

М. Н. Демченко

**ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

К юбилею Василия Михайловича Бабича

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение вида

$$(\partial_{ts}^2 + \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2 - \partial_{y_1}^2 - \dots - \partial_{y_n}^2)v = 0, \quad (1)$$

где v есть функция переменных

$$(t, s, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n, \quad d, n \geq 1,$$

на которую накладывается условие

$$v(0, \cdot) = v_0. \quad (2)$$

Уравнение (1) является ультрагиперболическим, а условие (2) задает решение на характеристической гиперплоскости $\{t = 0\}$.

В работе [1] была установлена корректность задачи (1), (2) в определенном классе функций. Там же был установлен следующий закон сохранения

$$\|v(t, \cdot)\|_{L_2} = \|v_0\|_{L_2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Эти два обстоятельства показывают, что данная задача близка по своим свойствам к классическим эволюционным задачам для гиперболических уравнений. В частности, можно строить аналог нестационарной теории рассеяния для такой задачи, в которой роль времени играет переменная t . В этом контексте особенно важное значение имеет вопрос асимптотического поведения решений при $t \rightarrow \infty$. В данной работе получено представление решения задачи (1), (2), удобное для вывода такой асимптотики (теорема 2).

В работе [1] была получена формула для решения задачи (1), (2) в виде свертки данных v_0 с некоторым распределением в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, имеющим смысл фундаментального решения. Последнее описано в

Ключевые слова: ультрагиперболическое уравнение, характеристическая задача, асимптотика решения на бесконечности.

терминах аналитического продолжения некоторого распределения по комплексному параметру, что усложняет применение данной формулы для асимптотического анализа решения.

Наш интерес к характеристической задаче обусловлен тем, что она, в отличие от задачи Коши для ультрагиперболических уравнений, допускает корректную постановку в стандартных (неаналитических) классах функций. Помимо уже упомянутой работы [1], этот вопрос исследовался в [2], где была установлена корректность задачи с данными на характеристическом конусе. Отметим также, что уравнения такого типа допускают постановку, в которой в качестве данных задаются асимптотики решения на бесконечности [3–6]. В случае гиперболических уравнений такого рода задачи были исследованы в работах [7–10].

Автор глубоко признателен Александру Сергеевичу Благовещенскому за полезные обсуждения по тематике статьи.

§2. ПОСТАНОВКА И КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ

Введем обозначения

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \bar{y} = y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n, \quad N = d + n.$$

Мы будем предполагать, что решение v задачи (1), (2) является непрерывной функцией переменной $t \in \mathbb{R}$, значения которой при каждом t суть функции переменных $(s, \bar{x}, \bar{y})$, принадлежащие $L_2(\mathbb{R}^{N+1})$. Запишем кратко это условие следующим образом

$$v \in C(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^{N+1})). \quad (3)$$

Такую функцию можно рассматривать как измеримую по Лебегу скалярную функцию переменных $(t, s, \bar{x}, \bar{y})$ в $\mathbb{R}^{N+2}$. Это следует из того, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ свертки $\varepsilon^{-N-1} \chi_\varepsilon * v(t, \cdot)$ (χ_ε – характеристическая функция шара в $\mathbb{R}^{N+1}$ радиуса ε с центром в нуле) по переменным $s, \bar{x}, \bar{y}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к $v(t, \cdot)$ в каждой точке Лебега этой функции из $L_2(\mathbb{R}^{N+1})$. Поскольку эти свертки непрерывны в $\mathbb{R}^{N+2}$, функция v измерима как предел почти всюду в $\mathbb{R}^{N+2}$ последовательности непрерывных функций.

Из предположения (3) также следует, что $v \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+2})$, а значит, эта функция является регулярным распределением в $\mathbb{R}^{N+2}$. Поэтому

мы можем потребовать, чтобы уравнение (1) выполнялось в обобщенном смысле в $\mathbb{R}^{N+2}$. Условие (2) с данными $v_0 \in L_2(\mathbb{R}^{N+1})$ для функций класса (3) имеет очевидный смысл. В этом параграфе мы покажем, что задача (1), (2) в такой постановке имеет единственное решение.

