Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 541, 2025 г.

В. Будыка, И. Покровский

ОБ ИНДЕКСАХ ДЕФЕКТА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С ТОЧЕЧНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ И НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВОЗМУЩЕННЫХ БЛОЧНЫХ ЯКОБИЕВЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Операторы Шредингера с точечными взаимодействиями, задаваемые формальным дифференциальным выражением

$$l_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta(x - x_n), \tag{1.1}$$

играют большую роль в спектральной теории и математической физике. Здесь δ – дельта-функция Дирака, $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b \leqslant \infty$ строго возрастающая последовательность с $x_0 := 0$, $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to b$, и $\{\alpha_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$.

Скалярные операторы, задаваемые выражением (1.1), впервые возникли в квантовой механике как описывающие точно решаемые модели (см. [1]). Их спектральные свойства достаточно хорошо изучены (см., например, монографии [1, 2], обзоры [7, 9] и литературу в них).

Одним из основных объектов настоящей работы является матричный оператор Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, ассоциированный с формулой (1.1). Его строгое определение дается в рамках теории расширений. Для этого сначала вводится предминимальный оператор $\mathbf{H}^0_{X,\alpha}$:

$$\mathbf{H}^0_{X,\alpha} := -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m, \tag{1.2}$$

Ключевые слова: оператор Шредингера, точечные взаимодействия, индексы дефекта, самосопряженность, блочная якобиева матрица, возмущение.

Исследования первого автора в параграфах 1–3 выполнены за счёт гранта Российского научного фонда No. 23-11-00153, а в параграфах 4–5 выполнялись в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема No. 1023020800027-5-1.1.1).

$$\mathrm{dom}(\mathbf{H}^0_{X,\alpha}) = \left\{ f \in W^{2,2}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_+ \setminus X; \mathbb{C}^m) : \begin{matrix} f'(0+) = 0,\ f(x_n+) = f(x_n-) \\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n) \end{matrix} \right\}.$$

Минимальный симметрический оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ определяется как замыкание оператора $\mathbf{H}^0_{X,\alpha}$ в $L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^m)$.

В работах А. Костенко и М. Маламуда [8, 22] (см. также [9]), оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ трактуется в рамках теории расширений, как расширение минимального симметрического оператора $\mathbf{H}_X = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{H}_n$, где

$$\mathbf{H}_n f := -f'', \quad \mathrm{dom}(\mathbf{H}_n) = W^{2,2}_0[x_{n-1}, x_n].$$

Именно, для сопряженного (максимального) оператора $\mathbf{H}^*_{X,\alpha}$ построена такая граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ (см. определение 6.1) для которой расширение $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ задается равенством

$$\mathrm{dom}(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = \ker(\Gamma_1 - \mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})\Gamma_0),$$

в котором $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ – граничный оператор (см. определения в аппендиксе, ф-ла (6.3)), порождаемый скалярной якобиевой матрицей вида (2.7) при $m = 1$ (см. ниже). Используя общую теорию граничных троек (см. [6, 20] и аппендикс), в [8, 22] (см. также [9]) показано, что ряд спектральных свойств (индексы дефекта, дискретность спектра, полуограниченность, положительная определенность, отрицательный точечный и сингулярный спектры и др.) гамильтониана $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ тесно связан с соответствующими свойствами (минимального) якобиева оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ (в случае $m = 1$). В частности, в [8] доказано равенство $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}))$, ведущее к оценке $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) \leqslant 1$. Эта оценка впервые установлена различными методами в [4, 10].

Отметим еще, что впервые связь индексов дефекта симметрического расширения A_B абстрактного симметрического оператора A и соответствующего ему граничного оператора B обнаружена в работе [28] (см. аппендикс, предложение 6.2).

В работе [23] соответствующая связь спектральных свойств операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ и $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ перенесена на матричный случай ($m \geqslant 1$). В частности, там доказано равенство

$$n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m, \tag{1.3}$$

вытекающее (после конструкции соответствующей тройки) из общей теории граничных троек (см. предложение 6.2 (iii)).

Примерно в то же время, что и статья [23], появилась работа К. Мирзоева и Т. Сафоновой [29], в которой для матричных операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ другим методом установлено равенство (1.3) в случае максимальных индексов дефекта якобиевой матрицы (т.е. в случае $n_{\pm}(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$).

Используя равенство (1.3), в недавней работе авторов и М. Маламуда [17] другим методом найдены новые условия самосопряженности и максимальности индексов дефекта матричных операторов Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, а также условия дискретности их спектров.

В работе Р. Карлоне, М. Маламуда и А. Посиликано [5] результаты из [8, 22] распространены на случай скалярных операторов Дирака с точечными взаимодействиями. В частности, получен аналог равенства (1.3) для оператора Дирака. В работах [3, 17] и [18] исследованы операторы Дирака с матричными точечными взаимодействиями и найдены новые условия самосопряженности, максимальности индексов дефекта, дискретности их спектра.

В настоящей работе при $m \geqslant 1$ получено условие для максимальности индексов дефекта операторов Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ на конечном интервале без использования связи с якобиевыми матрицами. Кроме того, отправляясь от этого результата, используя равенство (1.3), доказана максимальность индексов дефекта якобиевой матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Также в этой статье мы продолжаем исследования индексов дефекта некоторого класса блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}$ с $m \times m$-матричными элементами вида

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathcal{B}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathcal{B}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathcal{B}_{n-1} & \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathcal{A}_n,\ \mathcal{B}_n,\ (\in \mathbb{C}^{m\times m}),\ n \in \mathbb{N}_0$ самосопряженные матрицы, $\mathcal{B}_n$ – обратимы, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{O}_m$ — нулевой оператор. Следуя М. Г. Крейну (см. [26]), матрицу $\mathbf{J}$ также называют якобиевой матрицей с матричными элементами.

