta : M \rightarrow M'$, $|K_{\beta} - 1| \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$; в частности,

$$d_T([(M, g)], [(M', g')]) \leq ct(\mathcal{E}, \mathcal{E}'). \quad (4)$$

Таким образом, для вывода оценки (2) достаточно построить “почти тождественное” вещественно-линейное отображение $\iota : \text{Tr } \mathfrak{H}^{\infty}(\mathbf{M}) \rightarrow \text{Tr } \mathfrak{H}^{\infty}(\mathbf{M}')$, удовлетворяющее оценкам

$$\|\iota \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\|_{C^l(\Gamma; \mathbb{R})} \leq c(\Lambda, \boldsymbol{\eta}, l) \varepsilon \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \text{Tr } \mathfrak{H}^{\infty}(\mathbf{M}) \quad (5)$$

и определить (по любому фиксированному проективному вложению $\mathcal{E} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$) индуцированное вложение $\mathcal{E}' = (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n)$ правилом

$$\mathbf{w}'_k|_{\Gamma} = \iota \mathbf{w}_k|_{\Gamma}.$$

Тогда величина $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ в (3) и (4) допускает оценку $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \leq C(\mathcal{E})\varepsilon$.

Для построения отображения ι мы используем характеризацию следов эрмитовых голоморфных функций на ориентируемом накрытии

(неориентируемой) поверхности в терминах ее ДН-оператора, полученную в [7]. Обозначим через ∂_γ оператор дифференцирования по длине на $\Gamma = \partial M$ и введем оператор интегрирования ∂_γ^{-1} , обращающий ∂_γ на пространстве $\partial_\gamma C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ и аннулирующий константы. Введем функцию σ , равную ± 1 на компоненте связности $\Gamma \times \{\pm\}$ границы $\Gamma = \partial M$. Введем линейный оператор $\mathfrak{D}$ и нелинейные отображения $\mathfrak{N}$, $\mathcal{G}$, действующие на $C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ по следующим правилам

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}f &:= (\partial_\gamma + \Lambda \partial_\gamma^{-1} \Lambda) f, \\ \mathfrak{N}(f) &:= \frac{1}{2} \Lambda [f^2 - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f)^2] - f \Lambda f - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \partial_\gamma f, \\ \mathcal{G}(f) &:= \mathfrak{D}f \cdot \partial_\gamma \mathfrak{N}(f) - \mathfrak{N}(f) \partial_\gamma \mathfrak{D}f.\end{aligned}\tag{6}$$

Лемма 0.2 (см. [6, 7]). Пусть $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ отлична от константы и $\tilde{\Gamma}$ – сегмент кривой Γ сколь угодно малой длины. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) **Критерий ориентируемости** (см. Следствие 2.4, [6]): $\mathfrak{D}f$ аннулируется на $\tilde{\Gamma}$, если и только если (M, g) ориентируема и $f = \Re w|_\Gamma$, где w голоморфна на M (относительно комплексной структуры, задаваемой конформным классом метрики g и выбором ориентации на M).
- (2) **Характеризация следов голоморфных функций на накрытии** (см. Лемму 1, [7]): $\mathcal{G}(f) = 0$ если и только если отношение $\mathfrak{N}(f)/\mathfrak{D}f = c_f$ является константой и функция

$$\eta := f \circ \pi + i\sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \circ \pi + c_f)\tag{7}$$

является следом на Γ некоторой эрмитовой голоморфной функции $\mathbf{w} \in \mathfrak{H}^\infty(M)$.

То же самое верно для поверхностей (M', g') , $(M', \mathbf{g}')$ и ассоциированных с ними отображений $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathcal{G}'$, $f \mapsto c'_f = \mathfrak{N}'(f)/\mathfrak{D}'f$. В частности, $\mathcal{G}'(f') = 0$ если и только если

$$\eta' := f' \circ \pi' + i\sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda' f') \circ \pi' + c'_{f'})\tag{8}$$

является следом на Γ некоторой эрмитовой голоморфной функции $\mathbf{w}' \in \mathfrak{H}^\infty(M')$.

