

А. М. Будылин, С. Б. Левин, В. О. Торопов

**О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ ОДНОМЕРНЫХ
КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ
ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ В
ПАРНЫХ ПОДСИСТЕМАХ.**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача рассеяния трех одномерных квантовых частиц, изучение которой в разных аспектах ведется на протяжении многих лет [1–13]. Настоящая работа является естественным продолжением работ авторов [14–16], в которых изучалась задача рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами отталкивания. Мы рассматриваем систему трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами притяжения. Следуя логике основателя данной тематики Л. Д. Фаддеева, см. [17], мы ограничиваемся случаем наличия одного связанного состояния в каждой подсистеме.

Основной интерес представляет вклад такого состояния в полную координатную асимптотику собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

Естественно, данная работа в значительной степени повторяет логику работы [15]. В основе этой логики лежит изучение предельных значений резольвенты соответствующего оператора Шредингера, когда спектральный параметр садится на положительную полуось, заполненную, как хорошо известно, точками абсолютно непрерывного спектра, см., например, [19]. Эта предельная процедура опирается на альтернирующий метод Шварца (в некотором смысле – вариант уравнений Фаддеева), см. [15, 18], и проводится в рамках оснащенного гильбертова пространства (гельфандовой тройки). При этом оказывается,

Ключевые слова: задача трех одномерных квантовых частиц, резольвента оператора Шредингера, альтернирующий метод Шварца, двухчастичные связанные состояния, координатная асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

что координатная асимптотика предельных значений ядра резольвенты на абсолютно непрерывном спектре имеет в точности ту же структуру (но с более богатой аналитикой), что и в работе [15], т.е. при отсутствии связанных состояний в парных подсистемах.

Как следствие, техника, развитая в работе [16], позволяет вычлени из асимптотики ядра резольвенты координатные асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

Для удобства читателя мы напомним основные положения задачи.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматривается оператор в $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$\tilde{H} = -\Delta + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3}^3 v_{ij}(r_i - r_j), \quad (2.1)$$

$$r_i \in \mathbb{R}, (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3,$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, v_{ij} – потенциал взаимодействия частиц с индексами i и j , $v_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – четная функция с финитным носителем, r_i , $i = 1, 2, 3$ – координаты частиц в лабораторной системе координат.

Определим три пары координат Якоби

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_k - r_j), \quad y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}r_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

а также координату центра масс $u = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$. Здесь (i, j, k) – четная перестановка чисел $(1, 2, 3)$. Отделяя движение центра масс системы, мы приходим к изучению оператора вида

$$H = -\Delta + \sum_{i=1}^3 v_i(x_i), \quad (2.2)$$

заданного в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Здесь v_i – потенциал взаимодействия в i -й подсистеме частиц с индексами j и k . Отметим, что эта запись отражает возможность записать данный оператор в терминах любой из трех пар координат Якоби. При этом переход от одной пары координат к другой осуществляется преобразованием поворота. На рис. 1 изображен носитель полного потенциала в $\mathbb{R}^2$. Пару координат Якоби будем обозначать через $\mathbf{z}$ или $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)$ (в зависимости от контекста), а

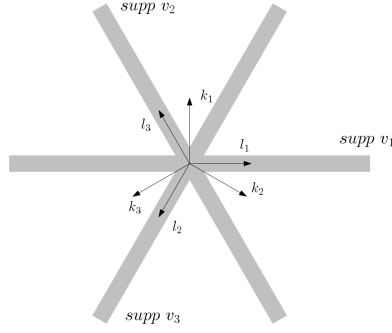


Рис. 1. “Крест” в конфигурационном пространстве, образованный носителями потенциалов.

соответствующие ей орты через k_i , l_i . Символом $|\mathbf{z}|$ мы будем обозначать модуль вектора, $\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ — соответствующий единичный вектор, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Прежде всего нас будут интересовать предельные значения ядра резольвенты оператора $R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$ при значениях спектрального параметра $\text{Re}(\lambda) = E > 0$, $\text{Im}(\lambda) \rightarrow +0$ (для определенности мы ограничиваемся пределами сверху) в рамках метода оснащенного гильбертова пространства или гельфандовых троек. Именно, предельные значения рассматриваются на некотором банаховом пространстве $\mathcal{B}$, вложенном в основное гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^2)$ в *-слабом смысле. Обобщённые собственные функции в этом случае трактуются как элементы пространства $\mathcal{B}^*$, а основным объектом изучения становится квадратичная форма $(R(E \pm i\varepsilon)\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}$, при $\varepsilon \downarrow 0$, определяющая оператор $R(E + i0) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$.

В дальнейшем нам также понадобятся операторы

$$\begin{aligned} R_0(\lambda) &= (-\Delta - \lambda I)^{-1}, \\ R_j(\lambda) &= (-\Delta + v_j - \lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

Опишем асимптотики их ядер. Асимптотика $R_0(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \lambda)$ при $\text{Im}(\lambda) > 0$, $|\mathbf{z} - \mathbf{z}'| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$R_0(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \lambda) = H_0(\sqrt{\lambda|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|})/4i \sim \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|}}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|^{1/2}}. \quad (2.3)$$

Одночастичная резольвента R_j может быть описана интегралом

$$R_j(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi r_j(x_j, x'_j, \xi) r_0(y_j, y'_j, \lambda - \xi). \quad (2.4)$$

Здесь C – контур вокруг спектра парного одномерного оператора Шредингера, определенный в стандартном отрицательном направлении, r_0 и r_j – ядра резольвент операторов

$$h_0 = -\frac{d^2}{dy^2} \quad \text{и} \quad h_j = -\frac{d^2}{dx^2} + v_j(x) \quad (2.5)$$

соответственно. Ядро свободной резольвенты r_0 для случая $\text{Im}(k) > 0$ дается равенством

$$r_0(y, y', k^2) = \frac{i}{2k} e^{ik|y-y'|}.$$

Ядро резольвенты r_j оператора h_j дается выражением

$$r_j(x, x', k^2) \sim \frac{\phi_j(x)\phi_j^*(x')}{\kappa^2 - k^2} + i\pi \frac{\psi_j(x_{<}, k)\psi_j^*(x'_{>}, k)}{2k}. \quad (2.6)$$

Здесь ϕ_j – собственные функции связанного состояния в паре частиц с индексом j и энергией $\kappa^2 < 0$ с асимптотическим поведением

$$\phi_j(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} e^{-|\kappa||x|}. \quad (2.7)$$

Функции ψ_j – функции Йоста, отвечающие двухчастичному рассеянию на потенциале v_j .