Теорема 1. *Существует единственное решение $v(t, s, \bar{x}, \bar{y})$ класса (3), удовлетворяющее (1), (2) для заданной функции $v_0 \in L_2(\mathbb{R}^{N+1})$.*

Доказательство. Определим преобразование Фурье функции $f(s, \bar{x}, \bar{y})$ формулой

$$(Ff)(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = 2 \int_{\mathbb{R}^{N+1}} e^{-i(s\lambda + \bar{x}\bar{\xi} - \bar{y}\bar{\eta})} f(s, \bar{x}, \bar{y}) ds d\bar{x} d\bar{y}.$$

Начнем с доказательства единственности решения. Пусть функция $v(t, s, \bar{x}, \bar{y})$ является решением задачи с $v_0 = 0$. Обозначим через $\tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ ее преобразование Фурье F по переменным $s, \bar{x}, \bar{y}$. Далее пусть $\psi(t, s, \bar{x}, \bar{y})$ – произвольная пробная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+2})$, $\Psi(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ – ее обратное преобразование Фурье F^{-1} по переменным $s, \bar{x}, \bar{y}$. Имеем (здесь и далее угловыми скобками обозначается действие распределения на пробную функцию)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, (\partial_{ts}^2 + \Delta_{\bar{x}} - \Delta_{\bar{y}})\psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (v(\partial_{ts}^2 + \Delta_{\bar{x}} - \Delta_{\bar{y}})\psi)(t, s, \bar{x}, \bar{y}) ds d\bar{x} d\bar{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (\tilde{v}(-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\Psi)(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\lambda d\bar{\xi} d\bar{\eta}. \end{aligned}$$

По теореме Планшереля функция $\tilde{v}$, как и функция v , удовлетворяет условию вида (3), поэтому она также является измеримой по Лебегу функцией в $\mathbb{R}^{N+2}$. Кроме того, из свойства (3) для $\tilde{v}$ следует, что подынтегральная функция в полученном выражении суммируема в $\mathbb{R}^{N+2}$. Применив теорему Фубини, мы получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\lambda d\bar{\xi} d\bar{\eta} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{v}(-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\Psi)(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) dt = 0.$$

Выберем теперь пробную функцию вида

$$\psi(t, s, \bar{x}, \bar{y}) = \psi_1(t)\psi_2(s, \bar{x}, \bar{y}),$$

где $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Тогда интеграл в последнем тождестве примет вид

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\lambda d\bar{\xi} d\bar{\eta} (F^{-1}\psi_2)(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})(-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\psi_1(t) dt,$$

а само тождество может быть записано в виде

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} ((G\psi_2)w)(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\lambda d\bar{\xi} d\bar{\eta} = 0, \quad \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}).$$

Здесь функция $w(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ и оператор G определяются равенствами

$$\begin{aligned} G\psi_2 &= PF^{-1}\psi_2, \\ w(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{P(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})} \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})(-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\psi_1(t) dt, \\ P(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) &= 1 + \lambda^2 + \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2. \end{aligned}$$

Функция w принадлежит $L_2(\mathbb{R}^{N+1})$ в силу финитности функции ψ_1 и неравенства Коши-Шварца. Выведем из полученного тождества равенство $w = 0$. Для этого достаточно показать, что любую функцию из $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ можно приблизить в топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ функциями вида $G\psi_2$, где $\psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Пусть функция $\chi(s, \bar{x}, \bar{y})$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ и равна единице в начале координат. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\chi^\varepsilon(s, \bar{x}, \bar{y}) = \chi(\varepsilon s, \varepsilon \bar{x}, \varepsilon \bar{y}), \quad \psi_2^\varepsilon = \chi^\varepsilon F(\varphi/P) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}).$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции ψ_2^ε стремятся к функции $F(\varphi/P)$ в топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$, а значит, $G\psi_2^\varepsilon = PF^{-1}\psi_2^\varepsilon$ стремятся к φ .