Поскольку все ДН-операторы являются ПДО первого порядка (см. [8]) и на пространстве таких ПДО любые две нормы

$$\|\cdot\|_{H^{l+1}(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^l(\Gamma; \mathbb{R})} \text{ и } \|\cdot\|_{H^{s+1}(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow H^s(\Gamma; \mathbb{R})} \quad (l, s = 0, 1, \dots)$$

эквивалентны, справедливы оценки

$$\|\Lambda - \Lambda'\|_{C^{l+2}(\Gamma; \mathbb{R}) \rightarrow C^l(\Gamma; \mathbb{R})} \leq c_l \varepsilon. \quad (9)$$

Ввиду последнего факта и формул (7) и (8) построение отображения ι , удовлетворяющего (5), сводится к построению “почти тождественного” отображения $\mathfrak{V} : \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$, то есть к доказательству устойчивости (нелинейного) уравнения $\mathcal{G}(f) = 0$ к малым возмущениям $\mathcal{G}'$ оператора $\mathcal{G}$.

Хотя отображение $\mathcal{G}$ нелинейно, оно положительно однородно со степенью однородности 3, т.е. $\mathcal{G}(cf) = c^3 \mathcal{G}(f)$ при любых $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$ и $c > 0$. Кроме того, множество $\mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ совпадает со множеством вещественных частей следов эрмитовых голоморфных функций $\mathbf{w} \in \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M})$ на $\Gamma \times \{+\} \cong \Gamma$ и потому является *линейным* пространством коразмерности $-\chi(M)$. (Те же самые факты верны для оператора $\mathcal{G}'$, ассоциированного с (M', g') .) В общем случае мы называем непрерывное положительно однородное отображение $G : E \rightarrow F$ (где E и F — нормированные пространства) (χ, α) —*допустимым* если степень однородности G равна α и $G^{-1}(\{0\})$ является линейным подпространством коразмерности χ в $\mathcal{E}$. Множество $\mathfrak{Q}_{\chi, \alpha}(E; F)$ всех (χ, α) —допустимых отображений из E в F наделяется метрикой

$$\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = \sup_{\|f\|_E=1} \|\mathcal{G}'(f) - \mathcal{G}(f)\|_F.$$

Таким образом, введенные формулой (6) отображения $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ являются (χ, α) —допустимыми, где $\chi = -\chi(M) = -\chi(M')$, $\alpha = 3$, $E = C^{l+4}(\Gamma; \mathbb{R})$, $F = C^l(\Gamma; \mathbb{R})$, а из оценок (9) следует, что

$$\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G}) \leq c(E) \varepsilon. \quad (10)$$

Для построения отображения $\mathfrak{V}$ используется следующая лемма, доказанная в [5].

Лемма 0.3. Пусть $\mathcal{G} \in \mathfrak{Q}_{\chi, \alpha}(E; F)$ и $h_1, \dots, h_\alpha \in E$ линейно независимы по модулю $\mathcal{G}^{-1}(\{0\})$. Для каждого $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ введем функцию

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_f(t) &:= \sup \left\{ |\vec{d}| \mid \vec{d} = (d_1, \dots, d_\chi)^T \in \mathcal{C}^\chi, \right. \\ &\quad \left. \|\mathcal{G}\left(f - \sum_{k=1}^{\chi} d_k h_k\right)\|_F \leq t \|f\|_E^\alpha \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

(тогда $\lim_{t \rightarrow 0} \mathfrak{e}_f(t) = 0$ при каждом $f \in E$).