Резольвента R_j естественным образом распадается на две части:

$$R_j = R_j^d + R_j^{ac} \quad (2.8)$$

где R_j^d – интеграл по окружности малого радиуса вокруг точки дискретного спектра, то есть вычет:

$$R_j^d(z, z', \lambda) = \frac{\phi_j(x_j)\phi_j(x'_j)e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa^2|}|y_j-y'_j|}}{8i|\kappa|\sqrt{\lambda+|\kappa^2|}}. \quad (2.9)$$

Слагаемое R_j^{ac} возникает как интеграл по контуру вокруг положительной полуоси. При этом необходимо иметь в виду, что выбор координат Якоби ассоциирован с j -ой парой частиц или, что то же самое, с j -ой полосой носителя потенциала. В тех редких случаях, когда это не приводит к недоразумениям, этот индекс будет опускаться.

Асимптотика ядра R_j^{ac} исследуется методом стационарной фазы (см. например [15]):

$$R_j^{ac}(z, z', \lambda) = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}}{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{1/2}} + O(|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^{-1}). \quad (2.10)$$

§3. ИТЕРАЦИИ ОПЕРАТОРОВ ОТРАЖЕНИЯ.

Как уже говорилось выше, следуя построениям работы [15], мы будем изучать свойства предельных значений ядра резольвенты трехчастичного оператора H в ситуации, когда спектральный параметр садится на абсолютно непрерывный спектр. Как и в работе [15], мы воспользуемся для этого альтернирующим методом Шварца. Введем операторы отражения Γ_j , $j = 1, 2, 3$:

$$\Gamma_j = v_j R_j = \Gamma_j^d + \Gamma_j^{ac}, \quad \Gamma_j^d \equiv v_j R_j^d, \quad \Gamma_j^{ac} \equiv v_j R_j^{ac}. \quad (3.1)$$

Мы будем изучать свойства итераций таких операторов. Рассмотрим первую итерацию $\Gamma_i \Gamma_j$, $i \neq j$:

$$\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_i^d \Gamma_j^d + \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^d + \Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} + \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^{ac}. \quad (3.2)$$

Мы покажем теперь, что первые два слагаемых в выражении (3.2) допускают асимптотическое разделение переменных и порождают конечномерные операторы, а третье слагаемое порождает конечномерный и компактный операторы.

3.1. Итерации операторов $\Gamma_i^d \Gamma_j^d$. Рассмотрим первое слагаемое $\Gamma_i^d \Gamma_j^d$ при $|y_i| \gg 1$, $|y_j'| \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^d \Gamma_j^d &\sim \int_{\mathbb{R}} dx_i'' \int_{\mathbb{R}} dy_i'' v_i(x_i) \frac{\phi(x_i) \phi(x_i'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i|}}{8i|\kappa_i| \sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \\ &\quad \times v_j(x_j'') \frac{\phi(x_j'') \phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j''-y_j'|}}{8i|\kappa_j| \sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}} \\ &\sim A_{ij}^{d,d} v_i(x_i) \frac{\phi(x_i) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i|}}{|\kappa_i| \sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \frac{\phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'|}}{|\kappa_j| \sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $A_{ij}^{d,d}$ – некоторая константа. Мы воспользовались здесь асимптотическим свойством (2.7), финитностью носителя парного потенциала, а

также связью координат Якоби в парах с различными индексами:

$$x_j'' = \alpha_{ji}x_i'' + \beta_{ji}y_i'', \quad x_i'' = \alpha_{ij}x_j'' + \beta_{ij}y_j''. \quad (3.4)$$

Переменные в ядре $\Gamma_i^d \Gamma_j^d$ поделились, а соответствующий интегральный оператор является конечномерным:

$$\Gamma_i^d \Gamma_j^d = A^{(d,d)}. \quad (3.5)$$

Перейдем к изучению свойств второго слагаемого в выражении (3.2).

3.2. Итерации операторов $\Gamma_i^d \Gamma_j^{ac}$. Рассмотрим теперь итерацию $\Gamma_i^d \Gamma_j^{ac}$ при $|y_i| \gg 1$, $|y_j'| \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} \sim \int_{\mathbb{R}} dx_i'' \int_{\mathbb{R}} dy_i'' v_i(x_i) \frac{\phi(x_i) \phi(x_i'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \\ \times v_j(x_j'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j''-\mathbf{z}_j'|}}{|\mathbf{z}_j''-\mathbf{z}_j'|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что, как и выше, согласно уравнению связи (3.4) справедливы соотношения $|y_i| \gg |y_i''|$, $|y_j'| \gg |y_j''|$. При этом справедливо разложение

$$|\mathbf{z}_j''-\mathbf{z}_j'| = |\mathbf{z}_j'| - \langle \hat{\mathbf{z}}_j', \mathbf{z}_j'' \rangle + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}_j'|}\right).$$

Таким образом, из (3.6) получаем

$$\Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} \sim A_{ij}^{d,ac}(\hat{\mathbf{z}}_j') v_i(x_i) \frac{\phi(x_i) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i|}}{|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j'|}}{|\mathbf{z}_j'|^{1/2}} \quad (3.7)$$

Переменные в ядре $\Gamma_i^d \Gamma_j^{ac}$ поделились, а соответствующий интегральный оператор является конечномерным:

$$\Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} = A^{(d,ac)} \quad (3.8)$$

Перейдем, наконец, к изучению свойств третьего слагаемого в выражении (3.2).

3.3. Итерации операторов $\Gamma_i^{ac}\Gamma_j^d$. Формальное выражение оператора $\Gamma_i^{ac}\Gamma_j^d$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{ac}\Gamma_j^d &\sim \int_{\mathbb{R}} dx_i'' \int_{\mathbb{R}} dy_i'' v_i(x_i) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i''|}}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i''|^{1/2}} v_j(x_j'') \\ &\times \frac{\phi(x_j'')\phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'' - y_j'|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Примем во внимание, что переменная интегрирования x_j'' ограничена шириной финитного носителя потенциала v_j . Перейдем от интеграла по плоскости $\mathbb{R}_{\mathbf{z}_i''}$ к интегралу по плоскости $\mathbb{R}_{\mathbf{z}_j''}$. Поскольку $|\mathbf{z}_i| \gg 1$, $|\mathbf{z}_j'| \gg 1$, а переменная $|x_i|$ ограничена, мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{ac}\Gamma_j^d &\sim \int_{\mathbb{R}} dx_j'' \int_{\mathbb{R}} dy_j'' v_i(x_i) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j''|}}{|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j''|^{1/2}} \\ &\times v_j(x_j'') \frac{\phi(x_j'')\phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'' - y_j'|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Согласно сказанному выше выражение $|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j''| \gg 1$ на всей области интегрирования. Вне полосы конечной длины T с индексом j , включающей начало координат (см. Рис. 1), справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j''| &= \sqrt{y_i^2 + y_j''^2 - 2y_i y_j'' \cos \alpha} + O\left(\frac{b}{2T}\right) \\ &= \sqrt{y_i^2 + y_j''^2} \sqrt{1 - \frac{2y_i y_j''}{y_i^2 + y_j''^2} \cos \alpha} + O\left(\frac{b}{2T}\right). \end{aligned}$$