Итак, мы получили, что для фиксированной функции ψ_1 при п.в. $(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})(-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\psi_1(t) dt = 0. \quad (4)$$

Пусть теперь $\{\psi_1^k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(-T, T)$ – счетное плотное подмножество пространства

$$C_T^1 = \{\varphi \in C^1[-T, T] \mid \varphi(\pm T) = \varphi'(\pm T) = 0\}$$

для некоторого $T > 0$. На некотором множестве точек $(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ полной меры в $\mathbb{R}^{N+1}$ равенство (4) выполнено при $\psi_1 = \psi_1^k$ для любого

$k \geq 1$. Следовательно, оно выполнено для любого $\psi_1 \in C_T^1$. Тогда для некоторого $V(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ и п.в. $t \in [-T, T]$ справедливо равенство

$$\tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = e^{it(\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2)/\lambda} V(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}). \quad (5)$$

Условие $\tilde{v}(t, \cdot) \in L_2(\mathbb{R}^{N+1})$ означает, что $V \in L_2(\mathbb{R}^{N+1})$. Тогда правая часть в (5) определяет элемент класса (3), для которого выполнено $\tilde{v}(0, \cdot) = V$. Это следует из теоремы Лебега о суммируемой мажоранте. А так как $\tilde{v}(0, \cdot) = 0$, мы получаем, что $V = 0$, а значит, $\tilde{v} = 0$ в $[-T, T] \times \mathbb{R}^{N+1}$. Ввиду произвольности T , выполнено $v = 0$ в $\mathbb{R}^{N+2}$.

Докажем теперь существование решения задачи (1), (2). Мы будем исходить из равенства (5). Точнее, мы покажем, что для заданного $v_0 \in L_2(\mathbb{R}^{N+1})$ обратное преобразование Фурье F^{-1} функции

$$\tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = e^{it(\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2)/\lambda} \tilde{v}_0(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad \tilde{v}_0 = Fv_0, \quad (6)$$

по переменным $\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}$ является решением задачи. Как уже отмечалось, функция такого вида принадлежит классу (3) и удовлетворяет равенству $\tilde{v}(0, \cdot) = \tilde{v}_0$, то есть условию (2).

Далее, пусть $\psi(t, s, \bar{x}, \bar{y})$ – пробная функция из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+2})$, $\Psi(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ – ее обратное преобразование Фурье F^{-1} по переменным $s, \bar{x}, \bar{y}$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle v, (\partial_{ts}^2 + \Delta_{\bar{x}} - \Delta_{\bar{y}})\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (v(\partial_{ts}^2 + \Delta_{\bar{x}} - \Delta_{\bar{y}})\psi)(t, s, \bar{x}, \bar{y}) ds d\bar{x} d\bar{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^{N+1}} (\tilde{v}(-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\Psi)(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\lambda d\bar{\xi} d\bar{\eta} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}} d\lambda d\bar{\xi} d\bar{\eta} \tilde{v}_0(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \int_{\mathbb{R}} e^{it(\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2)/\lambda} (-i\lambda\partial_t - \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)\Psi(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) dt = 0. \end{aligned}$$

Значит, уравнение (1) выполняется в обобщенном смысле. $\square$

§3. ПОЛНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Формула (6) дает выражение для преобразования Фурье решения задачи по переменным $s, \bar{x}, \bar{y}$. Однако, для исследования асимптотики решения при больших t более удобной оказывается формула для полного преобразования Фурье решения. Она может быть формально выведена из (6). Строгое обоснование этого вывода усложняется тем,

что в результате получается сингулярное распределение в $\mathbb{R}^{N+2}$, а также наличием особенности в показателе экспоненты в правой части (6).