Тогда существует такое достаточно малое $\mathfrak{d}_0 > 0$, что для каждого отображения $\mathcal{G}' \in \mathfrak{Q}_{\chi, \alpha}(E; F)$, подчиненного неравенству $\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G}) < \mathfrak{d}_0$, элементы $h_1, \dots, h_\alpha$ линейно независимы по модулю $\mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$ и прямое разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\chi} d_k(f) h_k + \mathfrak{Y}f \quad (d_k(f) \in \mathbb{C}, \mathfrak{Y}f \in \mathcal{G}'^{-1}(\{0\}))$$

определяет отображение $\mathfrak{Y} : \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$, которое при каждом $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ подчинено оценке

$$\|\mathfrak{Y}f - f\|_E \leq c \mathfrak{e}_f(\mathfrak{d}(\mathcal{G}', \mathcal{G})), \quad (12)$$

где c не зависит от f и $\mathcal{G}'$.

Итак, Лемма 0.3 доставляет отображение $\mathfrak{Y} : \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathcal{G}'^{-1}(\{0\})$, удовлетворяющее оценкам (12). Определим отображение

$$\iota : \mathrm{Tr} \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}) \rightarrow \mathrm{Tr}' \mathfrak{H}^\infty(\mathbf{M}')$$

правилом $\iota \eta = \eta'$, где η, η' заданы формулами (7), (8) и f и f' связаны равенством $f' = \mathfrak{Y}f$. Тогда из оценок (12), (10) и (9) следует, что

$$\|\iota \eta - \eta\|_{C^l(\Gamma; \mathbb{R})} \leq c_l[\mathfrak{e}_f(C\varepsilon) + \varepsilon], \quad (13)$$

где $f \circ \pi = \Re \eta$ и c_l, C не зависят от $\mathcal{G}'$ и η . Таким образом, для того, чтобы доказать неравенства (5) и, тем самым, оценку (2), достаточно доказать, что при всех $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ функция $\mathfrak{e}_f$ удовлетворяет оценке

$$\mathfrak{e}_f(s) = O(s) \quad (s \rightarrow 0). \quad (14)$$

Отметим, что в [5] доказаны более грубые оценки $\mathfrak{e}_f(s) = O(s^{1/3})$, подстановка которых в (13), (3) и (4) дает оценку $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = O(\varepsilon^{1/3})$ и второе неравенство в (1).

Доказательство оценок (14). Вторую формулу в (6) можно переписать в виде $\mathfrak{N}(f) = \mathcal{Q}(f, f)/2$, где $\mathcal{Q}$ – билинейное отображение, заданное правилом

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f, h) &:= \Lambda[f \cdot h - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \cdot (\partial_\gamma^{-1} \Lambda h)] \\ &\quad - f \cdot \Lambda h - h \cdot \Lambda f - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \cdot \partial_\gamma h - (\partial_\gamma^{-1} \Lambda h) \cdot \partial_\gamma f. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда

$$\mathfrak{N}(f + h) = \mathfrak{N}(f) + \mathcal{Q}(f, h) + \mathfrak{N}(h).$$

Отсюда и из (6) вытекает разложение

$$\mathcal{G}(f + h) = \sum_{k=0}^3 \mathcal{G}_{f,(k)}(h)$$

для оператора $\mathcal{G}$. Здесь $\mathcal{G}_{f,(0)}(h) := \mathcal{G}(f)$, $\mathcal{G}_{f,(3)}(h) := \mathcal{G}(h)$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{f,(1)}(h) &:= \partial_\gamma \mathfrak{N}(f) \cdot \mathfrak{D}h - \mathfrak{N}(f) \cdot \partial_\gamma \mathfrak{D}h \\ &\quad + (\mathfrak{D}f) \cdot \partial_\gamma \mathcal{Q}(f, h) - (\partial_\gamma \mathfrak{D}f) \cdot \mathcal{Q}(f, h), \\ \mathcal{G}_{f,(2)}(h) &:= (\mathfrak{D}f) \cdot \partial_\gamma \mathfrak{N}(h) - (\partial_\gamma \mathfrak{D}f) \cdot \mathfrak{N}(h) \\ &\quad + \partial_\gamma \mathcal{Q}(f, h) \cdot \mathfrak{D}h - \mathcal{Q}(f, h) \cdot \partial_\gamma \mathfrak{D}h. \end{aligned} \quad (16)$$