где b – ширина носителя парного потенциала, α – угол раствора сектора в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}_{\mathbf{z}}$, ограниченного носителями парных потенциалов v_i и v_j (см. Рис. 1). В данном случае частиц равных масс $\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$. Окончательно, мы получаем оценку

$$|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j''| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{y_i^2 + y_j''^2} + O\left(\frac{b}{2T}\right). \quad (3.11)$$

Мы пользуемся здесь неравенством Шварца: $2|y_i||y_j''| \leq y_i^2 + y_j''^2$.

После вычисления в правой части выражения (3.10) абсолютно сходящегося интеграла по переменной dx_j'' мы будем интегрировать по частям по переменной dy_j'' , полагая, что $|y_j''| > T$. Мы введем также гладкое разбиение единицы на оси $\mathbb{R}_{y_j''}$, выделяя отрезок большой конечной длины $2T$ с центром в нуле. При интегрировании по частям справедливо

$$e^{i\sqrt{\lambda+\kappa_j^2}\left(|y_j''-y_j'|+\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda+\kappa_j^2}}\sqrt{y_i^2+y_j''^2}\right)} \sim \frac{\left[e^{i\sqrt{\lambda+\kappa_j^2}\left(|y_j''-y_j'|+\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda+\kappa_j^2}}\sqrt{y_i^2+y_j''^2}\right)}\right]'}{1 \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda+\kappa_j^2}} \frac{y_j''}{\sqrt{y_i^2+y_j''^2}}}. \quad (3.12)$$

Отметим, что знаменатель в правой части выражения (3.12) не обращается в ноль ни при каких значениях y_j'' , что гарантирует отсутствие в интеграле стационарных точек. Таким образом, кратное интегрирование по частям приводит к росту скорости убывания подынтегрального выражения по переменной y_j'' , что, в свою очередь, приводит к ее локализации и эффективному разделению переменных.

Таким образом, ядро $\Gamma_i^{ac}\Gamma_j^d$ может быть представлено в виде

$$\Gamma_i^{ac}\Gamma_j^d \sim A^{(ac,d)} + B^{(ac,d)}, \quad (3.13)$$

где $A^{(ac,d)}$ – ядро конечномерного, а $B^{(ac,d)}$ – компактного оператора.

§4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОГО ОПЕРАТОРА

Отметим, что все вклады в выражение (3.2) за исключением слагаемого $\Gamma_i^{ac}\Gamma_j^{ac}$ ведут к асимптотическому разделению переменных, порождая в структуре ядра резольвенты, как будет показано ниже, конечномерный и компактный операторы.

4.1. Основные результаты, касающиеся случая чисто непрерывного спектра в парных подсистемах. Вклад $\Gamma_i^{ac}\Gamma_j^{ac}$ был исследован ранее в работе [15]. Напомним основные идеи приведенных там рассуждений в ситуации, когда спектр оператора h_j , $j = 1, 2, 3$ (2.5) является абсолютно непрерывным.

Представим полную резольвенту в виде

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I + \sum v_i R_0(\lambda))^{-1} \quad (4.1)$$

и воспользуемся альтернирующим методом Шварца. Положим

$$\Gamma_j(\lambda) = v_j R_j(\lambda). \quad (4.2)$$

Введем оператор Γ согласно определению

$$I - \Gamma(\lambda) = (I + \sum v_i R_0(\lambda))^{-1}. \quad (4.3)$$

Из уравнений (4.3) и (4.1) следует, что

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \Gamma(\lambda)). \quad (4.4)$$

Определим теперь оператор Γ в удобных для нас терминах, позволяющих исследовать его свойства, а следовательно, и свойства резольвенты R .

Рассмотрим операторную матрицу

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} I & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & I & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & I \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Обозначая через $\text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ соответствующую диагональную матрицу

$$\text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

определим при условии биективности $\mathbf{L}$, следуя [15, 18], операторную матрицу γ как решение уравнения

$$\mathbf{L} \cdot \gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \quad (4.7)$$

и введём линейные операторы γ_{ij} как компоненты матрицы γ . Последние могут быть также охарактеризованы соотношениями

$$\gamma_{ij} = \Gamma_i(\delta_{ij}I - \sum_{k \neq i} \gamma_{kj}) = (\delta_{ij}I - \sum_{k \neq j} \gamma_{ik})\Gamma_j. \quad (4.8)$$

Отметим, что уравнения (4.8) является некоторым вариантом системы уравнений Фаддеева [17], записанным в терминах новых объектов - операторов отражений.

Положим теперь $\mathbf{L} = I + \mathbf{\Gamma}$, где

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Тогда справедливо алгебраическое соотношение:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1} &= (I + \mathbf{\Gamma})^{-1} \\ &= (I - (-1)^n \mathbf{\Gamma}^n)^{-1} (I - \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 - \mathbf{\Gamma}^3 + \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{\Gamma}^{n-1}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10), с одной стороны, позволяет определить согласно (4.7) компоненты матрицы γ . С другой стороны, как было показано в [18] и использовано ранее в [15], оператор отражения $\Gamma = \sum v_i R(\lambda)$ даётся в терминах компонент γ_{ij} оператора γ формулой

$$\Gamma = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \gamma_{ij}. \quad (4.11)$$

Тем самым, согласно уравнению (4.4), определяется и резольвента оператора Шредингера $R(\lambda)$. Наконец, отметим, что уравнение (4.10) позволяет определить оператор $\mathbf{L}^{-1}$ в терминах оператора $(I - (-1)^n \mathbf{\Gamma}^n)^{-1}$. Отметим, что элементы операторной матрицы $\mathbf{\Gamma}^n$ имеют вид $\Gamma_{i_1} \Gamma_{i_2} \dots \Gamma_{i_n}$, $i_j \neq i_{j \pm 1}$, $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Отметим, что, как было показано в работе [15], начиная с некоторого конечного значения n итерация операторов отражения вида $D_n^{(ac, ac)} \equiv \Gamma_{i_1}^{ac} \Gamma_{i_2}^{ac} \dots \Gamma_{i_n}^{ac}$ представима в виде

$$D_n^{(ac, ac)} = A + B, \quad (4.12)$$

где A – конечномерный оператор, а B – компактный оператор. Такое представление связано с возможностью или невозможностью выделения точки стационарной фазы в интегральном операторе вида $D_n^{(ac, ac)}$. С точки зрения физики исходной задачи рассеяния число $n = m + 1$, где m равно определяемому законами геометрической оптики числу возможных парных перерассеяний частиц в системе. Как было показано в [15], в случае частиц равных масс $m = 3$. В ситуации неравных масс частиц число m возрастает, но остается конечным.