Для нахождения преобразования Фурье решения мы перейдем к функции

$$u(x, y) = v(t, s, \bar{x}, \bar{y}), \quad (7)$$

где

$$x = (x_0, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad y = (y_0, \bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

а переменные x_0, y_0 связаны с t, s равенствами

$$x_0 = t + s, \quad y_0 = t - s. \quad (8)$$

Функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_x - \Delta_y)u = 0, \quad (9)$$

где $\Delta_x = \partial_{x_0}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$, $\Delta_y = \partial_{y_0}^2 + \dots + \partial_{y_n}^2$. Ее преобразование Фурье определим равенством (которое понимается в обобщенном смысле)

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^{N+2}} e^{-i(x\xi - y\eta)} u(x, y) dx dy.$$

Уравнение (9) означает, что $\text{supp } \hat{u} \subset \bar{\mathcal{C}}$, где

$$\mathcal{C} = \{(\xi, \eta) \in (\mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{n+1}) \setminus \{0\} \mid \xi^2 = \eta^2\}.$$

Мы будем искать $\hat{u}(\xi, \eta)$ в виде

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \delta(\xi^2 - \eta^2) a(\xi/|\xi|, \eta/|\eta|, |\xi|),$$

где амплитуда $a(\zeta, \sigma, r)$, определена на $\Sigma \times \mathbb{R}_+$, $\Sigma = S^d \times S^n$. Правую часть последнего равенства мы понимаем как распределение медленного роста, действующее на пробную функцию $\Phi(\xi, \eta)$ из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+2})$ по правилу

$$\langle \hat{u}, \Phi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} r^{N-1} a(\zeta, \sigma, r) \Phi(r\zeta, r\sigma) d\zeta d\sigma dr. \quad (10)$$

Здесь под $d\zeta$ и $d\sigma$ подразумевается поверхностная мера соответственно на S^d и S^n . В качестве амплитуды мы возьмем функцию

$$a(\xi, \eta) = 2\pi |\xi_0 + \eta_0| \tilde{v}_0(\xi_0 + \eta_0, \bar{\xi}, \bar{\eta}). \quad (11)$$

Заметим, что такой выбор амплитуды обеспечивает корректность определения (10), так как подинтегральное выражение в правой части является непрерывной ограниченной функцией на $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ с ограниченным носителем.

В оставшейся части этого параграфа мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть функция $v_0(s, \bar{x}, \bar{y})$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$, а распределение $u(x, y)$ определено равенствами (10), (11). Тогда распределение $v(t, s, \bar{x}, \bar{y})$, связанное с $u(x, y)$ соотношением (7), принадлежит классу (3) и удовлетворяет (1), (2).

Определим преобразование Фурье $F_t f$ функции $f(t)$ формулой

$$(F_t f)(\rho) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\rho} f(t) dt.$$

Обозначим через $\hat{v}(\rho, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ преобразование Фурье F_t функции $\tilde{v}(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ по переменной t . Покажем, что из соотношений (7), (8) следует равенство

$$\hat{u}(\xi, \eta) = \hat{v}(\rho, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (12)$$

где

$$\xi = (\xi_0, \bar{\xi}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad \eta = (\eta_0, \bar{\eta}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

а переменные ξ_0, η_0 и ρ, λ связаны соотношениями

$$\lambda = \xi_0 + \eta_0, \quad \rho = \xi_0 - \eta_0. \quad (14)$$

Выведем равенство (12) для классических функций u, v , связанных соотношением (7), из которого следует аналогичный факт для распределений. Имеем

$$\begin{aligned} x_0 \xi_0 - y_0 \eta_0 &= \frac{1}{2} (x_0 (\lambda + \rho) - y_0 (\lambda - \rho)) \\ &= \frac{1}{2} ((x_0 - y_0) \lambda + (x_0 + y_0) \rho) = t\rho + s\lambda, \end{aligned}$$

поэтому

$$x\xi - y\eta = t\rho + s\lambda + \bar{x}\bar{\xi} - \bar{y}\bar{\eta}.$$

Отсюда

$$\hat{u}(\xi, \eta) = 2 \int_{\mathbb{R}^{N+2}} e^{-i(t\rho + s\lambda + \bar{x}\bar{\xi} - \bar{y}\bar{\eta})} v(t, s, \bar{x}, \bar{y}) dt ds d\bar{x} d\bar{y} = \hat{v}(\rho, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