Каждый член $\mathcal{G}_{f,(k)} : E \rightarrow F$ является непрерывным положительно однородным отображением со степенью однородности k , то есть $\mathcal{G}_{f,(k)}(sh) = s^k \mathcal{G}_{f,(k)}(h)$ для всех $s > 0$ и $f \in C^\infty(\Gamma; \mathbb{R})$. Более того, $\mathcal{G}_{f,(1)}$ является линейным оператором.

Следующее утверждение является ключевым для доказательства оценок (14) и (2).

Лемма 0.4. *При каждом $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$ для линейного оператора (16) справедливо равенство*

$$\text{Ker} \mathcal{G}_{f,(1)} = \mathcal{G}^{-1}(\{0\}). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $f \neq \text{const}$ (случай $f = \text{const}$ тривиален). Ввиду неориентированности M и утверждения 1. Леммы 0.2 функция $\mathfrak{D}f$ не может аннулироваться ни на каком сегменте Γ . Теперь из определения (6) оператора $\mathcal{G}$ следует, что уравнение $\mathcal{G}(f) = 0$ эквивалентно условию $\mathfrak{N}(f) = c_f \mathfrak{D}f$, где $c_f \in \mathbb{R}$. С учетом этого условия формула (16) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{f,(1)}(h) &:= c_f [\partial_\gamma \mathfrak{D}f \cdot \mathfrak{D}h - \mathfrak{D}f \cdot \partial_\gamma \mathfrak{D}h] \\ &\quad + (\mathfrak{D}f) \cdot \partial_\gamma \mathcal{Q}(f, h) - (\partial_\gamma \mathfrak{D}f) \cdot \mathcal{Q}(f, h) \\ &= (\mathfrak{D}f)^{-2} \partial_\gamma \left(\frac{\mathcal{Q}(f, h) - c_f \cdot \mathfrak{D}h}{\mathfrak{D}f} \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{G}_{f,(1)}(h) = 0$ если и только если

$$\mathcal{Q}(f, h) = c_f \cdot \mathfrak{D}h + \tilde{c}_{f,h} \mathfrak{D}f \quad (18)$$

при некоторых $c_f, \tilde{c}_{f,h} \in \mathbb{R}$.

Введем функции

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f \circ \pi, \quad \mathbf{p} = \sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda f) \circ \pi + c_f), \\ \mathbf{h} &= h \circ \pi, \quad \mathbf{q} = \sigma((\partial_\gamma^{-1} \Lambda h) \circ \pi + \tilde{c}_{f,h}) \end{aligned} \quad (19)$$

и обозначим через $\mathbf{u}^{\mathbf{f}}$ гармоническое продолжение $\mathbf{f}$ внутрь накрытия $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$. Из условия $\mathcal{G}(f) = 0$ и утверждения 2. Леммы 0.2 следует, что функция $\mathbf{w} := \mathbf{u}^{\mathbf{f}} + i\mathbf{u}^{\mathbf{p}}$ голоморфна на накрытии $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$. Условие Коши-Римана для $\mathbf{w}$ можно представить в виде

$$\Phi \nabla \mathbf{u}^{\mathbf{f}} = \nabla \mathbf{u}^{\mathbf{p}}, \quad (20)$$

где $\Phi : T\mathbf{M} \rightarrow T\mathbf{M}$ – непрерывное семейство

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\Phi a, \Phi b) &= \mathbf{g}(a, b), \quad \mathbf{g}(\Phi a, b) = -\mathbf{g}(a, \Phi b), \\ \Phi^2 a &= -a \quad (a, b \in T_{\mathbf{x}}\mathbf{M}, \mathbf{x} \in \mathbf{M}), \end{aligned}$$

(иногда называемое *почти комплексной структурой*, см. [9]).