Вернемся к уравнению (4.10) и, тем самым, к обращению оператора $(I - (-1)^n \mathbf{\Gamma}^n)^{-1}$. Согласно сказанному выше

$$(I - (-1)^n \mathbf{\Gamma}^n)^{-1} = (I - \mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}, \quad (4.13)$$

где $\mathbf{A}$ – конечномерный, а $\mathbf{B}$ – компактный операторы.

Для обращения оператора $I - \mathbf{A} - \mathbf{B}$ мы вновь прибегнем к описанной выше процедуре. А именно, полагая

$$(I - \mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} \equiv (I - \mathbf{\Gamma}_{AB}), \quad \tilde{\mathbf{G}}_A \equiv \mathbf{A}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_B \equiv \mathbf{B}, \quad (4.14)$$

введем операторы

$$\mathbf{\Gamma}_A \equiv I - (I - \tilde{\mathbf{G}}_A)^{-1}, \quad \mathbf{\Gamma}_B \equiv I - (I - \tilde{\mathbf{G}}_B)^{-1}, \quad (4.15)$$

где $\mathbf{\Gamma}_A$ и $\mathbf{\Gamma}_B$ – конечномерный и компактный матричные операторы соответственно. Обратимость оператора $I - \tilde{\mathbf{G}}_A = I - \mathbf{A}$ и оператора $I - \tilde{\mathbf{G}}_B = I - \mathbf{B}$ мы обсудим ниже.

Перейдем к матричному равенству

$$\mathbf{L}_{AB} \cdot \gamma^{AB} = \text{diag}(\mathbf{\Gamma}_A, \mathbf{\Gamma}_B), \quad \mathbf{L}_{AB} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{\Gamma}_A \\ \mathbf{\Gamma}_B & I \end{pmatrix} = \tilde{I} + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}, \quad (4.16)$$

где

$$\tilde{I} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_A \\ \mathbf{\Gamma}_B & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Как следует из сказанного выше, структура матричного оператора $\mathbf{\Gamma}_{AB}$ (4.14) определяется как

$$\mathbf{\Gamma}_{AB} = \sum_{ij} \gamma_{ij}^{AB},$$

где γ_{ij}^{AB} – элементы операторной матрицы γ^{AB} .

Полагая теперь

$$\mathbf{L}_{AB}^{-1} = (I + \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB})^{-1} = (I - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}^2)^{-1} (I - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}) \quad (4.18)$$

и учитывая, что $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}^2$ – конечномерный матричный оператор,

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_A \mathbf{\Gamma}_B & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_B \mathbf{\Gamma}_A \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

мы приходим к выводу, что матричный оператор $(I - \mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}$ (4.13) также имеет структуру

$$I - \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}},$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ – некоторые операторные матрицы, элементы которых являются конечномерными и компактными операторами соответственно. Согласно уравнениям (4.13), (4.10), (4.7), (4.11), (4.4) определена также и структура резольвенты.

4.2. Изменения в структуре резольвенты, касающиеся наличия дискретного спектра в парных подсистемах. Примем теперь в расчет наличие дискретного спектра в парных подсистемах полной трехчастичной системы. Согласно уравнениям (3.1), (3.2) и результатам (3.3), (3.7) и (3.10)

$$\Gamma_i \Gamma_j = A + B + \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^{ac}. \quad (4.20)$$

Остается применить технику, изложенную в предыдущем разделе.

Мы начнем с того, что покажем существование операторов Γ_A и Γ_B (4.15). Для этого нужно показать обратимость оператора $I - A$ и оператора $I - B$, где A и B – конечномерный и компактный операторы соответственно.

Вычислим явно квадрат и куб оператора Γ (4.9):

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 & \Gamma_1 \Gamma_3 & \Gamma_1 \Gamma_2 \\ \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_2 \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \Gamma_2 & \Gamma_3 \Gamma_1 & \Gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_3 \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_1 \Gamma_3 & \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_2 \Gamma_1 \Gamma_3 & \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_1 + \Gamma_2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_3 \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_3 \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_3 & \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1 + \Gamma_3 \Gamma_1 \Gamma_2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1:

Для любого оператора вида $S = \Gamma^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо: оператор Γ_j является левым оператором для любого слагаемого j -й строки. При этом оператор Γ_j не является правым оператором ни для какого операторного слагаемого элемента S_{ij} операторной матрицы S .

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из структуры оператора Γ .

Конечномерная часть интегральных операторов $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$, $i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, 3$ приводит к структуре ядер следующего вида:

$$\theta_i(\mathbf{z}_i) \vartheta_k(\mathbf{z}'_k). \quad (4.23)$$

Как было показано в предыдущем разделе, оператор вида Γ^n представляет собой сумму нескольких конечномерных операторов и компактного оператора. Структура этой суммы станет еще более сложной, если мы примем в расчет, что дискретный спектр каждой из парных

подсистем состоит из нескольких (конечного числа) точек. Пусть, таким образом, оператор Γ^n сводится к следующему виду:

$$(-1)^n \Gamma^n = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}^{(k)} + \mathbf{B}, \quad (4.24)$$

где m – полное число конечномерных матричных операторов разного вида.

