Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 541, 2025 г.

М. И. Белишев, С. А. Симонов

АБСТРАКТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ. IV

§1. О работе

Мы продолжаем изучение общих свойств эволюционных динамических систем с граничным управлением. Цифра IV в названии указывает на то, что данная работа развивает идеи и результаты трёх предыдущих статей по этой теме [2, 3, 13]. Новизна и вклад настоящей работы заключаются в изучении свойств операторов реакции таких систем. Эти операторы играют роль данных для широкого класса обратных задач.

§2. Операторы и системы

Пусть L_0 — замкнутый, плотно определённый, симметрический положительно определённый оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (выполняется $L_0 \geqslant \gamma\mathbb{I}$ с $\gamma > 0$) с индексами дефекта $1 \leqslant n_{\pm}^{L_0} \leqslant \infty$. Пусть L и L_K — (экстремальные) расширения L_0 по Фридрихсу и по М. Крейну, соответственно:

$$L_0 \subset L = L^* \subset L_0^*, \quad L_0 \subset L_K = L_K^* \subset L_0^*, \tag{1}$$

так что для любого положительного самосопряжённого расширения $\tilde{L} \supset L_0$ и для всех $a > 0$ выполняется неравенство

$$(a\mathbb{I} + L)^{-1} \leqslant (a\mathbb{I} + \tilde{L})^{-1} \leqslant (a\mathbb{I} + L_K)^{-1}.$$

Отметим, что оператор $L^{-1} = (L^{-1})^*$ ограничен и определён на всём $\mathscr{H}$ [9, 10]. Известные разложения М. И. Вишика имеют вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{Dom} L_0^* = \operatorname{Dom} L_0 \dotplus L^{-1}\mathscr{K} \dotplus \mathscr{K} = \operatorname{Dom} L \dotplus \mathscr{K}, \\ &\operatorname{Dom} L = \operatorname{Dom} L_0 \dotplus L^{-1}\mathscr{K}, \\ &\operatorname{Dom} L_K = \operatorname{Dom} L_0 \dotplus \mathscr{K} \end{aligned} \tag{2}$$

Ключевые слова: треугольная факторизация операторов, теория гнёзд, функциональные модели.

(см., например, [3,7,8]). Мы также используем *редуцированное расширение Крейна*

$$L'_K := L_K \restriction (\mathscr{K}^\perp \cap \operatorname{Dom} L_K) = (L'_K)^*,$$

которое является частью L_K в $\mathscr{K}^\perp := \mathscr{H} \ominus \mathscr{K}$ и для которого выполняется $L'_K \geqslant \gamma\, \mathbb{I}_{\mathscr{K}^\perp}$ [11].

Операторы

$$\Gamma_1 := L^{-1}L_0^* - \mathbb{I}, \quad \Gamma_2 := PL_0^*, \quad \operatorname{Dom}\Gamma_{1,2} = \operatorname{Dom} L_0^*, \quad \operatorname{Ran}\Gamma_{1,2} = \mathscr{K},$$

называются *граничными операторами*. Они действуют непрерывно из $\operatorname{Dom} L_0^*$ с нормой графика $\|y\|^2 + \|L_0^* y\|^2$ в $\mathscr{K}$. Для операторов из (1) выполнены соотношения

$$L_0 = L_0^* \restriction [\operatorname{Ker}\Gamma_1 \cap \operatorname{Ker}\Gamma_2], \quad L = L_0^* \restriction \operatorname{Ker}\Gamma_1, \quad L_K = L_0^* \restriction \operatorname{Ker}\Gamma_2 \tag{3}$$

(см., например, [8]). Тройка $(\mathscr{K}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является *обыкновенной граничной тройкой* для оператора L_0^* [8]. Имеет место формула Грина

$$(L_0^* u, v) - (u, L_0^* v) = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v) - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v), \qquad u, v \in \operatorname{Dom} L_0^*. \tag{4}$$

Зафиксируем $T > 0$. Оператор L_0 определяет динамическую систему α^T вида

$$u''(t) + L_0^* u(t) = 0 \qquad \text{в } \mathscr{H},\ \ t \in (0, T), \tag{5}$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \qquad \text{в } \mathscr{H}, \tag{6}$$

$$\Gamma_1 u(t) = f(t) \qquad \text{в } \mathscr{K},\ \ t \in [0, T], \tag{7}$$

где $(\cdot)' := \frac{d}{dt}$, $\mathscr{K}$-значная функция времени $f = f(t)$ – *граничное управление*, $u = u^f(t)$ — решение (*волна*). Атрибуты теории систем для α^T таковы.