Пусть ν – единичный вектор внешней нормали на Γ и $\Lambda : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{u}^{\mathbf{f}}|_{\Gamma}$ – ДН-оператор поверхности $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$. Ввиду локальной изометричности накрытия $\pi : (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \rightarrow (M, g)$ справедливы соотношения

$$\mathbf{u}^{f \circ \pi} = u^f \circ \pi, \quad d\pi[\nu] = \nu, \quad \Lambda(h \circ \pi) = (\Lambda h) \circ \pi. \quad (21)$$

Введем единичный касательный вектор $\gamma := \Phi \nu$; тогда $\gamma = d\pi[\sigma \gamma]$ – единичный касательный вектор на Γ .

Сужая уравнение (20) на Γ и учитывая (21), получаем

$$\partial_\gamma \mathbf{p} = \Lambda \mathbf{f} = (\Lambda f) \circ \pi, \quad \Lambda \mathbf{p} = -\partial_\gamma \mathbf{f} = -\sigma \cdot (\partial_\gamma f) \circ \pi, \quad (22)$$

где Λ – ДН-оператор поверхности $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ (напомним, что $\Lambda(h \circ \pi) = (\Lambda h) \circ \pi$).

Пусть U – односвязная область в $\mathbf{M}$, содержащая сегмент $\tilde{\Gamma}$ кривой Γ . Поскольку функция $\mathbf{u}^{\mathbf{h}}$ гармонична на U , из леммы Пуанкаре вытекает существование такой (определенной с точностью до аддитивной константы) функции $\mathbf{v}_U$ на U , что функция $\tilde{\mathbf{w}}_U := \mathbf{u}^{\mathbf{h}} + i\mathbf{v}_U$ голоморфна на U . Сужая уравнение Коши-Римана $\Phi \nabla \mathbf{u}^{\mathbf{h}} = \nabla \mathbf{v}_U$ для $\tilde{\mathbf{w}}_U$ на сегмент $\tilde{\Gamma}$ и учитывая соотношение $d\pi[\sigma \gamma] = \gamma$, получаем

$$\partial_\gamma \mathbf{v}_U = \partial_\nu \mathbf{u}^{\mathbf{h}} = \Lambda \mathbf{h} = (\Lambda h) \circ \pi, \quad \partial_\nu \mathbf{v}_U = -\partial_\gamma \mathbf{h} = -\sigma \cdot (\partial_\gamma h) \circ \pi. \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (19), получаем $\partial_\gamma \mathbf{v}_U = \partial_\gamma \mathbf{q}$. Таким образом, функцию $\mathbf{v}_U$ можно выбрать так, чтобы на $\tilde{\Gamma}$ выполнялось равенство $\mathbf{v}_U = \mathbf{q}$.

Поскольку $\mathbf{w}$ и $\tilde{\mathbf{w}}$ голоморфны на U , функция

$$\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) = \mathbf{u}^f \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^p \mathbf{v}_U$$

гармонична на U , причем на $\tilde{\Gamma}$ выполнены равенства

$$\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) = \mathbf{f}h - \mathbf{p}q = \left[fh - (\partial_\gamma^{-1}\Lambda f + c_f) \cdot (\partial_\gamma^{-1}\Lambda h + \tilde{c}_{f,h}) \right] \circ \pi =: \mathbf{Y}$$

и (ввиду (22) и (23))

$$\begin{aligned} \partial_\nu \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) &= \mathbf{h} \cdot \Lambda \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \Lambda \mathbf{h} - \mathbf{q} \cdot \Lambda \mathbf{p} - \mathbf{p} \partial_\nu \mathbf{v}_U \\ &= \mathbf{h} \cdot \Lambda \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \Lambda \mathbf{h} + \mathbf{q} \partial_\gamma \mathbf{f} + \mathbf{p} \partial_\gamma \mathbf{h} \\ &= \left[h\Lambda f + f\Lambda h + (\partial_\gamma^{-1}\Lambda h + \tilde{c}_{f,h})\partial_\gamma f + (\partial_\gamma^{-1}\Lambda f + c_f)\partial_\gamma h \right] \circ \pi. \end{aligned}$$