4.2.1. *Обратимость оператора $(I - A)$.* Мы рассмотрим здесь процедуру обращения оператора

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} I - \varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle - \varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & -\varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & -\varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle \\ -\varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & I - \varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle - \varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & -\varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle \\ -\varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle & -\varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle & I - \varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle - \varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle \end{pmatrix}$$

Мы учтем, что $\hat{A} = I - A$ и вместо оператора $\hat{A}^{-1}$ будем искать оператор $W = \hat{A}^{-1} - I$, определённый соотношением

$$AW = W - A.$$

При этом оператор A имеет вид

$A =$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle + \varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & \varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & \varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle \\ \varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & \varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle + \varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & \varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle \\ \varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle & + \varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle & \varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle + \varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle \end{pmatrix}$$

Естественно искать оператор W в виде:

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_1 \alpha_{11} & \varphi_1 \alpha_{12} & \varphi_1 \alpha_{13} \\ \varphi_2 \alpha_{21} & \varphi_2 \alpha_{22} & \varphi_2 \alpha_{23} \\ \varphi_3 \alpha_{31} & \varphi_3 \alpha_{32} & \varphi_3 \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Функционалы α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) подлежат определению. Для определённости выпишем систему уравнений для элементов первого столбца

$$\begin{aligned} \langle \psi_{12}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{13}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{13}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{12}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} \\ = \alpha_{11} - \langle \psi_{12}, * \rangle - \langle \psi_{13}, * \rangle, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{23}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{21}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{23}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{21}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} \\ = \alpha_{21} - \langle \psi_{23}, * \rangle, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{32}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{31}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{31}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} + \langle \psi_{32}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} \\ = \alpha_{31} - \langle \psi_{32}, * \rangle. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Аналогичные системы уравнений можно получить для функционалов α_{j2} ($j = 1, 2, 3$) и α_{j3} ($j = 1, 2, 3$). Для наших приложений эти системы разрешимы в связи с малостью коэффициентов — скалярных произведений — при больших T .

Отметим здесь важное отличие механизма обращения конечномерного оператора, отвечающего задаче с абсолютно непрерывным спектром парных операторов Шредингера, и механизма обращения конечномерного оператора, отвечающего наличию дискретного спектра парных операторов Шредингера. А именно, во втором случае могут возникать матричные элементы вида

$$\langle \psi_{ij}, \varphi_k \rangle, \quad j \neq k. \quad (4.28)$$

Такие матричные элементы строятся на функциях ψ_{ij} , φ_k , первая из которых не убывает вдоль экрана с индексом j , а вторая не убывает вдоль экрана с индексом k . Причина неубывания заключается в том, что обе функции, ψ_{ij} и φ_k , порождаются парными локализованными состояниями. В то же время необходимым является убывание всех матричных элементов вида (4.28) при увеличении параметра T обрезания “креста”, поскольку ведет к преобладанию главной диагонали в системе уравнений (4.27). Это, в свою очередь, является необходимым при обращении соответствующей системы уравнений.

Однако, описанная ситуация не является опасной по следующей причине: если обе функции ψ_{ij} и φ_k порождаются парными локализованными состояниями, то такие функции по крайней мере экспоненциально быстро убывают в направлении, ортогональном “экрану”. Левая функция в матричном элементе содержит финитный парный потенциал и, таким образом, обращается в ноль вне его носителя, то есть вне полосы конечной ширины, содержащей экран с индексом j . Отметим также, что обе функции живут на непересекающихся и расходящихся с ростом параметра обрезания T полосах. Таким образом, их носители с точностью до экспоненциально малых поправок не пересекаются. Это означает, что при вычислении их матричного элемента вне вырезанного “креста” радиуса T мы получим экспоненциально малую величину.

Следовательно, мы пришли к заключению, что наличие дискретного спектра в парных операторах Шредингера не меняет процедуру обращения конечномерного оператора.

4.2.2. Обратимость оператора $(I - B)$. Оператор $I - B$ обратим по следующим соображениям. Заметим, что построение оператора

$(I - \mathbf{B})^{-1}$ эквивалентно построению оператора $(I + V^{\text{loc}} R_0)^{-1}$, где V^{loc} обозначает полный потенциал исходной трехчастичной задачи, срезанный на носитель, сосредоточенный на “кресте” (на компактной области, хотя и большой). Размер этой области регулируется большим параметром T (см. рис. 1). Как и раньше, R_0 обозначает невозмущенную резольвенту оператора Шредингера на плоскости.

Введем обозначение оператора Γ^{loc} согласно определению

$$(I + V^{\text{loc}} R_0)^{-1} = I - \Gamma^{\text{loc}}.$$

Тогда

$$R_0(I + V^{\text{loc}} R_0)^{-1} = R^{\text{loc}},$$

где R^{loc} – резольвента оператора с потенциалом V^{loc} . Отсюда получаем

$$R_0 - R_0 \Gamma^{\text{loc}} = R^{\text{loc}}.$$

Следовательно, $\Gamma^{\text{loc}} = I - (I - \mathbf{B})^{-1} = V^{\text{loc}} R^{\text{loc}}$. Такой оператор заведомо существует.

4.3. Структура ядра резольвенты полного оператора. Согласно уравнению (4.4), ядро резольвенты полного оператора выражается как

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \Gamma(\lambda)), \quad \Gamma(\lambda) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}, \quad (4.29)$$

где γ_{ij} – элементы матрицы γ ,

$$\gamma = (I - \mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}(I - \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 - \mathbf{\Gamma}^3) \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3). \quad (4.30)$$

Оператор $\mathbf{\Gamma}$ был определен выше в уравнении (4.9). Согласно уравнению (4.14) оператор $(I - \mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1}$ описывается как

$$(I - \mathbf{A} - \mathbf{B})^{-1} = I - \mathbf{\Gamma}_{AB}, \quad (4.31)$$

где оператор $\mathbf{\Gamma}_{AB}$ принимает согласно вторичной процедуре альтернирующего метода Шварца вид

$$\mathbf{\Gamma}_{AB} = \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ij}^{AB}. \quad (4.32)$$

В свою очередь, согласно (4.16) слагаемые γ_{ij}^{AB} являются компонентами матричного оператора

$$\gamma^{AB} = (I - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}^2)^{-1}(I - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{AB}) \text{diag}(\mathbf{\Gamma}_A, \mathbf{\Gamma}_B). \quad (4.33)$$

Как было показано выше в уравнении (4.19) оператор $\tilde{\Gamma}_{AB}^2$ является конечномерным, а его компоненты удовлетворяют условию убывания при увеличении параметра обрезания T . Процедура обращения такого оператора была подробно описана выше. Таким образом,

$$(I - \tilde{\Gamma}_{AB}^2)^{-1} = I - \tilde{\mathbf{A}}, \quad (4.34)$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ – конечномерный оператор.