Пусть $l_0^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$ – подмножество финитных последовательностей в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)$. Отображение $l_0^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m) \ni f \to \mathbf{J}f$ определяет линейный симметрический, но незамкнутый оператор $\mathbf{J}^0$ в $l_0^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$. Его замыкание определяет минимальный (замкнутый) симметрический оператор $\mathbf{J}_{\min}$ в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$. В дальнейшем мы отождествляем минимальный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ с матрицей $\mathbf{J}$. Положим также $\mathbf{J}_{\max} = \mathbf{J}^*$. Хотя оператор $\mathbf{J}$ симметрический, $\mathbf{J} \subset \mathbf{J}^*$, он не обязательно самосопряжен. Его индексы дефекта

$$n_\pm(\mathbf{J}) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(\mathbf{J}) := \dim \ker(\mathbf{J}^* \mp iI)$$

удовлетворяют оценкам $0 \leqslant n_\pm(\mathbf{J}) \leqslant m$ (см. [13, 26, 27]). Более того, для каждой пары чисел $\{n_+, n_-\} \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ с $0 \leqslant n_\pm \leqslant m-1$ найдется матрица $\mathbf{J}$ с $n_\pm(\mathbf{J}) = n_\pm$ ([21]). При этом, $n_-(\mathbf{J}) = m$ и $n_+(\mathbf{J}) = m$ лишь одновременно.

Проблема нахождения индексов дефекта, в частности, условий самосопряженности, блочных якобиевых матриц является первой основной задачей, естественно возникающей в спектральной теории якобиевых матриц. Эта проблема привлекала значительное внимание на протяжении многих лет (см., например, [3, 5, 8, 9], [11–29] и литературу в них). Отметим, что статье [3] найдены новые условия самосопряженности и дискретности спектра блочных якобиевых матриц общего вида.

В работе [17] получены новые условия самосопряженности, максимальности индексов дефекта и дискретности спектра некоторого класса блочных якобиевых матриц $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ (см. (2.7)).

В данной работе мы продолжаем исследования из [3] и [17] для изучения некоторых спектральных свойств (индексов дефекта, дискретности спектра) возмущений блочных якобиевых матриц из класса $\widehat{\mathcal{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ (см. (5.1)).

§2. Предварительные сведения

1. Операторы Шредингера с точечными взаимодействиями. Пусть $X = \{x_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathcal{I} = (0, b)$, $b \leqslant \infty$ и $x_{n+1} > x_n$, $x_0 = 0$, $x_n \to b$, $n \in \mathbb{N}_0$. Пусть также $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$ и $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1 ([8, 23])**.** *Пусть* $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *– реализация оператора Шредингера в* $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^m)$. *Тогда оператор* $\mathbf{H}^*_{X,\alpha} := (\mathbf{H}_{X,\alpha})^*$ *сопряженный к симметрическому оператору* $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *имеет вид*

$$\mathbf{H}^*_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes \mathbb{I}_m \restriction \operatorname{dom}(\mathbf{H}^*_{X,\alpha}) \tag{2.1}$$

$$\operatorname{dom}(\mathbf{H}^*_{X,\alpha}) = \left\{ f \in W^{2,2}(\mathcal{I} \setminus X; \mathbb{C}^m) : \begin{array}{c} f'(0) = 0, \ \ f(x_n+) = f(x_n-) \\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n) \end{array} \right\}.$$

В работе [17] получены новые результаты об индексах дефекта и дискретности спектра оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$.

Предложение 2.2 ([17]). *Пусть* $|\mathcal{I}| < \infty$, *т.е.* $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$. *Тогда индексы дефекта оператора* $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *в* $L^2(\mathcal{I};\mathbb{C}^m)$, *максимальны, т.е.* $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = m$, *если выполнено условие* (2.8).

Предложение 2.3 ([17]). *Пусть* $|\mathcal{I}| \leqslant \infty$ *и* $\alpha_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Если выполнены условия* (2.9), *то* $\mathbf{H}_{X,\alpha} = \mathbf{H}^*_{X,\alpha}$. *Если к тому же выполнены условия теоремы 2.8 и* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, *то оператор* $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ *самосопряжен, имеет дискретный спектр и* $(\mathbf{H}_{X,\alpha} - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$, $p \in (1,\infty]$.

2. Возмущенные блочные якобиевы матрицы. В работе [3] наряду с матрицей (1.4) была рассмотрена якобиева матрица вида

$$\widehat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_0 & \widehat{\mathcal{B}}_0 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \widehat{\mathcal{B}}_0 & \widehat{\mathcal{A}}_1 & \widehat{\mathcal{B}}_1 & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \widehat{\mathcal{B}}_1 & \widehat{\mathcal{A}}_2 & \widehat{\mathcal{B}}_2 & \mathbb{O}_m & \dots & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots & \widehat{\mathcal{B}}_{n-1} & \widehat{\mathcal{A}}_n & \widehat{\mathcal{B}}_n & \mathbb{O}_m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $\widehat{\mathcal{A}}_n = \widehat{\mathcal{A}}_n^*$, $\widehat{\mathcal{B}}_n \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $\det \widehat{\mathcal{B}}_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Как обычно, якобиева матрица $\widehat{\mathbf{J}}$ вида (2.2) порождает в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$ минимальный (замкнутый) симметрический оператор (см. [12, 13]).

Теорема 2.4 ([3]). *Пусть* $\mathbf{J}$ *и* $\widehat{\mathbf{J}}$ – *якобиевы матрицы вида* (1.4) *и* (2.2), *соответственно. Пусть для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$ *выполняются следующие условия:*

(i)
$$\sup_{n\geqslant N} \|\mathbb{I}_m - \widehat{\mathcal{B}}_n^*(\mathcal{B}_n^*)^{-1}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = a_N < 1; \quad (2.3)$$

(ii)
$$\sup_{n\geqslant N} \|\widehat{\mathcal{B}}_n - \widehat{\mathcal{B}}_{n-1}^*(\mathcal{B}_{n-1}^*)^{-1}\mathcal{B}_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C_B < \infty; \quad (2.4)$$

(iii) *Пусть для каждого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *и* $C_A'(\varepsilon) > 0$ *такие, что для каждого вектора* $f \in l_0^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$

$$\sum_{n\geqslant N_1} \|(\widehat{\mathcal{A}}_n - \widehat{\mathcal{B}}_{n-1}^*(\mathcal{B}_{n-1}^*)^{-1}\mathcal{A}_n) f_n\|^2_{\mathbb{C}^m} \leqslant \varepsilon \|\mathbf{J}f\|^2_{l^2} + C_A'(\varepsilon)\|f\|^2_{l^2}. \quad (2.5)$$

Тогда:

(a) $\operatorname{dom}\mathbf{J} = \operatorname{dom}\widehat{\mathbf{J}}$ *и* $n_\pm(\mathbf{J}) = n_\pm(\widehat{\mathbf{J}})$;

(b) *если к тому же* $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ *и спектр* $\mathbf{J}$ *дискретен, то спектр возмущенного якобиева оператора* $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{J}}^*$ *также дискретен.*

Следствие 2.5 ([3]). *Пусть для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$ *выполняются условия* (2.3) *и* (2.4) *теоремы* 2.4. *Предположим также, что верно следующее условие*

$$\sup_{n\geqslant N} \|\widehat{\mathcal{A}}_n - \widehat{\mathcal{B}}^*_{n-1}(\mathcal{B}^*_{n-1})^{-1}\mathcal{A}_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C_A < \infty. \tag{2.6}$$

Тогда $\operatorname{dom}\mathbf{J} = \operatorname{dom}\widehat{\mathbf{J}}$ *и* $n_\pm(\mathbf{J}) = n_\pm(\widehat{\mathbf{J}})$.