1. *Внешнее пространство* управлений — это $\mathscr{F}^T := L_2([0,T];\mathscr{K})$. Класс гладких управлений $\dot{\mathscr{F}}^T := \{f \in C^\infty([0,T];\mathscr{K}) \mid \operatorname{supp} f \subset (0,T]\}$ плотен в $\mathscr{F}^T$ и удовлетворяет равенствам

$$\frac{d^p}{dt^p}\, \dot{\mathscr{F}}^T = \dot{\mathscr{F}}^T, \quad (J^T)^p \dot{\mathscr{F}}^T = \dot{\mathscr{F}}^T, \qquad p = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

где J^T действует на зависящие от времени функции по правилу $(J^T y)(t) := \int_0^t y(\eta)\, d\eta$.

Для $f \in \dot{\mathscr{F}}^T$ система (5)–(7) имеет единственное классическое решение $u = u^f(t)$, которое удовлетворяет условиям $u^f(\cdot) \in C^\infty([0,T];\mathscr{H})$ и

$$u^f(t) \in \operatorname{Dom} L_0^*, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

Имеют место представления

$$\begin{aligned} u^f(t) &= -f(t) + \int_0^t \cos[(t-s)L^{\frac{1}{2}}]\, f'(s)\, ds \\ &= -f(t) + L^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin[(t-s)L^{\frac{1}{2}}]\, f''(s)\, ds \\ &= -f(t) + L^{-1} \int_0^t \left(\mathbb{I} - \cos[(t-s)L^{\frac{1}{2}}]\right) f'''(s)\, ds, \qquad t \geqslant 0,\ \ f \in \dot{\mathscr{F}}^T, \end{aligned} \tag{10}$$

см., например, [3].

В дальнейшем мы предполагаем, что все функции продолжаются с $t \geqslant 0$ на $t < 0$ *нулём*. Пусть $\mathcal{T}_\sigma^T$ — оператор задержки, который действует следующим образом:

$$(\mathcal{T}_\sigma^T y)(t) := y(t-\sigma), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \sigma \in [0,T].$$

Поскольку оператор L_0^*, управляющий эволюцией системы α^T, не зависит от времени, выполняются равенства

$$\begin{aligned} &u^{\mathcal{T}_\sigma^T f}(t) = (\mathcal{T}_\sigma^T u^f)(t) = u^f(t-\sigma), \quad u^{J^T f}(t) = (J^T u^f)(t), \\ &u^{f''}(t) \overset{(10)}{=} (u^f)''(t) \overset{(5)}{=} -L_0^* u^f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \sigma \in [0,T]. \end{aligned} \tag{11}$$

Пространство $\mathscr{F}^T$ содержит расширяющееся семейство (*гнездо*) подпространств запаздывающих управлений

$$\mathscr{F}^{T,s} := \{f \in \mathscr{F}^T \mid f\,|_{0 \leqslant t \leqslant T-s} = 0\} = \mathcal{T}_{T-s}^T \mathscr{F}^T, \qquad s \in [0,T];$$

здесь s — время действия, а $T-s$ — задержка, так что $\mathscr{F}^{T,0} = \{0\}$ и $\mathscr{F}^{T,T} = \mathscr{F}^T$. Положим $\dot{\mathscr{F}}^{T,s} := \mathscr{F}^{T,s} \cap \dot{\mathscr{F}}^T$ и обозначим через X_s^T ортогональный проектор в $\mathscr{F}^T$ на $\mathscr{F}^{T,s}$. Этот проектор обрезает управления на отрезок $T-s \leqslant t \leqslant T$.

Отметим дополнительно, что сопряжённый к $\mathcal{T}_\sigma^T$ оператор (в $\mathscr{F}^T$) действует по правилу

$$(\mathcal{T}_\sigma^{T\,*} f)(t) = \begin{cases} f(t+\sigma), & 0 \leqslant t \leqslant T-\sigma, \\ 0, & T-\sigma < t \leqslant T, \end{cases}$$

а также справедливы соотношения

$$\mathcal{T}^T_{T-s}\mathcal{T}^{T\,*}_{T-s} = X^T_s \quad \text{и} \quad \mathcal{T}^{T\,*}_{T-s}\mathcal{T}^T_{T-s} = \mathbb{I} - X^T_{T-s}.$$

2. *Внутреннее пространство* состояний — это $\mathscr{H}$. Оно содержит гнездо *достижимых множеств*

$$\dot{\mathscr{U}}^s := \{u^f(s) \mid f \in \dot{\mathscr{F}}^T\}, \qquad s \in [0,T],$$