Возвращаясь к определению оператора $\tilde{\Gamma}_{AB}$ (4.17) и к определению оператора γ^{AB} (4.33), получим для оператора Γ_{AB} (4.32)

$$\Gamma_{AB} = \Omega_A + \Gamma_B, \quad (4.35)$$

где компактный оператор Γ_B определен в выражении (4.15), а конечномерный оператор Ω_A определяется следующим образом:

$$\Omega_A \equiv (I - \tilde{\mathbf{A}}_{11} - \tilde{\mathbf{A}}_{21})\Gamma_A(I - \Gamma_B) - \Gamma_B\Gamma_A - (\tilde{\mathbf{A}}_{12} + \tilde{\mathbf{A}}_{22})\Gamma_B(I - \Gamma_A). \quad (4.36)$$

Полная размерность операторов Γ_A , Γ_B обсуждалась выше в разделе 4.2. Во-первых, она определяется размерностью конечномерного оператора, выделяющегося при кратной итерации части операторов отражений, связанной с абсолютно непрерывным спектром, вида (4.12). В случае частиц равных масс, как было показано в работе [15], такой конечномерный оператор выделяется при трех итерациях $\Gamma_i^{(ac)}\Gamma_j^{(ac)}\Gamma_k^{(ac)}\Gamma_l^{(ac)}$, $i \neq j \neq k \neq l$.

Во-вторых, размерность конечномерного оператора определяется структурой дискретного спектра парных операторов Шредингера.

Таким образом, оператор γ , определенный в уравнении (4.30), принимает вид

$$\gamma = (I - \Omega_A - \Gamma_B)(I - \Gamma + \Gamma^2 - \Gamma^3) \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3). \quad (4.37)$$

При этом согласно (4.29) ядро резольвенты принимает вид

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \sum \Gamma_i + \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j - \sum_{i \neq j \neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k + \tilde{A} + \tilde{B}). \quad (4.38)$$

Отметим здесь, что структура каждого из операторов Γ_j , $j = 1, 2, 3$ является сложной и определяется вкладами как непрерывного, так и дискретного спектра, как было определено выше.

§5. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА.

Построим предельные значения ядра резольвенты при условии, что спектральный параметр “садится” в комплексной плоскости энергии на абсолютно непрерывный спектр при энергиях выше порога развала любой парной подсистемы: $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \lambda \pm i\varepsilon)$, $\lambda > 0$.

Структура асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра определяется выражением для предельных значений ядра резольвенты на абсолютно непрерывном спектре (4.38) с помощью предельного перехода при $|\mathbf{z}| \rightarrow \infty$, $|\mathbf{z}'| \rightarrow \infty$. Структура асимптотики, полученная для случая парных потенциалов отталкивания в работе [16] дополняется наличием связанных состояний в парных подсистемах. Необходимо отметить отсутствие стационарных точек при вычислении ядер типа $R_0 \Gamma_j^{(d)}$.

Нас интересуют собственные функции, отвечающие процессам, в которых начальным состоянием является связанное состояние. Для того, чтобы найти эти собственные функции, необходимо предварительно проделать некоторые преобразования.

Для начала заметим, что резольвента невозмущенного оператора связана с парной резольventой первой подсистемы следующим образом:

$$R_0 = R_1 + R_1 v_1 R_0. \quad (5.1)$$

Данное соотношение позволяет выразить резольventу R_1 следующим образом:

$$R_1 = R_0(I - \Gamma_1) \quad (5.2)$$

Далее рассмотрим итерации операторов отражения Γ вплоть до четвертой.

$$R_0 \left[I - \sum_j \Gamma_j + \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j - \sum_{k \neq i \neq j} \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j + \sum_{l \neq k \neq i \neq j} \Gamma_l \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j - \dots \right] \quad (5.3)$$

Выделим в каждой сумме слагаемые с Γ_1

$$\begin{aligned} R_0 - R_0 \Gamma_1 - R_0 \sum_{j \neq 1} \Gamma_j + R_0 \Gamma_1 \sum_{j \neq 1} \Gamma_j + R_0 \sum_{i \neq j \neq 1} \Gamma_i \Gamma_j \\ - R_0 \Gamma_1 \sum_{i \neq j \neq 1} \Gamma_i \Gamma_j - R_0 \sum_{k \neq i \neq j \neq 1} \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j \end{aligned}$$

$$+ R_0 \Gamma_1 \sum_{k \neq i \neq j \neq 1} \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j + R_0 \sum_{l \neq k \neq i \neq j \neq 1} \Gamma_l \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j - \dots \quad (5.4)$$

Сгруппировав слагаемые нужным образом, получим следующее представление:

$$\begin{aligned} R_0 \left[I - \sum_j \Gamma_j + \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j - \sum_{k \neq i \neq j} \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j + \sum_{l \neq k \neq i \neq j} \Gamma_l \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j - \dots \right] \\ = R_1 \left[I - \sum_{j \neq 1} \Gamma_j + \sum_{i \neq j \neq 1} \Gamma_i \Gamma_j - \sum_{k \neq i \neq j \neq 1} \Gamma_k \Gamma_i \Gamma_j + \dots \right] \quad (5.5) \end{aligned}$$

Как и в случае итераций $\Gamma_i^d \Gamma_j^d$, описанном в параграфе 3, в представленных ниже слагаемых, в связи с финитностью парных потенциалов и экспоненциальным убыванием функций $\phi(x_i)$, переменные интегрирования ограничены, что приводит к делению переменных и выделению конечномерного интегрального оператора.

$$\begin{aligned} R_1 \Gamma_i^d \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_1^2|} |y_1 - y_1''|}}{8i|\kappa_1| \sqrt{\lambda + |\kappa_1^2|}} \\ \times v_j(x_j'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i') e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_i^2|} |y_i'' - y_i'|}}{8i|\kappa_i| \sqrt{\lambda + |\kappa_i^2|}} \\ \sim A_{1i}^d \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_1^2|} |y_1|}}{|\kappa_1| \sqrt{\lambda + |\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x_i') e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_i^2|} |y_i'|}}{|\kappa_i| \sqrt{\lambda + |\kappa_i^2|}}. \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 \Gamma_i^d \Gamma_j^d \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_1^2|} |y_1 - y_1''|}}{8i|\kappa_1| \sqrt{\lambda + |\kappa_1^2|}} \\ \times v_i(x_i'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i''') e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_i^2|} |y_i'' - y_i'''|}}{8i|\kappa_i| \sqrt{\lambda + |\kappa_i^2|}} \\ \times v_j(x_j''') \frac{\phi(x_j''') \phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda + |\kappa_j^2|} |y_j''' - y_j'|}}{8i|\kappa_j| \sqrt{\lambda + |\kappa_j^2|}} \end{aligned}$$

$$\sim A_{1j}^{d,d} \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x'_j) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y'_j|}}{|\kappa_j| \sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}}. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} R_1 \Gamma_i^d \Gamma_j^d \Gamma_k^d &\sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\ &\quad \times v_i(x_i'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i'''|}}{8i|\kappa_i| \sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \\ &\quad \times v_j(x_j''') \frac{\phi(x_j''') \phi(x_j''''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'''-y_j''''|}}{8i|\kappa_j| \sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}} \\ &\quad \times v_k(x_k''''') \frac{\phi(x_k''''') \phi(x_k''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}|y_k''''-y_k'''|}}{8i|\kappa_k| \sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}} \\ &\sim A_{1k}^{d,d,d} \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x'_k) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}|y'_k|}}{|\kappa_k| \sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}}. \quad (5.8) \end{aligned}$$