3. Индексы дефекта и дискретность спектра класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ блочных якобиевых матриц. В работе [17] рассмотрена блочная якобиева матрица вида

$$\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_m & -\frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \frac{\alpha_1}{d_2} & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_m & -\frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \frac{\alpha_2}{d_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Здесь $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$, и $d_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$ класс матриц (2.7).

В статье [17] найдены условия, обеспечивающие максимальность индексов дефекта матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ при условии $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$.

Теорема 2.6 ([17]). *Пусть* $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$ *и* $\alpha_n = \alpha_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть также при некоторых* $0 \leqslant a < 1$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\|\alpha_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \leqslant \frac{a}{d_{n+1}}\left(1 + \left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^{3/2}\right), \qquad n \geqslant N. \tag{2.8}$$

Тогда $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$.

Также в [17] получены условия, обеспечивающие самосопряженность матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Теорема 2.7 ([17]). *Предположим, что* $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$ *и* $\alpha_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *– блочная якобиева матрица вида* (2.7) *и* $\mathcal{A}$ *– ее диагональ с* $\ker \mathcal{A} = \{0\}$. *Если* $|\alpha_n| = \sqrt{\alpha_n^2}$ *и*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\| |\alpha_n|^{-1/2} \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}}{d_n^{1/2}} < \frac{1}{2}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\left\| |\alpha_n|^{-1/2} \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}}{d_{n+1}^{1/2}} < \frac{1}{2}, \tag{2.9}$$

то оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжен в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$.

Теорема 2.8 ([17]). *Пусть выполнены условия теоремы 2.7 и* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ *– часть диагонали* $\mathcal{A}$ *матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$. *Если* $\mathcal{A}'$ *имеет дискретный спектр, то спектр матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}^*_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *также дискретен. Более того, если* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$, $p \in (1, \infty]$, *то* $(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

Здесь $\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ обозначает класс идеалов Неймана–Шатена.

§3. О максимальности индексов дефекта оператора $\mathbf{H}_{X,\alpha}$

В этом разделе при условии, что $|\mathcal{I}| < \infty$, для матричных операторов Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ получим условие максимальности индексов дефекта $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = m$ без использования якобиевых матриц, связанных с ними.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$ *– последовательность самосопряженных* $m \times m$*-матриц,* $\alpha_n = \alpha_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. *Предположим также, что выполнено следующее условие*:

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \|\alpha_k\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\right)^2 < +\infty. \tag{3.1}$$

Тогда $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = m$.

Доказательство. (i) Достаточно показать, что при условии (3.1) уравнение $(\mathbf{H}^*_{X,\alpha} \pm i)F = 0$ имеет нетривиальное матричное $L^2(\mathcal{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$-решение полного ранга, т.е. $\operatorname{rank} F(x) = m$.

Ограничимся случаем $(\mathbf{H}^*_{X,\alpha} + i)F = 0$, который эквивалентен системе

$$-\frac{d^2}{dx^2} F = -iF. \tag{3.2}$$

Здесь

$$F = \begin{pmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m} \quad \text{и} \quad F^j = \begin{pmatrix} f_1^j & \dots & f_m^j \end{pmatrix}^\top, \quad j \in \{1,\dots,m\}.$$

Уравнение (3.2) имеет следующие кусочно-гладкие $m \times m$-матричные решения

$$F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где

$$\begin{aligned} F &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n, \\ F_n(x) &= \mathcal{U}_n e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n - x)} + \mathcal{V}_n e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n - x)}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} F' &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n', \\ F_n'(x) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathcal{U}_n e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n - x)} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathcal{V}_n e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}(x_n - x)}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{aligned} \tag{3.4}$$

с $\{\mathcal{U}_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\{\mathcal{V}_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$.

Согласно описанию $\mathrm{dom}(\mathbf{H}_{X,\alpha}^*)$ (см. Теорема 2.1) каждая компонента F^j матрицы F, $j \in \{1,\dots,m\}$, должна удовлетворять граничным условиям (2.1). Сначала находим рекуррентные соотношения для матричных последовательностей $\{\mathcal{U}_n\}_1^\infty$, $\{\mathcal{V}_n\}_1^\infty$, которые обеспечивают выполнение этих условий.

Условие $F_n'(x_0+) = \mathbb{O}_m$ дает $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\mathcal{U}_1 e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_1} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\mathcal{V}_1 e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_1} = \mathbb{O}_m$. Далее условие

$$F_n(x_n+) = F_n(x_n-), \qquad n \in \mathbb{N},$$

согласно формулы (3.3) превращается в

$$\mathcal{U}_{n+1} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} + \mathcal{V}_{n+1} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Кроме того, условие скачка

$$F_n'(x_n+) - F_n'(x_n-) = \alpha_n F_n(x_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

согласно формул (3.3), (3.4) эквивалентно

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Big(\mathcal{U}_{n+1} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} - \mathcal{V}_{n+1} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}d_{n+1}} - (\mathcal{U}_n - \mathcal{V}_n) \Big) = \alpha_n (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n). \tag{3.6}$$

Объединяя (3.5) и (3.6), приходим к следующим рекуррентным уравнениям

$$\mathcal{U}_{n+1} = \left(\mathcal{U}_n + \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}(1+i)} \left(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n \right) \right) e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{V}_{n+1} = \left(\mathcal{V}_n - \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}(1+i)} \left(\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n \right) \right) e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

для последовательностей $\{\mathcal{U}_n\}_1^\infty$ и $\{\mathcal{V}_n\}_1^\infty$ со следующими начальными условиями

$$\mathcal{U}_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_1} \mathbb{I}_m \quad \text{и} \quad \mathcal{V}_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_1} \mathbb{I}_m \,. \tag{3.9}$$

(ii) Докажем, что $\operatorname{rang} F_n(x) = m$ для каждого $x \in [x_n, x_{n+1}]$ и $n \in \mathbb{N}$.