Пусть $\psi(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ — финитная пробная функция, $\Psi(\rho, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ — ее обратное преобразование Фурье F_t^{-1} по переменной t . Положим

$$\Phi(\xi, \eta) = \Psi(\rho, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}),$$

имея ввиду связь переменных ρ, λ и ξ_0, η_0 вида (14). Имеем

$$\langle \tilde{v}, \psi \rangle = \langle \hat{v}, \Psi \rangle = 2 \langle \hat{u}, \Phi \rangle = \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} r^{N-1} a(\zeta, \sigma, r) \Phi(r\zeta, r\sigma) d\zeta d\sigma dr.$$

Коэффициент 2 во втором равенстве связан с якобианом замены переменных $(\rho, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ на (ξ, η) . В третьем равенстве мы воспользовались определением (10).

Выберем функцию $\chi(r)$ класса $C_0^\infty([0, \infty))$, равную единице при малых r . Ввиду быстрого убывания функции Φ , полученное в предыдущей выкладке выражение равно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} r^{N-1} \chi(\varepsilon r) a(\zeta, \sigma, r) \Phi(r\zeta, r\sigma) d\zeta d\sigma dr.$$

Используя обозначения для ζ, σ , аналогичные (13), преобразуем интеграл в данном выражении следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} r^{N-1} \chi(\varepsilon r) a(\zeta, \sigma, r) \Psi(r(\zeta_0 - \sigma_0), r(\zeta_0 + \sigma_0), r\bar{\zeta}, r\bar{\sigma}) d\zeta d\sigma dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} d\zeta d\sigma dr r^{N-1} \chi(\varepsilon r) a(\zeta, \sigma, r) \int_{\mathbb{R}} e^{itr(\zeta_0 - \sigma_0)} \psi(t, r(\zeta_0 + \sigma_0), r\bar{\zeta}, r\bar{\sigma}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} r^{N-1} \chi(\varepsilon r) a(\zeta, \sigma, r) e^{itr(\zeta_0 - \sigma_0)} \psi(t, r(\zeta_0 + \sigma_0), r\bar{\zeta}, r\bar{\sigma}) d\zeta d\sigma dr \end{aligned} \quad (15)$$

(суммируемость подинтегральной функции обеспечивается множителем χ). Далее мы преобразуем внутренний интеграл по ζ, σ, r в интеграл по переменным

$$\lambda = r(\zeta_0 + \sigma_0), \quad \bar{\xi} = r\bar{\zeta}, \quad \bar{\eta} = r\bar{\sigma}$$

с помощью формулы (вывод дан в п. 4)

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma \times \mathbb{R}_+} W(r\zeta, r\sigma) r^{N-1} d\zeta d\sigma dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} W \left(\frac{\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}, \bar{\xi}, \frac{\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}, \bar{\eta} \right) \frac{d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\lambda}{|\lambda|}, \quad (16) \end{aligned}$$

в которой $W(\xi, \eta)$ – ограниченная непрерывная функция на поверхности $\mathcal{C}$ с ограниченным носителем. В нашем случае эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) &= \chi(\varepsilon|\xi|) a(\xi/|\xi|, \eta/|\eta|, |\xi|) e^{it(\xi_0 - \eta_0)} \psi(t, \xi_0 + \eta_0, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ &= 2\pi\chi(\varepsilon|\xi|) |\xi_0 + \eta_0| \tilde{v}_0(\xi_0 + \eta_0, \bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{it(\xi_0 - \eta_0)} \psi(t, \xi_0 + \eta_0, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \end{aligned}$$

(мы воспользовались формулой (11)) и имеет ограниченный носитель благодаря множителю χ . Таким образом, полученное в (15) выражение равно

$$\int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \chi(\varepsilon r) \tilde{v}_0(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{it(\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2)/\lambda} \psi(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\lambda,$$

где $r = (\xi_0^2 + \bar{\xi}^2)^{1/2}$, а функция $\xi_0 = \xi_0(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \lambda)$ определяется формулой (18). При $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено $\chi(\varepsilon r) \rightarrow 1$, как только $\bar{\xi} \neq 0$. Учитывая финитность функции ψ , применение теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла дает

$$\langle \tilde{v}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \tilde{v}_0(\lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{it(\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2)/\lambda} \psi(t, \lambda, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\lambda,$$

откуда следует равенство (6).