элементы которых мы называем *гладкими волнами.* Заметим, что, как видно из (10), множества $\dot{\mathscr{U}}^s$ не зависят от T. Инвариантность (8) и соотношения (9), (11) приводят к равенству

$$L_0^*\dot{\mathscr{U}}^s = \dot{\mathscr{U}}^s, \qquad s \in [0,T]\,.$$

Обозначим $\mathscr{U}^s := \overline{\dot{\mathscr{U}}^s}$ и будем называть это подпространство *волновым.*

3. *Оператор управления* $W^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}$, $W^T f := u^f(T)$, определён на $\dot{\mathscr{F}}^T$. Он может быть неограниченным, но всегда замыкаем [2]. Замыкание W^T также обозначается через W^T. Имеем $\dot{\mathscr{U}}^T = W^T\dot{\mathscr{F}}^T$ и $\mathscr{U}^T = \overline{W^T\dot{\mathscr{F}}^T}$.

Гладкий класс $\dot{\mathscr{F}}^T$ плотен в каждом из пространств Соболева

$$\mathscr{F}^T_p := \{f \in W^p_2([0,T];\mathscr{K}) \mid f^{(k)}(0) = 0,\ \ k = 0,\dots,p-1\}, \quad p \geqslant 1,$$

с нормой $\|f\|_p := \|f^{(p)}\|_{\mathscr{F}^T}$. Каждое из $\mathscr{F}^T_p$ плотно в $\mathscr{F}^T$.

Первое из представлений (10) показывает, что W^T действует непрерывно из $\mathscr{F}^T_1$ в $\mathscr{H}$. Для $f \in \mathscr{F}^T_1$ правая часть лежит в $L_\infty([0,T];\mathscr{H})$ и рассматривается как *обобщённое* решение u^f системы (5)–(7).

Согласно третьему представлению, имеем $W^T\mathscr{F}^T_3 \subset \operatorname{Dom} L_0^*$, так что оператор управления действует непрерывно из $\mathscr{F}^T_3$ в $\operatorname{Dom} L_0^*$ с нормой графика оператора L_0^*. Соответственно, для $f \in \mathscr{F}^T_3$ мы имеем $u^f(\cdot) \in L_\infty([0,T];\operatorname{Dom} L_0^*)$. Третье представление реализует разложение $\operatorname{Dom} L_0^* = \mathscr{K} \dotplus \operatorname{Dom} L$ для волн $u^f(t)$, см. (2).

4. *Оператор реакции* $R^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \mathscr{F}^T_3$,

$$(R^T f)(t) := \Gamma_2 u^f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

корректно определён в силу третьего представления в (10). Он описывает отклик системы α^T на воздействие управлений. Оператор R^T действует непрерывно из $\mathscr{F}^T_3$ в $L_\infty([0,T];\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}^T$.

5. Согласно теореме фон Неймана, оператор $C^T := W^{T\,*}W^T$ плотно определён и положителен (но не обязательно положительно определён) в $\mathscr{F}^T$, тогда как его замыкание (также обозначаемое через C^T) – самосопряженный оператор [6]. Он связывает метрики внешнего и внутреннего пространств равенствами

$$(C^T f, g)_{\mathscr{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathscr{H}} = (u^f(T), u^g(T))_{\mathscr{H}}, \qquad f, g \in \operatorname{Dom} C^T,$$

и называется *связывающим оператором.* В приложениях к обратным задачам ключевую роль играет следующий факт: имеет место соотношение

$$C^T \;=\; \frac{1}{2}\, S^{T\,*} R^{2T} J^{2T} S^T,$$

где $S^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^{2T}$ продолжает управления с $[0, T]$ на $[0, 2T]$ нечётным образом относительно $t = T$, а R^{2T} — оператор реакции системы α^{2T} [12, 13]. Таким образом, C^T выражается через оператор реакции, который играет роль данных в динамических обратных задачах.

6. Ещё одним атрибутом системы α^T является *оператор эйконала* $E^T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$,

$$E^T \;:=\; \int\limits_{[0,T]} s\, dP^s\,,$$

где P^s — ортогональный проектор в $\mathscr{H}$ (или в $\mathscr{U}^T$) на $\mathscr{U}^s$. Он играет важную роль в построении моделей системы α^T, см. [5].

§3. Подробнее об операторе реакции

Соотношения

$$\mathcal{T}^T_\sigma R^T \subset R^T \mathcal{T}^T_\sigma, \quad \sigma \in [0, T], \quad (J^T)^p R^T \subset R^T (J^T)^p, \quad p \geqslant 1, \qquad (12)$$

сразу следуют из равенств (11).