Граничные условия (1.2) в точке $x = 0$ можно понимать как недоопределенные начальные условия такие, что $\operatorname{rang} F_1(x) = m$. Покажем, что граничные условия (1.2), заданные в дальнейших точках x_n, $n \in \mathbb{N}$, являются корректно определенными начальными условиями, превращающими исходную краевую задачу в серию задач Коши на отрезках $[x_n, x_{n+1}]$, соответственно, каждая из которых имеет единственное решение. Переход решения $F(x)$ через точку x_n определяется соотношениями (3.7), (3.8), которые можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{n+1} \\ \mathcal{V}_{n+1} \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \mathcal{U}_n \\ \mathcal{V}_n \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где матрица T_n имеет вид

$$T_n = \begin{pmatrix} (\mathbb{I}_m + C_n) e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_{n+1}} & C_n e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_{n+1}} \\ -C_n e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_{n+1}} & (\mathbb{I}_m - C_n) e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} d_{n+1}} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

В свою очередь, матрица C_n связана с граничными условиями (2.1) соотношением $C_n = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} \alpha_n$.

Совершая элементарные преобразования над строками, а затем над столбцами матрицы T_n, получим $\det T_n = 1$. откуда следует, что $\operatorname{rang} T_n = 2m$, т.е. T_n – невырожденная матрица при любом $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, по индукции, что матрица $F_n(x)$ имеет ранг m. Пусть матрицы $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{V}_1$ являются невырожденными, как, например, в случае (3.9). Пусть, по предположению индукции, $2m \times m$-матрица $\begin{pmatrix} \mathcal{U}_k \\ \mathcal{V}_k \end{pmatrix}$

имеет ранг m. Тогда $2m \times m$-матрица $\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{k+1} \\ \mathcal{V}_{k+1} \end{pmatrix}$ также имеет ранг m, так как является произведением невырожденной $2m \times 2m$-матрицы T_k и матрицы $\begin{pmatrix} \mathcal{U}_k \\ \mathcal{V}_k \end{pmatrix}$ ранга m. Понимая граничные условия в точках x_n, как начальные и применяя теорему Коши для системы уравнений (3.2) на каждом из отрезков $[x_n, x_{n+1}]$, получаем, что каждая пара матриц $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{V}_1$ таких, что $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{pmatrix} = m$, задает единственное решение $F(x) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ с матрицами $F_n(x)$ полного ранга m в любой точке x.

(iii) Осталось проверить, что при условии (3.1) выполняется включение $F \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{m\times m})$. Из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n\|_2^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{d_n} (\|\mathcal{U}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} e^{-2x} + \|\mathcal{V}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} e^{2x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|\mathcal{U}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} (1 - e^{-2d_n}) + \|\mathcal{V}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} (e^{2d_n} - 1) \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = |\mathcal{I}| < +\infty$, получим, что $d_n \to 0$ и поэтому

$$(1 - e^{-2d_n}) \sim (e^{2d_n} - 1) \sim 2d_n$$

при $n \to \infty$. Это дает неравенство $\|F\|_2 < +\infty$ при условии, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\|\mathcal{U}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} + \|\mathcal{V}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} \right) d_n < +\infty. \tag{3.13}$$

Так как

$$T_n^* T_n = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= (\mathbb{I}_m + C_n^*)(\mathbb{I}_m + C_n) e^{\sqrt{2} d_{n+1}} + C_n C_n^* e^{-\sqrt{2} d_{n+1}}, \\ A_{12} &= (\mathbb{I}_m + C_n^*) C_n e^{\sqrt{2} d_{n+1}} - (\mathbb{I}_m - C_n) C_n^* e^{-\sqrt{2} d_{n+1}}, \\ A_{21} &= (\mathbb{I}_m + C_n) C_n^* e^{\sqrt{2} d_{n+1}} - (\mathbb{I}_m - C_n^*) C_n e^{-\sqrt{2} d_{n+1}}, \end{aligned}$$

$$A_{22} = (\mathbb{I}_m - C_n^*)(\mathbb{I}_m - C_n)e^{-\sqrt{2}d_{n+1}} + C_n C_n^* e^{\sqrt{2}d_{n+1}},$$

то

$$\begin{aligned}\|T_n\|^2 \leqslant \mathrm{tr} T_n^* T_n \leqslant 2\mathrm{tr}(\mathbb{I}_m + 2C_n C_n^*)e^{\sqrt{2}d_{n+1}} \\ = 2\mathrm{tr}(\mathbb{I}_m + \frac{1}{2}\alpha_n^2)e^{\sqrt{2}d_{n+1}} \leqslant 2(\mathbb{I}_m + \frac{m}{2}\|\alpha_n^2\|)e^{\sqrt{2}d_{n+1}}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Объединяя (3.13) с (3.15) и предположением (3.1), заключаем, что $F \in L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{m\times m})$. □

Замечание 3.2. Для любого фиксированного $a \in [x_{n-1}, x_n]$ следует эквивалентность

$$F_n(a)h = F_n'(a)h = 0 \Longleftrightarrow \mathscr{U}_n h = \mathscr{V}_n h = 0. \tag{3.16}$$

Из (3.16) и соотношения аналогичного (3.12) для F' следует, что F' вида (3.4) принадлежит $L^2(\mathcal{I}; \mathbb{C}^{m\times m})$ в то время, как в [9, Пример 2.3] $f' \notin W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X)$.

Следствие 3.3. *Оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ симметрический с $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = m$, когда $\{\alpha_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$.*

Следствие 3.4. *Оператор $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ симметрический с $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = m$, когда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} \left(1 + \|\alpha_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\right)^2 < 1\,. \tag{3.17}$$

В частности, $n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = m$ при условии, что выполнено одно из следующих условий

(i) $\limsup_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) = 0$ *и* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) =: (1/d)$ *с* $d > 1$ *и* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < \sqrt{d} - 1$.

Замечание 3.5. Отметим, что аналогичные результаты доказаны для операторов Дирака с точечными взаимодействиями в скалярном (см. [5]) и матричном случае (см. [3]).

§4. Об индексах дефекта класса якобиевых матриц $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m)$. Сравнение с известными результатами

Далее, используя вышеуказанную связь между якобиевым оператором и оператором Шредингера (см. предложение 6.2), получим теорему о максимальности индексов дефекта якобиева оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *– блочный якобиев оператор, ассоциированный с матрицей вида* (2.7)*. Если выполнено условие* (3.1)*, то индексы дефекта якобиевой матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *максимальны, т.е.* $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$.