Из последних двух формул и определений (15), (6) формы $\mathcal{Q}$ и оператора $\mathfrak{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f, h) \circ \pi &:= \left[\Lambda [fh - (\partial_\gamma^{-1}\Lambda f)(\partial_\gamma^{-1}\Lambda h)] \right] \circ \pi \\ &\quad - [f\Lambda h - h\Lambda f - (\partial_\gamma^{-1}\Lambda f)\partial_\gamma h - (\partial_\gamma^{-1}\Lambda h)\partial_\gamma f] \circ \pi \\ &= \Lambda \mathbf{Y} + \left[\tilde{c}_{f,h}\Lambda \partial_\gamma^{-1}\Lambda f + c_f\Lambda \partial_\gamma^{-1}\Lambda h \right] \circ \pi \\ &\quad - \partial_\nu \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) + [\tilde{c}_{f,h}\partial_\gamma f + c_f\partial_\gamma h] \circ \pi \\ &= \partial_\nu [\mathbf{u}^Y - \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U)] + [\tilde{c}_{f,h}\mathfrak{D}f + c_f\mathfrak{D}h] \circ \pi. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (18) эквивалентно выполнению равенства

$$\partial_\nu [\mathbf{u}^Y - \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U)] = 0 \text{ на } \tilde{\Gamma} \quad (24)$$

при любых U и $\tilde{\Gamma}$. Поскольку функции $\mathbf{u}^Y$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U)$ гармонические на U , из (24), из (24) и теоремы о единственности решений задачи Коши для эллиптических уравнений следует, что

$$\mathbf{u}^Y = \operatorname{Re}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}_U) \text{ на } U.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{v}_U = \frac{\mathbf{u}^f \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^Y}{\mathbf{u}^p},$$

причем здесь правая часть определена глобально на $\mathbf{M}$, а левая часть гладкая и гармоническая на любой окрестности U и удовлетворяет условию Коши-Римана $\Phi \nabla \mathbf{u}^h = \nabla \mathbf{v}_U$ на U . Таким образом, функция

$$\tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{u}^h + i \frac{\mathbf{u}^f \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^Y}{\mathbf{u}^p}.$$

(глобально) голоморфна на $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$, причем $\overline{\tilde{\mathbf{w}} \circ \tau} = \tilde{\mathbf{w}}$ и

$$\tilde{\mathbf{w}}|_{\Gamma} = \mathbf{h} + i \frac{\mathbf{f}\mathbf{h} - \mathbf{Y}}{\mathbf{p}} = \mathbf{h} + i\mathbf{q} = h \circ \pi + i\sigma((\partial_{\gamma}^{-1}\Lambda h) \circ \pi + \tilde{c}_{f,h}).$$

Отсюда и из утверждения 2. Леммы 0.2 следует, что $\mathcal{G}(h) = 0$. Тем самым доказано включение $\text{Ker}\mathcal{G}_{f,(1)} \subset \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$.

Теперь пусть $h \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$; тогда из утверждения 2. Леммы 0.2 следует, что функция $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^{\mathbf{h}} + \mathbf{u}^{\mathbf{q}}$ голоморфна, где $\mathbf{h}$ и $\mathbf{q}$ заданы формулой (19) и $\tilde{c}_{f,h}$ — некоторая константа. Тогда функция $\text{Re}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w})$ гармонична на $(\mathbf{M}, \mathbf{g})$ и $\text{Re}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}) = \mathbf{Y}$ на $\tilde{\Gamma}$, откуда следует $\mathbf{u}^{\mathbf{Y}} = \text{Re}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w})$ и равенство (24) на Γ . Поскольку последнее равенство эквивалентно уравнениям (18) и $\mathcal{G}_{f,(1)}(h) = 0$, доказано включение $\text{Ker}\mathcal{G}_{f,(1)} \supset \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$. $\square$