Далее мы используем оператор $Y^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{F}^T$, $(Y^T f)(t) := f(T - t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, который удовлетворяет условиям $Y^{T\,*} = (Y^T)^{-1} = Y^T$ и $(Y^T)^2 = \mathbb{I}_{\mathscr{F}^T}$. Отметим простое равенство $J^{T\,*} = Y^T J^T Y^T$ и напомним, что выполняется $\operatorname{Dom} R^T = \mathscr{F}^T_3$.

Мы используем следующие общие операторные соотношения и факты. Если C — замкнутый плотно определённый оператор, а B — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве, то выполняется $(BC)^* = C^* B^*$. Если, кроме того, CB плотно определён, то имеет место $(CB)^* = \overline{B^* C^*} \supset B^* C^*$. Запись $CB \supset BC$ означает, что $B \operatorname{Dom} C \subset$

$\operatorname{Dom} C$ и операторы CB и BC совпадают на $\operatorname{Dom} C$. В этом случае, если C плотно определён, то соотношение $B^*C^* \subset C^*B^*$ выполняется в указанном смысле.

Лемма 1. *Оператор R^T замыкаем. Его замыкание (также обозначаемое через R^T) удовлетворяет (12) и обладает свойствами:*

$$
\begin{array}{ll}
1)\ Y^T R^T \subset (Y^T R^T)^* = R^{T\,*} Y^T; & 2)\ \operatorname{Ker} R^T = \{0\}; \\
3)\ \overline{\operatorname{Ran} R^T} = \mathscr{F}^T; & 4)\ R^{T*}(J^{T*})^p \supset (J^{T\,*})^p R^{T*};\ p \geqslant 1; \\
5)\ \operatorname{Ker} R^{T\,*} = \{0\}; & 6)\ \overline{\operatorname{Ran} R^{T\,*}} = \mathscr{F}^T.
\end{array}
\tag{13}
$$

Доказательство. 1. Возьмем $f, g \in \mathscr{F}_3^T$. В силу инвариантности уравнения (5) относительно обращения времени $t \to -t$, используя (5)–(7), имеем:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^T dt\, \Big(u^f_{tt}(t) + L_0^* u^f(t),\, u^g(T-t)\Big) \\
&= \int_0^T dt\, \Big(u^f_{tt}(t),\, u^g(T-t)\Big)_{\mathscr{H}} + \int_0^T dt\, \big(L_0^* u^f(t),\, u^g(T-t)\big) \\
&= \Big[\Big(u^f_t(t),\, u^g(T-t)\Big) + \big(u^f(t),\, u^g_t(T-t)\big)\Big]\Big|_{t=0}^T \\
&\quad + \int_0^T dt\, \big(u^f(t),\, u^g_{tt}(T-t)\big) + \int_0^T dt\, \big(L_0^* u^f(t),\, u^g(T-t)\big) \\
&\overset{(4)}{=} \int_0^T dt\, \big(u^f(t),\, u^g_{tt}(T-t) + L_0^* u^g_{tt}(T-t)\big) \\
&\quad + \int_0^T dt\, \big[\big(\Gamma_1 u^f(t),\, \Gamma_2 u^g(T-t)\big) - \big(\Gamma_2 u^f(t),\, \Gamma_1 u^g(T-t)\big)\big] \\
&= \int_0^T dt\, \big[\big(f(t),\, (R^T g)(T-t)\big) - \big((R^T f)(t),\, g(T-t)\big)\big] \\
&= \big(f, Y^T R^T g\big)_{\mathscr{F}^T} - \big(R^T f, Y^T g\big)_{\mathscr{F}^T} = \big(f, Y^T R^T g\big)_{\mathscr{F}^T} - \big(Y^T R^T f, g\big)_{\mathscr{F}^T}
\end{aligned}
$$

в силу $(Y^T)^* = (Y^T)^{-1} = Y^T$. Следовательно, $Y^T R^T$ является симметрическим оператором, а R^T — замыкаемым, при этом выполняется $(Y^T R^T)^* = R^{T\,*} Y^T$, поскольку Y^T ограничен. Таким образом, пункт 1) доказан и влечет $R^T \subset Y^T R^{T\,*} Y^T$.

Соотношения (12) остаются справедливыми для замыкания R^T в силу непрерывности операторов $\mathcal{T}_s^T$ и J^T в $\mathscr{F}^T$.