Далее сравним эти условия с известными.

Другие условия максимальности индексов дефекта якобиевых матриц вида (1.4) были также получены в работе [25]. Здесь мы сравниваем наш результат об индексах дефекта (теорема 4.1) с результатами из [25].

Чтобы сформулировать их результат, следуя [25], введем матрицы $\mathcal{C}_0 := \mathcal{B}_1^{*-1}$, $\mathcal{C}_1 := \mathbb{I}_m$, и

$$\mathcal{C}_n = \begin{cases} (-1)^j \mathcal{B}_{2j-1}^{-1}\mathcal{B}_{2j}^* \dots \mathcal{B}_2^*\mathcal{B}_1^{-1}, & \text{при} \ \ n = 2j, \\ (-1)^j \mathcal{B}_{2j}^{-1}\mathcal{B}_{2j-1}^* \dots \mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1^*, & \text{при} \ \ n = 2j+1, \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Теорема 4.2 ([25])**.** *Предположим, что элементы матрицы* $\mathbf{J}$ (1.4) *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n\|^2_{\mathbb{C}^{m\times m}} < +\infty, \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n^*\mathcal{A}_n\mathcal{C}_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < +\infty, \tag{4.3}$$

где последовательность $\mathcal{C}_n$ *определяется равенством* (4.1)*. Тогда для матрицы* $\mathbf{J}$ *имеет место вполне неопределенный случай, т.е.* $n_\pm(\mathbf{J}) = m$.

Этот результат был применен к оператору Шредингера с δ-взаимодействиями (1.2) на полуоси ($\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} d_n = \infty$) в [8] (скалярный случай, $m = 1$) и в [23, 29] (матричный случай, $m > 1$).
Далее опишем область применимости теоремы 4.2 для матриц $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Предложение 4.3. *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^\infty \in l^1(\mathbb{N})$*. Пусть также* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *– якобиева матрица вида* (2.7) *и* $\mathcal{C}_n$ *– матрицы вида* (4.1)*, составленные из элементов* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$*. Тогда ряд* (4.3) *сходится тогда и только тогда, когда* $\{\alpha_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$.

Доказательство. В нашем случае элементы $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{A}_n$ якобиевой матрицы имеют вид

$$\mathcal{B}_n = \begin{cases} d_{j+1}^{-2}\mathbb{I}_m, & n=2j, \\ d_{j+1}^{-3/2}d_{j+2}^{-1/2}\mathbb{I}_m, & n=2j+1, \end{cases} \qquad \mathcal{A}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_j}{d_{j+1}}, & n=2j, \\ -\frac{1}{d_{j+1}^2}\mathbb{I}_m, & n=2j+1. \end{cases} \tag{4.4}$$

В соответствие с (4.1) и (4.4), приходим к

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{2j+1} = (-1)^j \mathcal{B}_{2j}^{-1}\mathcal{B}_{2j-1}\dots\mathcal{B}_4^{-1}\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1 \\ &= (-1)^j d_{j+1}^2 \cdot \frac{1}{d_j^{3/2}d_{j+1}^{1/2}} \cdot d_j^2 \cdot \frac{1}{d_{j-1}^{3/2}d_j^{1/2}} \cdot \ldots \cdot d_3^2 \cdot \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}} \cdot d_2^2 \cdot \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m \\ &= (-1)^j \frac{d_{j+1}^{3/2}}{d_1^{3/2}}\mathbb{I}_m. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Объединяя (4.4) с (4.5) для $n = 2j+1$, $j \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_{2j+1}^*\mathcal{A}_{2j+1}\mathcal{C}_{2j+1}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_{2j+1}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}^2 \cdot \|\mathcal{A}_{2j+1}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{d_{j+1}^3}{d_1^3} \cdot \frac{1}{d_{j+1}^2} = \frac{1}{d_1^3}\sum_{j=1}^{+\infty} d_{j+1} < +\infty. \end{aligned} \tag{4.6}$$

В соответствие с (4.1) и (4.4), приходим к

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{2j} \quad &= \quad (-1)^j \mathcal{B}_{2j-1}^{-1}\mathcal{B}_{2j-2}\dots\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^{-1} = (-1)^j d_j^{3/2}d_{j+1}^{1/2} \cdot \frac{1}{d_j^2} \cdot d_{j-1}^{3/2}d_j^{1/2} \\ \cdot \quad &\ldots \cdot d_2^{3/2}d_3^{1/2} \cdot \frac{1}{d_2^2} \cdot d_1^{3/2}d_2^{1/2}\mathbb{I}_m = (-1)^j d_{j+1}^{1/2}d_1^{3/2}\mathbb{I}_m. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Объединяя (4.4) с (4.7) для $n = 2j$, $j \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_{2j}^*\mathcal{A}_{2j}\mathcal{C}_{2j}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = \sum_{j=1}^{+\infty} d_{j+1}d_1^3 \cdot \frac{\|\alpha_j\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}}{d_{j+1}} = d_1^3\sum_{j=1}^{+\infty}\|\alpha_j\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}. \tag{4.8}$$

Таким образом, ряд (4.3) сходится тогда и только тогда, когда $\{\alpha_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N};\mathbb{C}^{m\times m})$. □

Предложение 4.3 показывает, что условия теоремы 4.2 в сравнении с условиями теоремы 4.1 слишком ограничительны для применения к якобиевым матрицам $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Замечание 4.4. Условия предложения 4.3 совпадают с таковыми в следствии 3.3. Однако условия следствия 3.4, следовательно, и условия теоремы 4.1 существенно слабее условий предложения 4.3. Продемонстрируем этот факт, рассмотрев следующие два простых примера.

(i) Пусть $d_n = 2^{-n^2}$ и $\|\alpha_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = 1$. Очевидно, что условия следствия 3.4 (i) выполнены и $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$. В то же время, $\{\alpha_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N};\mathbb{C}^{m\times m})$, и условия следствия 3.3 (предложения 4.3) нарушены.

(ii) Пусть $d_n = 2^{-n}$ и $\|\alpha_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < 2^{-1}(\sqrt{2}-1)$. Тогда матрица $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ удовлетворяет условиям следствия 3.4 (ii) с $d = 2$, следовательно, $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$. С другой стороны, $\{\alpha_n\}_1^\infty \notin l^1(\mathbb{N};\mathbb{C}^{m\times m})$, и условия следствия 3.3 (предложения 4.3) нарушены.