В случае, когда внешним оператором является оператор типа Γ_i^{ac} , переменные в ядрах итераций также делятся, как это было показано в §3.

$$\begin{aligned} R_1 \Gamma_i^{ac} &\sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i'|}}{|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i'|^{1/2}} \\ &\sim A_{1i}^{ac} \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i'|}}{|\mathbf{z}_i'|^{1/2}}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 \Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} &\sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\ &\quad \times v_i(x_i'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i'''|}}{8i|\kappa_i| \sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} v_j(x_j''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j'''-\mathbf{z}_j'|}}{|\mathbf{z}_j'''-\mathbf{z}_j'|^{1/2}} \\ &\sim A_{1j}^{d,ac} \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1| \sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j'|}}{|\mathbf{z}_j'|^{1/2}}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^d \Gamma_j^d \Gamma_k^{ac} &\sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
&\quad \times v_i(x_i'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i'''|}}{8i|\kappa_i|\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \\
&\quad \times v_j(x_j''') \frac{\phi(x_j''') \phi(x_j''''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'''-y_j''''|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}} v_k(x_k''''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k''''-\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k''''-\mathbf{z}_k'|^{1/2}} \\
&\sim A_{1k}^{d,d,ac} \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k'|^{1/2}}. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

В случае же, когда оператор Γ_i^{ac} стоит внутри, реализуется схема, описанная в параграфе 3. В представленных ниже итерациях ядер интегральных операторов могут быть представлены в виде суммы ядер конечномерного оператора A , где деление переменных реализуется благодаря ограниченности переменных интегрирования, и компактного оператора B , где переменные делятся эффективно благодаря росту убывания подынтегрального выражения при кратном интегрировании по частям.

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^d &\sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
&\quad \times v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i'''|}}{|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i'''|^{1/2}} \\
&\quad \times v_j(x_j''') \frac{\phi(x_j''') \phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'''-y_j'|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}} \\
&\sim (A_{1j}^{ac,d} + B_{1j}^{ac,d}) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x_j') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'|}}{|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

$$R_1 \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^{ac} \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}}$$

$$\begin{aligned}
& \times v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i'' - \mathbf{z}_i'''|}}{|\mathbf{z}_i'' - \mathbf{z}_i'''|^{1/2}} v_j(x_j''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j'|}}{|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j'|^{1/2}} \\
& \sim (A_{1j}^{ac,ac} + B_{1j}^{ac,ac}) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j'|}}{|\mathbf{z}_j'|^{1/2}}. \quad (5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} \Gamma_k^d & \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
& \times v_i(x_i'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i'''|}}{8i|\kappa_i|\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \\
& \times v_j(x_j''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j''''|}}{|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j''''|^{1/2}} v_k(x_k''') \frac{\phi(x_k''') \phi(x_k') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_k''''-y_k'|}}{8i|\kappa_k|\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}} \\
& \sim (A_{1j}^{d,ac,d} + B_{1j}^{d,ac,d}) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x_k') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}|y_k'|}}{|\kappa_k|\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^d \Gamma_k^d & \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
& \times v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i'' - \mathbf{z}_i'''|}}{|\mathbf{z}_i'' - \mathbf{z}_i'''|^{1/2}} v_j(x_j''') \frac{\phi(x_j''') \phi(x_j''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'''-y_j''''|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}} \\
& \times v_k(x_k''') \frac{\phi(x_k''') \phi(x_k') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}|y_k''''-y_k'|}}{8i|\kappa_k|\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}} \\
& \sim (A_{1j}^{ac,d,d} + B_{1j}^{ac,d,d}) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x_k') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}|y_k'|}}{|\kappa_k|\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}}. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^{ac} \Gamma_k^d & \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
& \times v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i'' - \mathbf{z}_i'''|}}{|\mathbf{z}_i'' - \mathbf{z}_i'''|^{1/2}} v_j(x_j''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j''''|}}{|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j''''|^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times v_k(x_k''''') \frac{\phi(x_k''''') \phi(x_k') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_k'''''-y_k'|}}{8i|\kappa_k|\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}} \\
& \sim \left(A_{1j}^{ac,ac,d} + B_{1j}^{ac,ac,d} \right) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{\phi(x_k') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}|y_k'|}}{|\kappa_k|\sqrt{\lambda+|\kappa_k^2|}}. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^d \Gamma_j^{ac} \Gamma_k^{ac} & \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
& \times v_i(x_i'') \frac{\phi(x_i'') \phi(x_i''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}|y_i''-y_i'''|}}{8i|\kappa_i|\sqrt{\lambda+|\kappa_i^2|}} \\
& \times v_j(x_j''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j'''-\mathbf{z}_j''''|}}{|\mathbf{z}_j'''-\mathbf{z}_j''''|^{1/2}} v_k(x_k''''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k'''''-\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k'''''-\mathbf{z}_k'|^{1/2}} \\
& \sim \left(A_{1j}^{d,ac,ac} + B_{1j}^{d,ac,ac} \right) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k'|^{1/2}}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^d \Gamma_k^{ac} & \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
& \times v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i''''|}}{|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i''''|^{1/2}} v_j(x_j''') \frac{\phi(x_j''') \phi(x_j''''') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}|y_j'''-y_j''''|}}{8i|\kappa_j|\sqrt{\lambda+|\kappa_j^2|}} \\
& \times v_k(x_k''''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k'''''-\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k'''''-\mathbf{z}_k'|^{1/2}} \\
& \sim \left(A_{1j}^{ac,d,ac} + B_{1j}^{ac,d,ac} \right) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k'|^{1/2}}. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 \Gamma_i^{ac} \Gamma_j^{ac} \Gamma_k^{ac} & \sim \int_{\mathbb{R}^2} dz_1'' \int_{\mathbb{R}^2} dz_j''' \int_{\mathbb{R}^2} dz_k'''' \frac{\phi_1(x_1) \phi_1(x_1'') e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1-y_1''|}}{8i|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \\
& \times v_i(x_i'') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i''''|}}{|\mathbf{z}_i''-\mathbf{z}_i''''|^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times v_j(x_j''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j''''|}}{|\mathbf{z}_j''' - \mathbf{z}_j''''|^{1/2}} v_k(x_k''') \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k''' - \mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k''' - \mathbf{z}_k'|^{1/2}} \\
& \sim (A_{1j}^{ac,ac,ac} + B_{1j}^{ac,ac,ac}) \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{\lambda+|\kappa_1^2|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}_k'|}}{|\mathbf{z}_k'|^{1/2}}. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda \rightarrow E + i0$, $E > 0$, и $|z|, |z'| \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотика для предельного значения ядра резольвенты:

$$\begin{aligned}
R(z, z'|E + i0) &= \frac{\phi(x_1) e^{i\sqrt{E+|\kappa_1^2|}|y_1|}}{|\kappa_1|\sqrt{E+|\kappa_1^2|}} \left[\sum_{i \neq 1} D_i(E) \frac{\phi(x_i') e^{i\sqrt{E+|\kappa_i^2|}|y_i'|}}{|\kappa_i|\sqrt{E+|\kappa_i^2|}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \neq 1} \widetilde{D}_i(E, \mathbf{z}) \frac{e^{i\sqrt{E}|\mathbf{z}_i'|}}{|\mathbf{z}_i'|^{1/2}} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}_i'|^{1/2}}\right) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}_i'|^{1/2}}\right) \right), \quad (5.20)
\end{aligned}$$

где D_i и $\widetilde{D}_i$ являются суммами коэффициентов A_{1i} и B_{1i} при соответствующих асимптотиках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gaudin, B. Derrida, *Solution exacte d'un problème modèle a trois corps. État lié.* — J. Physique, **36** (1975), 1183–1197.
2. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* — Проблемы матем. физики, Ленингр. Университет, Ленинград, **9** (1979), 14–30.
3. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в системе трех одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов.* — Граничные задачи математической физики и смежные вопросы в теории функций, **11**, Зап. Научн. Сем. ЛОМИ, **84** (1979), 16–22.
4. В. С. Буслаев, Н. А. Калитеевский, *Главные сингулярности матрицы рассеяния для системы одномерных частиц.* — ТМФ, **70** (1987), 266–277.
5. С. И. Веницкий, С. И. Ларсен, Д. В. Павлов, Д. В. Проскурин, *Effective adiabatic approximation in the problem of three bodies coupled via short-range potentials.* — ЯФ **64**, 29 (2001) [Phys. Atom. Nucl. **64**, 27 (2001)].
6. N. P. Mehta, B. D. Esry, C. H. Green, *Three-body recombination in one dimension.* — Phys. Rev. A., **76**, 022711 (2007).
7. O. Chuluunbaatar, A. A. Guseva, A. G. Abrashkevich, A. Amaya-Tapiac, M. S. Kaschiev, S. Y. Larsen, S. I. Vinitzky, *KANTBP: A program for computing energy levels, reaction matrix and radial wave functions in the coupled-channel hyperspherical adiabatic approach.* — Computer Phys. Commun., **177** (2007), 649–675.

8. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. Y. Larsen, S. I. Vinitzky, *Three identical particles on a line: comparison of some exact and approximate calculations*. — J.Phys. A, **35**, L513-L525 (2002).
9. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, M. S. Kaschiev, V. A. Kaschieva, A. Amaya-Tapia, S. Y. Larsen, S. I. Vinitzky, *Вариационно-проекционные методы для исследования малочастичных квантовых систем*. — J.Phys. B, **39** (2006), 243–269.
10. A. Görlitz et al., *Realization of Bose–Einstein condensates in lower dimensions*. — Phys.Rev.Lett., **87** (2001), 130402.
11. T. Kinoshita, T. Wenger, D. S. Weiss, *A quantum Newton’s cradle*. — Nature (London) **440** (2006), 900.
12. T. Kinoshita, T. Wenger, D. S. Weiss, *Observation of a one-dimensional Tonks–Girardeau gas*. — Science, **305** (2004), 1125.
13. J. Esteve et al., *Observations of density fluctuations in an elongated bose gas: ideal gas and quasicondensate regimes*. — Phys.Rev.Lett., **96** (2006), 130403.
14. А. М. Будылин, С. Б. Левин, *К вопросу о построении асимптотики ядра резольвенты оператора Шредингера в задаче рассеяния трёх одномерных квантовых частиц, взаимодействующих посредством финитных парных отталкивательных потенциалов*. — Зап. Научн. Семина. ПОМИ, **438** (2015), 95–103.
15. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Задача рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц. Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты. Математические вопросы теории распространения волн*. — 47, Зап. Научн. Семина. ПОМИ, **461** (2017), 14–51.
16. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра задачи рассеяния трех одномерных квантовых частиц. Математические вопросы теории распространения волн*. — 48, Посвящается памяти Александра Павловича КАЧАЛОВА, Зап. Научн. семина. ПОМИ, **471** (2018), 15–37.
17. Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*. — Тр. МИАН СССР, 69, Изд-во АН СССР, М.–Л. (1963), 3–122.
18. А. М. Budylin, V. S. Buslaev, *Reflection operator and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations*. — Advances in Soviet Math., AMS, Providence, RI, **7** (1991), 107–157.
19. E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*. — Commun. Math.Phys., **78** (1981), 391–408.

Budylin A.M., Levin C. B., Toropov V. O. On the scattering problem of three one-dimensional short-range quantum particles in the presence of bound states in pair subsystems.

The scattering problem of three one-dimensional quantum particles of equal masses interacting via pair finite potentials is considered. The potential structure allows for bound states in the corresponding pairwise subsystems. The limiting values of the resolvent kernel of the Schrödinger operator are studied when the spectral parameter “sits” on the absolutely

continuous spectrum, that is, on the positive semiaxis. As a result, coordinate asymptotics of the eigenfunctions of the absolutely continuous spectrum are constructed.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб., д. 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия

E-mail: a.budylin@spbu.ru

E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 28 сентября 2025 г.

С.-Петербургский национальный
исследовательский университет
информационных технологий,
механики и оптики,
С.-Петербург, Россия

E-mail: st076443@student.spbu.ru