2. Возьмем $f \in \operatorname{Ker} R^T$ и покажем, что $f=0$.

Для $g := (J^T)^3 f \in \mathscr{F}_3^T$ имеем $R^T g = R^T (J^T)^3 f \overset{(12)}{=} (J^T)^3 R^T f = 0$, так что $g \in \operatorname{Ker} R^T$. Тогда, взяв $h \in \mathscr{K}$, получим:

$$\begin{aligned}(u^g(t),h)'' = ((u^g(t))'',h) = -(L_0^* u^g(t),h) &\overset{(4)}{=} -(\Gamma_1 u^g(t),\Gamma_2 h)\\ &+ (\Gamma_2 u^g(t),\Gamma_1 h) = -(g(t),0) - ((R^T g)(t),h)\\ &= -((R^T g)(t),h) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.\end{aligned}$$

Интегрируя по времени с нулевыми данными Коши (6), получаем:

$$(u^g(t),h) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{14}$$

это означает, что u^g эволюционирует в подпространстве $\mathscr{K}^\perp := \mathscr{H} \ominus \mathscr{K}$.

В то же время, из (10) имеем:

$$0 = (R^T g)(t) = \Gamma_2 u^g(t) = \Gamma_2[-g(t) + L^{-1}(Ig)(t)] = \Gamma_2 L^{-1}(Ig)(t),$$

$0 \leqslant t \leqslant T$, где Ig обозначает третий интеграл в (10). Следовательно, получаем $\Gamma_2 L^{-1}(Ig)(t) = \Gamma_1 L^{-1}(Ig)(t) \overset{(3)}{=} 0$, и волна u^g представляется в виде

$$u^g(t) = -g(t) + y(t); \quad g(t) \in \mathscr{K}, \;\; y(t) \in \operatorname{Ker}\Gamma_1 \cap \operatorname{Ker}\Gamma_2 = \operatorname{Dom} L_0,$$

так что выполняется $u^g(t) \in \operatorname{Dom} L_K$, см. (3). Вместе с (14) это означает, что $u^g(t) \in \mathscr{K}^\perp$, и, следовательно, $L_0^* u^g(t) = L_K' u^g(t)$. В результате для u^g уравнение (5) принимает вид $(u^g)'' + L_K' u^g = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с самосопряжённым положительно определённым оператором L_K'. Тогда имеем

$$u^g(t) = \cos[t(L_K')^{\frac12}]u^g(0) + (L_K')^{-\frac12}\sin[t(L_K')^{\frac12}](u^g)'(0) \overset{(6)}{=} 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Как следствие, получаем $g(t) = \Gamma_1 u^g(t) = 0$ для каждого $t \in [0,T]$. Вспоминая, что $g = (J^T)^3 f$, приходим к равенству $f = g''' = 0$. Таким образом, пункт 2) доказан, а из пункта 2) следует пункт 6).

3. Соотношение 4) следует из (12). Обозначив $\tilde R^T := Y^T R^{T\,*} Y^T$, с помощью равенства $Y^T J^T = J^{T\,*} Y^T$ получаем:

$$\begin{aligned}\tilde R^T J^T = Y^T R^{T\,*} Y^T J^T = Y^T R^{T\,*} J^{T\,*} Y^T &\overset{4)}{\supset} Y^T J^{T\,*} R^{T\,*} Y^T\\ &= J^T Y^T R^{T\,*} Y^T = J^T \tilde R^T,\end{aligned}$$

так что выполняется $(J^T)^p \tilde R^T \subset \tilde R^T (J^T)^p$. В то же время, из 1) имеем $R^T \subset \tilde R^T$. Последнее, вместе с условием $(J^T)^3 \mathscr{F}^T = \mathscr{F}_3^T \subset \operatorname{Dom} R^T$,

приводит к
$$(J^T)^3\tilde{R}^T \subset \tilde{R}^T(J^T)^3 = R^T(J^T)^3.$$
Следовательно, из $f \in \operatorname{Ker}\tilde{R}^T$ вытекает $(J^T)^3 f \in \operatorname{Ker} R^T \overset{2)}{=} \{0\}$, откуда $(J^T)^3 f = 0$, и тогда $f = 0$. Таким образом, выполняется $\operatorname{Ker}\tilde{R}^T = \{0\}$. По определению $\tilde{R}^T$ имеем $\operatorname{Ker} R^{T\,*} = Y^T \operatorname{Ker}\tilde{R}^T = \{0\}$, что доказывает пункты 5) и 3). □

Равенство $\operatorname{Ker} R^T = \{0\}$ может быть интерпретировано как отсутствие «чёрных дыр» в классе систем α^T: нулевой отклик системы на вход (управление) возможен тогда и только тогда, когда входной сигнал равен нулю.