Таким образом, следствие 3.4 обеспечивает равенство $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$, хотя теорема 4.2 к ней не применима.

§5. Об индексах дефекта класса якобиевых матриц $\widehat{\mathcal{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ и дискретности их спектров

Отнесем возмущенную блочную якобиеву матрицу вида

$$\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H}) =$$
$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}'_0 & \frac{1}{d_1^2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_0) & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{1}{d_1^2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_0) & -\frac{1}{d_1^2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{A}'_1) & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_1) & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_1) & \frac{\alpha_1}{d_2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{A}'_2) & \frac{1}{d_2^2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_2) & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_2) & -\frac{1}{d_2}(\mathbb{I}_m+\mathcal{A}'_3) & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}(\mathbb{I}_m+\mathcal{B}'_3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

к классу $\widehat{\mathcal{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$. Здесь $\mathcal{A}'_n = (\mathcal{A}'_n)^*$, $\mathcal{B}'_n = (\mathcal{B}'_n)^*, \alpha_n = \alpha_n^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ и внедиагональные элементы $\mathbb{I}_m + \mathcal{B}'_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, обратимы.

Через $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ обозначим минимальный якобиев оператор, ассоциированный в стандартной форме с матрицей $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)$ (см. [12, 13], а также [26]). Очевидно, что оператор $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ является симметрическим. Хорошо известно, что $\mathrm{n}_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m$ (см. [13, 26, 27]).

Теорема 5.1. *Предположим, что для некоторого $N \in \mathbb{N}_0$ элементы матрицы* (5.1) *удовлетворяют следующим условиям:*

(i) $\sup\limits_{n\geqslant N} \|\mathcal{B}'_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = A_N < 1;$ (5.2)

$$\text{(ii)} \quad \sup_{j\geqslant 0} \frac{1}{d_{j+1}^2} \left\| \mathcal{B}'_{2j} - \mathcal{B}'_{2j-1} \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C'_B < \infty, \tag{5.3}$$

$$\sup_{j\geqslant 0} \frac{1}{d_{j+1}^{3/2} d_{j+2}^{1/2}} \left\| \mathcal{B}'_{2j+1} - \mathcal{B}'_{2j} \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C''_B < \infty; \tag{5.4}$$

$$\text{(iii)} \quad \sup_{j\geqslant 0} \frac{1}{d_{j+1}} \left\| \alpha_j (\mathcal{A}'_{2j} - \mathcal{B}'_{2j-1}) \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C'_A < \infty, \tag{5.5}$$

$$\sup_{j\geqslant 0} \frac{1}{d_{j+1}^2} \left\| \mathcal{A}'_{2j+1} - \mathcal{B}'_{2j} \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C''_A < \infty. \tag{5.6}$$

Тогда:

(a) *индексы дефекта якобиева оператора* $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *максимальны, т.е.* $n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$, *если к тому же* $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ *удовлетворяют условию* (2.8) *или* (3.1)*;*

(b) *якобиев оператор* $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжен, т.е.*

$$\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \left(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})\right)^*,$$

если к тому же $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ *удовлетворяют условиям* (2.9) *и* $\alpha_n < 0$.

Доказательство. Проверим выполнение условий следствия 2.5 для якобиевых матриц $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ и $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ вида (5.1) и (2.7), соответственно.

(i) Сначала проверим условие (2.3) в случае $n = 2j$. Применяя к этим матрицам оценку (5.2), легко получим

$$\begin{aligned} \sup_{j\geqslant N} \|\mathbb{I}_m - \widehat{\mathcal{B}}_{2j}\mathcal{B}_{2j}^{-1}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} &= \sup_{j\geqslant N} \left\| \mathbb{I}_m - \frac{1}{d_{j+1}^2}(\mathbb{I}_m + \mathcal{B}'_{2j}) \cdot d_{j+1}^2 \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \\ &= \sup_{j\geqslant N} \left\| \mathcal{B}'_{2j} \right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \leqslant A_N < 1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Случай $n = 2j+1$ доказывается аналогично.

(ii) Далее проверим условие (2.4). Рассмотрим только случай $n = 2j$. Применяя оценку (5.3) к паре $\{\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}), \widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})\}$, получим

$$\begin{aligned}
&\sup_{j\geqslant 0}\|\widehat{\mathcal{B}}_{2j} - \widehat{\mathcal{B}}_{2j-1}\mathcal{B}_{2j-1}^{-1}\mathcal{B}_{2j}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \\
&= \sup_{j\geqslant 0}\left\|\frac{1}{d_{j+1}^2}(\mathbb{I}_m + \mathcal{B}'_{2j}) - \frac{1}{d_j^{3/2}d_{j+1}^{1/2}}(\mathbb{I}_m + \mathcal{B}'_{2j-1})\frac{d_j^{3/2}d_{j+1}^{1/2}}{d_{j+1}^2}\right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \\
&= \sup_{j\geqslant 0}\frac{1}{d_{j+1}^2}\left\|\mathcal{B}'_{2j} - \mathcal{B}'_{2j-1}\right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \leqslant C'_B < \infty. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Случай $n = 2j + 1$ доказывается аналогично.

(iii) Наконец проверим условие (2.6), рассматривая только случай $n = 2j$. Случай $n = 2j + 1$ доказывается аналогично. Применяя оценку (5.5) к паре $\{\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H}), \widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})\}$, получим

$$\begin{aligned}
&\sup_{j\geqslant 0}\|\widehat{\mathcal{A}}_{2j} - \widehat{\mathcal{B}}_{2j-1}\mathcal{B}_{2j-1}^{-1}\mathcal{A}_{2j}\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \\
&= \sup_{j\geqslant 0}\left\|\frac{\alpha_j}{d_{j+1}}(\mathbb{I}_m + \mathcal{A}'_{2j}) - \frac{1}{d_j^{3/2}d_{j+1}^{1/2}}(\mathbb{I}_m + \mathcal{B}'_{2j-1})\frac{d_j^{3/2}d_{j+1}^{1/2}\cdot\alpha_j}{d_{j+1}}\right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} \\
&= \sup_{j\geqslant 0}\frac{1}{d_{j+1}}\left\|\alpha_j(\mathcal{A}'_{2j} - \mathcal{B}'_{2j-1})\right\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = C'_A < \infty. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Таким образом, из объединения следствия 2.5 с:

(a) теоремой 2.6 следует, что $n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = m$;

(b) теоремой 2.7 следует, что $n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = 0$, т.е. $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \left(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})\right)^*$. □

Замечание 5.2. Также отметим, что условие (5.2) обеспечивает обратимость внедиагональных элементов якобиевой матрицы (5.1).