Пусть функция $f \in \mathcal{G}^{-1}(\{0\})$ непостоянна. Поскольку функции $h_1, \dots, h_{\chi}$ из леммы 0.3 линейно независимы по модулю $\mathcal{G}^{-1}(\{0\})$, из формулы (17) и компактности единичной сферы $S^{\chi-1}$ в $\mathbb{C}^{\chi}$ следует, что

$$\inf_{\vec{e} \in S^{\chi-1}} \left\| \mathcal{G}_{f,(1)} \left(\sum_{k=1}^{\chi} e_k h_k \right) \right\| \geq C(\mathcal{G}, f) > 0. \quad (25)$$

Из (25) и непрерывности и однородности (степени k) каждого отображения $\mathcal{G}_{f,(k)}$ следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{G} \left(f - \sum_{k=1}^{\chi} d_k h_k \right) \right\|_F &= \left\| \sum_{n=1}^3 \mathcal{G}_{f,(n)} \left(- \sum_{k=1}^{\chi} d_k h_k \right) \right\|_F \\ &= \left\| \sum_{n=1}^3 |\vec{d}|^n \mathcal{G}_{f,(n)} \left(- \sum_{k=1}^{\chi} \frac{d_k}{|\vec{d}|} h_k \right) \right\|_F \\ &\geq |\vec{d}| \left\| \mathcal{G}_{f,(1)} \left(- \sum_{k=1}^{\chi} \frac{d_k}{|\vec{d}|} h_k \right) \right\|_F - \sum_{n=2,3} |\vec{d}|^n \left\| \mathcal{G}_{f,(n)} \left(- \sum_{k=1}^{\chi} \frac{d_k}{|\vec{d}|} h_k \right) \right\|_F \\ &\geq C(\mathcal{G}, f) |\vec{d}| - c(\mathcal{G}, f) |\vec{d}|^2 \geq C(\mathcal{G}, f) |\vec{d}|/2 \end{aligned}$$

при достаточно малых $\vec{d} \in \mathbb{C}^{\chi}$. Отсюда и из определения (11) функции $\mathfrak{e}_f$ немедленно следует оценка (14).

Наконец, подстановка (14) в формулы (13), (3) и (4) дает оценку $t(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = O(\varepsilon)$ и неравенство (2). Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 0.5. При всех $m = 0, 1, \dots$ и $o = \pm$ решающее отображение $\mathcal{R} : (\mathcal{D}_{m,o}, d_{\text{ор}}) \rightarrow (\mathcal{M}_{m,o}, d_T)$ поточечно билипшицево.

Оценки устойчивости определения поверхности с краем по ДН-оператору, заданному на части границы. Пусть (M, g) – (ориентируемая или неориентируемая) поверхность с краем и (Γ, dl) – компонента связности ∂M (dl – элемент длины, индуцированный метрикой g на Γ). Введем оператор Лапласа–Бельтрами Δ_g на (M, g) и обозначим через u^f решение задачи

$$\Delta_g u^f = 0 \text{ в } M \setminus \partial M, \quad u^f = f \text{ на } \Gamma, \quad \partial_\nu u^f = 0 \text{ на } \partial M \setminus \Gamma,$$

где ν – единичный вектор внешней нормали на ∂M . Определим (частичный) ДН-оператор поверхности (M, g) правилом $\Lambda f = \partial_\nu u^f|_\Gamma$. Мы пишем $[(M, g)] = [(M', g')]$ если (Γ, dl) является общей частью краев ∂M и $\partial M'$ и между (M, g) и (M', g') существует конформный диффеоморфизм, недвигающий точки Γ ; тогда $[(M, g)] = [(M', g')]$ если и только если их ДН-операторы совпадают. Как и раньше, пространство $\mathcal{M}$ конформных классов $[(M, g)]$ поверхностей (M, g) фиксированного топологического типа наделяется метрикой Тейхмюллера $d_T([(M, g)], [(M', g')]) = \inf \frac{1}{2} \log K_\beta$ (где инфимум берется по всем диффеоморфизмам между M и M' , недвигающим точки Γ), а пространство $\mathcal{D}$ соответствующих им ДН-операторов – метрикой $d_{\text{ор}}$.