Определим $\varkappa_h^T \in \mathscr{F}^T$ формулой $\varkappa_h^T(t) := (T-t)h,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть P^T — ортогональный проектор в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{U}^T$.

Лемма 2. *Пусть $h \in \mathscr{K}$ и $P^T h \in \operatorname{Dom} W^{T\,*}$. Тогда выполняются соотношения $\varkappa_h^T \in \operatorname{Dom} R^{T\,*}$ и $W^{T\,*}P^T h = -\,R^{T\,*}\varkappa_h^T$.*

Доказательство. Взяв допустимый $h \in \mathscr{K}$ и $f \in \mathscr{F}_3^T$, имеем для $t \leqslant T$:
$$(u^f(t), P^T h) = (P^T u^f(t), h) = (u^f(t), h),$$
и тогда
$$\begin{aligned}(u^f(t), P^T h)'' = ((u^f(t))'', h) = -(L_0^* u^f(t), h)^{(4)} = -(\Gamma_1 u^f(t), \Gamma_2 h)\\ + (\Gamma_2 u^f(t), \Gamma_1 h) = -(f(t), 0) - ((R^T f)(t), h) = -((R^T f)(t), h),\\ 0 \leqslant t \leqslant T.\end{aligned}$$
Интегрируя по времени с учётом (6), получаем
$$(u^f(T), P^T h) = -\int_0^T (T-t)\,((R^T f)(t), h)_{\mathscr{H}}\, dt = -(R^T f, \varkappa_h^T)_{\mathscr{F}^T}.$$
В то же время, равенство $(u^f(T), P^T h) = (W^T f, P^T h)_{\mathscr{H}}$ приводит к $(W^T f, P^T h)_{\mathscr{H}} = -(R^T f, \varkappa_h^T)_{\mathscr{F}^T}$ и влечёт равенство $(R^T f, \varkappa_h^T)_{\mathscr{F}^T} = -(f, W^{T\,*}P^T h)_{\mathscr{F}^T}$. В силу произвольности f мы приходим к утверждению леммы. □

Отметим, что предположения доказанной леммы выполнены, если W^T (и, следовательно, $W^{T\,*}$) является ограниченным оператором. Более того, если W^T — изоморфизм (т. е. ограниченный и ограниченно обратимый оператор), то полагая $f_h^T := (W^T)^{-1}P^T h$ и вспоминая, что $W^{T\,*}W^T = C^T$, получаем соотношение

$$C^T f_h^T = -R^{T\,*}\varkappa_h^T,$$

которое играет ключевую роль в приложениях к обратным задачам и является абстрактной версией уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко [13, 14].

Для $s \in [0,T]$ определим $\varkappa_h^{T,s} \in \mathscr{F}^T$ формулой

$$\varkappa_h^{T,s}(t) \;:=\; (\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}\varkappa_h^T)(t) = \begin{cases}(s-t)h, & 0 \leqslant t \leqslant s,\\ 0, & s < t \leqslant T,\end{cases}$$

(кратко: $\varkappa_h^{T,s}(t) = (s-t)_+ h$) и введём линеал

$$\mathscr{L}^T \;:=\; \operatorname{span}\{\varkappa_h^{T,s} \mid h \in \mathscr{K},\;\; s \in [0,T]\} \,\subset \mathscr{F}^T.$$

Лемма 3. *Если $P^T\mathscr{K} \subset \operatorname{Dom} W^{T\,*}$, то $\mathscr{L}^T \subset \operatorname{Dom} R^{T\,*}$.*

Доказательство. Действительно, в силу ограниченности оператора задержки $\mathcal{T}_\sigma^T$ и того, что $\mathscr{F}_3^T \subset \operatorname{Dom}(R^T\mathcal{T}_\sigma^T)$ плотно, имеем

$$R^{T\,*}\mathcal{T}_\sigma^{T\,*} = (\mathcal{T}_\sigma^T R^T)^* \overset{(12)}{\supset} (R^T\mathcal{T}_\sigma^T)^* \supset \mathcal{T}_\sigma^{T\,*}R^{T\,*}.$$

Полагая $\sigma = T-s$, получаем $R^{T\,*}\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*} \supset \mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}R^{T\,*}$. Последнее влечёт $\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}R^{T\,*}\varkappa_h^T = R^{T\,*}\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}\varkappa_h^T$. Это означает, что

$$\varkappa_h^{T,s} = T_{T-s}^{T\,*}\varkappa_h^T \in \operatorname{Dom} R^{T\,*}$$