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8 *и оценки* (5.2)–(5.6). *Тогда оператор* $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр.*

Доказательство. Объединяя теорему 2.4 с теоремой 2.8 и оценками (5.2)–(5.6), приходим к утверждению данной теоремы. □

§6. Аппендикс

1. Линейные отношения. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. *Линейным отношением* в $\mathfrak{H}$ называется линейное (необязательно замкнутое) подпространство в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Множество *замкнутых линейных отношений* в $\mathfrak{H}$ обозначим $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

Напомним, что $\operatorname{dom}\Theta = \big\{f : \{f, f'\} \in \Theta\big\}$, $\operatorname{ran}\Theta = \big\{f' : \{f, f'\} \in \Theta\big\}$, $\ker\Theta = \{f \in \mathcal{H} : \{f, 0\} \in \Theta\}$ и $\operatorname{mul}\,\Theta = \big\{f' : \{0, f'\} \in \Theta\big\}$ называют *областью определения, множеством значений, ядром* и *многозначной частью* линейного отношения Θ, соответственно.

Линейное отношение Θ называется *симметрическим*, если $\Theta \subset \Theta^*$ и *самосопряженным*, если $\Theta = \Theta^*$.

Для симметрического линейного отношения $\Theta \subseteq \Theta^*$ в $\mathfrak{H}$ многозначная часть $\operatorname{mul}\Theta$ ортогональна $\operatorname{dom}\Theta$ в $\mathfrak{H}$. Полагая $\mathfrak{H}_{op} := \overline{\operatorname{dom}}\Theta$ и $\mathfrak{H}_\infty = \operatorname{mul}\Theta$, получаем ортогональное разложение $\Theta = \Theta_{op} \oplus \Theta_\infty$, где Θ_{op} – симметрический оператор в $\mathfrak{H}_{op}$, который называется *операторной частью* Θ, а $\Theta_\infty = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ f' \end{bmatrix} : f' \in \operatorname{mul}\Theta\right\}$ — *многозначная часть* Θ.

Замкнутый линейный оператор T в $\mathfrak{H}$ отождествляют с его графиком $\operatorname{gr} T$. Поэтому множество $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ замкнутых линейных операторов в $\mathfrak{H}$ отождествляется с подмножеством $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$.

2. Граничные тройки. Пусть A — плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_\lambda(A) := \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(A - \overline{\lambda} I) = \ker(A^* - \lambda), \lambda \in \mathbb{C}$, — его *дефектные подпространства*, а $n_\pm(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ — его *индексы дефекта*.

Всюду в дальнейшем мы считаем, $n_+(A) = n_-(A) < \infty$.

Определение 6.1. [6, 20, 19] *Совокупность* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$*, в которой* $\mathcal{H}$ *— сепарабельное гильбертово пространство, а* Γ_j *— линейное отображение из* $\operatorname{dom} A^*$ *в* $\mathcal{H}$*,* $j \in \{0, 1\}$*, называется граничной тройкой оператора* A^**, если:*

(i) *справедливо тождество Грина*

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \operatorname{dom} A^*; \tag{6.1}$$

(ii) *Отображение* $\Gamma : f \to \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ *из* $\operatorname{dom} A^*$ *в* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно.*

Граничная тройка для оператора A^* существует в том и только том случае, когда $n_+(A) = n_-(A)$. Более того, $n_\pm(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker \Gamma = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 = \operatorname{dom} A$.

Расширение $\widetilde{A}$ плотно заданного симметрического оператора A называется *собственным*, если $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} \widetilde{A} \subset \operatorname{dom} A^*$. Множество *собственных расширений* оператора A обозначают Ext_A.

Предложение 6.2. [6, 20] *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *— граничная тройка для оператора* A^*. *Тогда отображение* $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \operatorname{dom} A^* \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *задает биективное соответствие между совокупностью* Ext_A *собственных расширений* $\widetilde{A}$ *оператора* A *и совокупностью* $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *замкнутых линейных отношений в* $\mathcal{H}$

$$\mathrm{Ext}_A \ni \widetilde{A} \to \Theta := \Gamma(\operatorname{dom} \widetilde{A}) = \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : f \in \operatorname{dom} \widetilde{A}\} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}). \quad (6.2)$$

Если Θ *является графиком линейного оператора* B, $\Theta = \operatorname{gr} B$, *то соотношение* (6.2) *принимает вид*:

$$\operatorname{dom} A_B = \{f \in \operatorname{dom} A^* : \Gamma_1 f = B\Gamma_0 f\}. \quad (6.3)$$

Для расширения $\widetilde{A}$ *при выполнении условия* (6.2) $\widetilde{A} =: A_\Theta$ *или* $\widetilde{A} =: A_B$ *при* (6.3). *При этом справедливы соотношения*

(i) $(A_B)^* = A_{B^*}$;

(ii) $A_{B_1} \subseteq A_{B_2} \Longleftrightarrow B_1 \subseteq B_2$;

(iii) *расширение* A_B *симметрическое* $\Longleftrightarrow$ *оператор* B *симметрический. При этом* $n_\pm(A_B) = n_\pm(B)$. *В частности,*

$$A_B = A_B^* \Longleftrightarrow B = B^*.$$

(iv) *пусть* $A_{B_1} = A_{B_1}^*$ *и* $A_{B_2} = A_{B_2}^*$. *Тогда справедлива эквивалентность:*

$$(A_{B_1} - iI)^{-1} - (A_{B_2} - iI)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$$
$$\Updownarrow$$
$$(B_1 - iI)^{-1} - (B_2 - iI)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}), \quad p \in (0, +\infty];$$

(vi) *если* $\operatorname{dom} B_1 = \operatorname{dom} B_2$, *то справедлива импликация*

$$\overline{B_1 - B_2} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}) \Longrightarrow (A_{B_1} - iI)^{-1} - (A_{B_2} - iI)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}), \quad p \in (0, +\infty].$$

Аналогичные утверждения верны и для линейного отношения Θ.

Отношение Θ называют *граничным отношением* оператора $\widetilde{A} = A_\Theta$.