§4. ВЫВОД РАВЕНСТВА (16)

Нам понадобится следующее равенство для достаточно регулярной функции $f(\zeta)$ на сфере S^m

$$\int_{S^m} f(\zeta) d\zeta = \sum_{\pm} \int_{B_1^d} f\left(\pm\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}, \bar{\zeta}\right) \frac{d\bar{\zeta}}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}}$$

(здесь и далее B_r^m – шар радиуса r в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат).

Преобразуем левую часть равенства (16) следующим образом

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dr r^{N-1} \int_{\Sigma} W(r\zeta, r\sigma) d\zeta d\sigma \\
&= \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} \int_0^\infty dr r^{N-1} \int_{B_1^d} \frac{d\bar{\zeta}}{\sqrt{1-\bar{\zeta}^2}} \int_{B_1^n} W\left(\alpha r \sqrt{1-\bar{\zeta}^2}, r\bar{\zeta}, \beta r \sqrt{1-\bar{\sigma}^2}, r\bar{\sigma}\right) \frac{d\bar{\sigma}}{\sqrt{1-\bar{\sigma}^2}} \\
&= \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} \int_0^\infty dr r \int_{B_r^d} \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{r^2-\bar{\xi}^2}} \int_{B_r^n} W\left(\alpha \sqrt{r^2-\bar{\xi}^2}, \bar{\xi}, \beta \sqrt{r^2-\bar{\eta}^2}, \bar{\eta}\right) \frac{d\bar{\eta}}{\sqrt{r^2-\bar{\eta}^2}} \\
&= \sum_{\alpha, \beta = \pm 1} \int_{\mathbb{R}^d} d\bar{\xi} \int_{\mathbb{R}^n} d\bar{\eta} \int_{\max(|\bar{\xi}|, |\bar{\eta}|)}^\infty \frac{W(\xi_0, \bar{\xi}, \eta_0, \bar{\eta}) r dr}{|\xi_0 \eta_0|}. \quad (17)
\end{aligned}$$

В последнем выражении используются обозначения

$$\xi_0 = \alpha \sqrt{r^2 - \bar{\xi}^2}, \quad \eta_0 = \beta \sqrt{r^2 - \bar{\eta}^2}.$$

Сделаем во внутреннем интеграле по переменной r замену

$$\lambda(r) = \xi_0 + \eta_0.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $\bar{\xi}^2 \neq \bar{\eta}^2$. При выполнении этого условия указанная замена взаимнооднозначна, поскольку производная

$$\partial_r \lambda = \frac{\alpha r}{\sqrt{r^2 - \bar{\xi}^2}} + \frac{\beta r}{\sqrt{r^2 - \bar{\eta}^2}}$$

знакоопределена. Кроме того, выполнено $\lambda \neq 0$, и имеет место равенство

$$\partial_{\lambda} r = (\partial_r \lambda)^{-1} = \frac{\alpha \beta \sqrt{(r^2 - \bar{\xi}^2)(r^2 - \bar{\eta}^2)}}{r \lambda} = \frac{\xi_0 \eta_0}{r \lambda}.$$

Из равенств

$$\xi_0^2 + \bar{\xi}^2 = \eta_0^2 + \bar{\eta}^2, \quad \eta_0 = \lambda - \xi_0$$

следует, что для любых $\alpha, \beta = \pm 1$ справедливо

$$\xi_0 = \frac{\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}, \quad \eta_0 = \frac{\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}. \quad (18)$$

Рассмотрим случай $\bar{\xi}^2 > \bar{\eta}^2$, в котором переменная r принимает значения из $(|\bar{\xi}|, \infty)$. Опишем поведение функции $\lambda(r)$ при различных значениях α, β :