и выполняется

$$R^{T*}\varkappa_h^{T,s} = \mathcal{T}_{T-s}^{T*}R^{T*}\varkappa_h^T \overset{\text{лемма 2}}{=} -\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}W^{T\,*}P^T h,\;\; s\in[0,T],\;\; h\in\mathscr{K}. \quad (15)$$

Затем $R^{T\,*}$ продолжается на $\mathscr{L}^T$ по линейности. □

Напомним, что P^s – проектор в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{U}^s$, и предположим, что $P^s h \in \operatorname{Dom} W^{T\,*}$ для всех s (что имеет место, если W^T ограничен). Тогда соотношение (15) может быть записано в виде

$$\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}W^{T\,*}P^s h = -R^{T\,*}\varkappa_h^{T,s}, \quad s \in [0,T], \quad h \in \mathscr{K}. \qquad (16)$$

Действительно, взяв произвольный $f \in \dot{\mathscr{F}}^T$, имеем $\mathcal{T}_{T-s}^T f \in \mathscr{F}^{T,s}$, что влечёт $W^T\mathcal{T}_{T-s}^T f \in \mathscr{U}^s$, и, следовательно, выполняется

$$(P^T - P^s)W^T\mathcal{T}_{T-s}^T f = 0.$$

Поэтому для $h \in \mathscr{K}$ получаем

$$0 = ((P^T - P^s)W^T \mathcal{T}^T_{T-s} f, h)_{\mathscr{H}} = (f, \mathcal{T}^{T\,*}_{T-s} W^{T\,*}(P^T - P^s)h)_{\mathscr{F}^T}.$$

Из последнего следует, что $\mathcal{T}^{T\,*}_{T-s} W^{T\,*} P^T h = \mathcal{T}^{T\,*}_{T-s} W^{T\,*} P^s h$, а вместе с (15) это дает (16).

Положим $\tilde{\mathscr{F}}^T_1 := Y^T \mathscr{F}^T_1$ и $\|f\|_{\tilde{\mathscr{F}}^T_1} = \|Y^T f\|_{\mathscr{F}^T_1}$. По определению $\varkappa^{T,s}_h$ и в силу равенства

$$\|\varkappa^{T,s}_h\|^2_{\tilde{\mathscr{F}}^T_1} = \int\limits_0^T \|(\varkappa^{T,s}_h)'(t)\|^2_{\mathscr{H}}\, dt = s\|h\|^2_{\mathscr{H}}$$

соотношение (16) легко приводит к оценке

$$\frac{\|R^{T\,*} \varkappa^{T,s}_h\|_{\mathscr{F}^T}}{\|\varkappa^{T,s}_h\|_{\tilde{\mathscr{F}}^T_1}} \leqslant \|W^T\| \frac{\|P^s h\|_{\mathscr{H}}}{s^{1/2}\|h\|_{\mathscr{H}}}.$$

Если правая часть ограничена, то $R^{T\,*}$ может быть продолжен до ограниченного оператора из $\tilde{\mathscr{F}}^T_1$ в $\mathscr{F}^T$. В этом случае, согласно пункту 1) в (13), R^T также оказывается ограниченным оператором из $\tilde{\mathscr{F}}^T_1$ в $\mathscr{F}^T$. Такая ситуация имеет место в некоторых приложениях.

Ещё одно свойство оператора реакции заключается в следующем.

Лемма 4. *Если* $P^T \mathscr{K} \subset \operatorname{Dom} W^{T\,*}$, *то* $\overline{R^{T\,*} \mathscr{L}^T} = \mathscr{F}^T$.

Доказательство. 1. Как и в доказательстве леммы 1, мы используем оператор $\tilde{R}^T = Y^T R^{T\,*} Y^T \supset R^T$, который является замкнутым. Обозначим

$$\mathscr{L}^T_p := (J^{T\,*})^p \mathscr{L}^T, \quad \tilde{\mathscr{L}}^T := Y^T \mathscr{L}^T, \quad \tilde{\mathscr{L}}^T_p := (J^T)^p \tilde{\mathscr{L}}^T = Y^T \tilde{\mathscr{L}}^T_p.$$