Рассмотрим расширения оператора A, задаваемые следующим образом:

$$A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0, \qquad A_1 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_1.$$

При этом $A_j = A_{\Theta_j}$, $j \in \{0,1\}$, где подпространства $\Theta_0 := \{0\} \times \mathcal{H}$ и $\Theta_1 := \mathcal{H} \times \{0\}$ — самосопряженные линейные отношения в $\mathcal{H}$. В силу Предложения 6.2 $A_j = A_j^*$, $j \in \{0,1\}$. Заметим, что Θ_0 — чистое линейное отношение. При этом оператор B называют *граничным оператором* расширения A_B.

В работе [8] в скалярном случае и в [23] – в матричном, построена граничная тройка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, для которой граничный оператор, соответствующий оператору Шредингера $\mathbf{H}_{X,\alpha}$, задается якобиевой матрицей $\mathbf{J}_{X,\alpha}$ вида (2.7), т.е.

$$\operatorname{dom}(\mathbf{H}_{X,\alpha}) = \ker(\Gamma_1 - \mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})\Gamma_0).$$

Отсюда и из общих результатов теории граничных троек [20] вытекает как соотношение $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_\pm(\mathbf{H}_{X,\alpha})$, так и другие результаты о связи спектральных свойств операторов $\mathbf{H}_{X,\alpha}$ и $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$).

Список литературы

1. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (2005).
2. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators and Schrödinger type operators*, Cambridge University Press (2000).
3. V. Budyka, M. Malamud, *Deficiency indices and discreteness property of block Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions.* — J. Math. Anal. Appl. **506** (2022), Paper No. 125582, 50.
4. D. Buschmann, G. Stolz, J. Weidmann, *One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions.* — J. Reine Angew. Math. **467** (1995), 169–186.
5. R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano, *On the spectral theory of Gesztesy–Šeba realizations of* 1*–D Dirac operators with point interactions on a discrete set.* — J. Differential Equations **254**, no. 9 (2013), 3835–3902.
6. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps.* — J. Funct. Anal. **95** (1995), 1–95.
7. P. Exner, Seize ans après, *Appendix K to "Solvable Models in Quantum Mechanics"by Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H.*, Sec. Edition, AMS Chelsea Publ. (2005).
8. A. S. Kostenko, M. M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set.* — J. Differential Equations **249** (2010), 253–304.
9. A. Kostenko, M. Malamud, *1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review".* — Spectral Analysis, Differential Equations and Mathematical Physics: a Festschrift in Honor of Fritz Gesztesy's 60th Birthday, Proc. Symp. Pure Math., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2013), 235–262.

10. N. Minami, *Schrödinger operator with potential which is the derivative of a temporally homogeneous Levy process.* — Probability Theory and Mathematical Sciences, Lect. Notes in Math. **1299** (1988), 298–304.
11. P. Štoviček, G. Świderski, *On positive Jacobi matrices with compact inverses.* — J. Approx. Theory **313** (2026), Paper No. 106217.
12. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею,* Физматгиз, Москва (1961).
13. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов,* Наукова думка, Киев (1965).
14. И. Н. Бройтигам, К. А. Мирзоев, *О дефектных числах операторов, порожденных якобиевыми матрицами с операторными элементами.* — Алгебра и анализ **30**, No. 4 (2018), 1–26.
15. В. С. Будыка, М. М. Маламуд, *Об индексах дефекта блочно якобиевых матриц, связанных с операторами Дирака с точечными взаимодействиями.* — Матем. заметки **106**, вып. 6 (2019), 940–945.
16. В. С. Будыка, М. М. Маламуд, К. А. Мирзоев, *Индексы дефекта блочных матриц Якоби: обзор.* — СМФН **67**, No. 2 (2021), 237–254.
17. В. С. Будыка, М. М. Маламуд, И. Л. Покровский, *Индексы дефекта блочных якобиевых матриц, не удовлетворяющих условию Карлемана, и операторы с точечными взаимодействиями.* — Матем. заметки **114**, вып. 5 (2023), 789–795.
18. В. Будыка, М. Маламуд., А. Посиликано, *К спектральной теории одномерных матричных операторов Дирака с точечными матричными взаимодействиями.* — ДАН **479**, No. 2 (2018), 117–125.
19. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений,* Наукова думка, Киев (1984).
20. В. О. Деркач, М. М. Маламуд, *Теорія розширень симетричних операторів і граничі задачі,* Інститут математики НАН України, Київ (2017).
21. Ю. М. Дюкарев, *О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби.* — Матем. сб. **197**, вып. 8 (2006), 73–100.
22. А. С. Костенко, М. М. Маламуд, *Об одномерном операторе Шрёдингера с δ-взаимодействиями.* — Функц. анализ и его прил. **44**, вып. 2 (2010), 87–91.
23. А. С. Костенко, М. М. Маламуд, Д. Д. Натягайло, *Матричные операторы Шредингера с δ–взаимодействиями.* — Матем. заметки **100**, вып. 1. (2016), 59–77.
24. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.* — Функц. анализ и его прил. **33**, No. 1 (1999), 30–45.
25. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, *Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами.* — Функц. анализ и его прил. **35**, No. 4 (2001), 32–37.
26. М. Крейн, *Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов.* — Доклады Академии Наук СССР **LXIX** No. 2 (1949), 125–128.
27. М. Крейн, *Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m,m).* — Укр. мат. ж. **1**, No. 2 (1949), 3–66.
28. М. М. Маламуд, *О формуле обобщённых резольвент неплотно заданного эрмитова оператора.* — Укр. мат. ж. **44**, No. 12 (1992), 1658–1688.

29. К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля.* — Матем. заметки **99**, вып. 2 (2016), 262–277.

Budyka V., Pokrovskii I. On the deficiency indices of matrix Schrödinger operators with point interactions and some classes of perturbed block Jacobi matricesю

In the article we present new conditions of maximality of deficiency indices of matrix Schrödinger operators with point interactions. Also we found new conditions of self-adjointness and maximality of deficiency indices of some class of perturbed block Jacobi operators. Conditions of discreteness of their spectrum are also obtained.

Донецкая академия
управления и государственной службы;
Федеральное государственное
бюджетное научное учреждение
"Институт прикладной математики и механики"
(ФГБНУ ИПММ), Донецк;
С.-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: budyka.vik@gmail.com

Московский государственный
технический университет
имени Н. Э. Баумана,
Москва, Россия
E-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru

Поступило 12 сентября 2025 г.