Вне зависимости от ориентируемости поверхности M для нее определено двулистное (разветвленное) накрытие $(\mathbf{M}, g, \bar{\tau})$, такое, что $(\mathbf{M}, g)/\bar{\tau} = (M, g)$ (если M ориентируема, то $\mathbf{M}$ получается склеиванием двух копий M вдоль $M \setminus \Gamma$, если же M неориентируема, то $\mathbf{M}$ получается из двулистного ориентируемого накрытия $(\mathbf{M}, g, \tau, \pi)$ поверхности M отождествлением таких точек $\mathbf{x}$ и $\tau(\mathbf{x})$, что $\pi(\mathbf{x}) \in M \setminus \Gamma$). Для таких накрытий по-прежнему верна Теорема 0.1, а характеристика граничных следов голоморфных функций w , симметричных относительно инволюции $(\bar{w} \circ \bar{\tau} = w)$ – такая же, как в утверждении 2. Леммы 0.2 (этот факт доказан в Лемме 2, [10]). Поэтому повторение рассуждений выше приводит к следующему утверждению.

Предложение 0.6. Решающее отображение $\mathcal{R} : (\mathcal{D}, d_{\text{ор}}) \rightarrow (\mathcal{M}, d_T)$ поточечно билипшицево.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Lassas, G. Uhlmann, *On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map*. — The Annales scientifiques de l'École normale supérieure **34**, No. 5 (2001), 771–787.
2. M. I. Belishev, *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method*. — SIAM J. Math. Anal. **35**, No. 1 (2003), 172–182.
3. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *Stability of determination of Riemann surface from its DN-map*. — J. Inverse Ill-posed Problems **31**, No. 2 (2023), 159–176.
4. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *Stability of Determination of Riemann Surface from its Dirichlet-to-Neumann Map in Terms of Teichmüller Distance*. — SIAM J. Math. Analysis **55**, No. 6 (2023), 7426–7448.
5. D. V. Korikov, *Stability Estimates in Determination of Non-orientable Surface from Its Dirichlet-to-Neumann Map*. — Complex Analysis and Operator Theory **18**, No. 29 (2024).
6. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *On the EIT problem for nonorientable surfaces*. — J. Inverse and Ill-posed Problems **18** (2020).
7. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *On determination of nonorientable surface via its Dirichlet-to-Neumann operator*. — SIAM J. Math. Anal. **53**, No. 5 (2021), 5278–5287.
8. J. M. Lee, G. Uhlmann, *Determining anisotropic realanalytic conductivities by boundary measurements*. — Commun. Pure Appl. Math. **42** (1989), 1097–1112.
9. Е. М. Чирка, *Римановы поверхности. Лекционные курсы НОЦ, М., вып. 1* (2006).
10. A. V. Badanin, M. I. Belishev, D. V. Korikov, *Electric impedance tomography problem for surfaces with internal holes*. — Inverse Problems **37**, No. 10 (2021).

Korikov D. V. Optimal stability estimates for determination of a non-orientable surface with boundary via its DN-map.

As is well-known, a surface with boundary is determined, up to conformal equivalence, by its Dirichlet-to-Neumann (DN) map. In this note, we prove the local estimates of the Teichmüller distance between the conformal classes of non-orientable surfaces (M, g) and (M', g') with given boundary $\Gamma = \partial M = \partial M'$ and the topology via the operator norm of the difference between their DN-maps. These estimates are optimal and they refine the corresponding results of previous works [4, 5].

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: thecakeisalie@list.ru

Поступило 15 сентября 2025 г.