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = 1 : \quad & \lambda(|\bar{\xi}|) = \Lambda, \quad \lambda(+\infty) = +\infty, \\ \alpha = -\beta = 1 : \quad & \lambda(|\bar{\xi}|) = -\Lambda, \quad \lambda(+\infty) = 0, \\ \alpha = -\beta = -1 : \quad & \lambda(|\bar{\xi}|) = \Lambda, \quad \lambda(+\infty) = 0, \\ \alpha = \beta = -1 : \quad & \lambda(|\bar{\xi}|) = -\Lambda, \quad \lambda(+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda = \sqrt{\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2}$. В каждом из указанных случаев внутренний интеграл в (17) равен интегралу

$$\int W(\xi_0, \bar{\xi}, \eta_0, \bar{\eta}) \frac{d\lambda}{|\lambda|},$$

взятому по соответствующему промежутку. Поскольку эти промежутки, не перекрываясь, заполняют всю вещественную ось, внутренний интеграл в (17) после суммирования по $\alpha, \beta = \pm 1$ с учетом формул (18) дает

$$\int_{\mathbb{R}} W \left(\frac{\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}, \bar{\xi}, \frac{\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}, \bar{\eta} \right) \frac{d\lambda}{|\lambda|}.$$

В случае $\bar{\xi}^2 < \bar{\eta}^2$ аналогичные выкладки дают такое же выражение для интеграла по переменной r .

Теперь мы можем подытожить выкладку (17) равенством (16). Абсолютная сходимость интеграла в правой части этого равенства следует из самого вывода данного соотношения. Ее также можно установить непосредственно. В самом деле, при больших $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ подинтегральное выражение равно нулю ввиду финитности функции W . Это же верно и при больших λ , так как сумма аргументов ξ_0 и η_0 функции W равна λ . Далее, при малых λ подинтегральное выражение отлично от нуля лишь при

$$|\bar{\eta}^2 - \bar{\xi}^2| \leq C|\lambda|$$

(C зависит от размера носителя функции W), так как в противном случае аргументы ξ_0, η_0 функции W под интегралом будут достаточно большими. Из последнего неравенства вытекает, что

$$||\bar{\eta}| - |\bar{\xi}|| \leq \sqrt{C|\lambda|}.$$

Поэтому при малых λ мера множества точек $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, на котором подинтегральное выражение отлично от нуля, не превосходит $C\sqrt{|\lambda|}$, откуда следует абсолютная сходимость интеграла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Благовещенский, *О задаче для ультрагиперболического уравнения с данными на характеристической плоскости*. — Вестник ЛГУ, **13** (1965), 13–19.
2. А. С. Благовещенский, *О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения*. — Матем. сб., **63:105**, No. 1 (1964), 137–168.
3. М. Н. Демченко, *Асимптотические свойства решений одного ультрагиперболического уравнения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **516** (2022), 40–64.
4. М. Н. Демченко, *Существование решения задачи рассеяния для ультрагиперболического уравнения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **521** (2023), 79–94.
5. M. N. Demchenko, *On the scattering problem for the nonhomogeneous ultrahyperbolic equation*. — In: IEEE Conference Proceedings: Days on Diffraction 2024, 21–24.
6. М. Н. Демченко, *Существование решения неоднородного ультрагиперболического уравнения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **533** (2024), 77–100.
7. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения*. — Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (1970), 29–35, Ленинград, Наука (1971).
8. H. E. Moses, R. T. Prosser, *Acoustic and electromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equations*. — SIAM J. Appl. Math., **50**, No. 5 (1990), 1325–1340.
9. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор)*. — Оптика и спектроскопия, **102**, No. 4 (2007), 661–681.
10. А. Б. Плаченов, *Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **493** (2020), 269–287.

Demchenko M. N. On a certain representation of a solution to the characteristic problem for the ultrahyperbolic equation.

We consider the characteristic problem for the ultrahyperbolic equation in the Euclidean space. The solution is prescribed on the characteristic hyperplane. A well-posed set-up of the problem is discussed. We obtain a

certain representation for a solution suitable for analysis of its asymptotics at the infinity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 1 октября 2025 г.