Линеал $\tilde{\mathscr{L}}^T$ (так же как и $\mathscr{L}^T$) плотен в $\mathscr{F}^T$, а $\tilde{\mathscr{L}}^T_p$ плотен в $\mathscr{F}^T_{p+1}$. В частности, линеал $\tilde{\mathscr{L}}^T_2$ плотен в $\mathscr{F}^T_3$. Таким образом, $\tilde{R}^T \tilde{\mathscr{L}}^T_2 \subset R^T \mathscr{F}^T_3$. Кроме того, поскольку $R^T \restriction \mathscr{F}^T_3$ ограничен как оператор из $\mathscr{F}^T_3$ в $\mathscr{F}^T$, замыкание $R^T \restriction \tilde{\mathscr{L}}^T_2$ как такого оператора (соответствующего замыканию его графика в $\mathscr{F}^T_3 \times \mathscr{F}^T$) совпадает с $R^T \restriction \mathscr{F}^T_3$. Тогда $\overline{\tilde{R}^T \tilde{\mathscr{L}}^T_2} = \overline{R^T \mathscr{F}^T_3} = \overline{\operatorname{Ran} R^T} = \mathscr{F}^T$ согласно пункту 3) из (13). Следовательно,

$$\overline{R^T \mathscr{L}^T_2} = \mathscr{F}^T. \tag{17}$$

2. Возьмем $g\perp R^{T\,*}\mathscr{L}^T$ и покажем, что $g\perp R^{T\,*}\mathscr{L}_2^T$. Для любых $s\in[0,T]$ и $h\in\mathscr{K}$ имеем:

$$\begin{aligned}0&=(g,R^{T\,*}\varkappa_h^{T,s})=(g,R^{T\,*}\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}\varkappa_h^T)\overset{(12)}{=}(g,\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}R^{T\,*}\varkappa_h^T)\\&=(\mathcal{T}_{T-s}^{T}g,R^{T\,*}\varkappa_h^T)=(g(\cdot\,-\,(T-s)),R^{T\,*}\varkappa_h^T).\end{aligned}$$

Интегрирование по s дает:

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\sigma ds\,(g(\cdot\,-\,(T-s)),R^{T\,*}\varkappa_h^T)_{\mathscr{F}^T}\\&=\int_0^\sigma ds\int_0^T dt\,\big(g(t-(T-s)),(R^{T\,*}\varkappa_h^T)(t)\big)_{\mathscr{K}}\\&=\int_0^T dt\int_0^\sigma ds\,\big(g(t-T+s),(R^{T\,*}\varkappa_h^T)(t)\big)_{\mathscr{K}}\\&=\int_0^T dt\left(\int_{t-T}^{t-T+\sigma}g(\tau)\,d\tau,(R^{T\,*}\varkappa_h^T)(t)\right)_{\mathscr{K}}\\&=\int_0^T dt\left(\int_0^{t-(T-\sigma)}g(\tau)\,d\tau,(R^{T\,*}\varkappa_h^T)(t)\right)_{\mathscr{K}}=\big(\mathcal{T}_{T-\sigma}^T J^T g,R^{T\,*}\varkappa_h^T\big)_{\mathscr{F}^T}\\&=\big(g,J^{T\,*}\mathcal{T}_{T-\sigma}^{T\,*}R^{T\,*}\varkappa_h^T\big)\overset{(12)}{=}\big(g,R^{T\,*}J^{T\,*}\mathcal{T}_{T-\sigma}^{T\,*}\varkappa_h^T\big)\\&=\Big(g,R^{T\,*}J^{T\,*}\varkappa_h^{T,\sigma}\Big),\qquad\sigma\in[0,T],\end{aligned}$$

где $J^{T\,*}\varkappa_h^{T,\sigma}\in\mathscr{L}_1^T$. В силу произвольности σ и h получаем $g\perp R^{T\,*}\mathscr{L}_1^T$.

Таким же образом, используя коммутацию $J^{T\,*}$ и $\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}$, можно показать, что $(g(\cdot\,-\,(T-s)),R^{T\,*}J^{T\,*}\varkappa_h^T)=(g,R^{T\,*}J^{T\,*}\varkappa_h^{T,s})=0$. Интегрируя $\int_0^s(\cdot)\,d\sigma$, мы легко приходим к равенству

$$\Big(g,R^{T\,*}(J^{T\,*})^2\varkappa_h^{T,s}\Big)=0,\quad s\in[0,T],\quad h\in\mathscr{K},$$

что означает $g\perp R^{T\,*}\mathscr{L}_2^T$. Из (17) следует, что $g=0$. □

§4. Гипотеза

Согласно лемме 4 и (16) мы имеем

$$\overline{\{\mathcal{T}_{T-s}^{T\,*}W^{T\,*}P^s h\mid s\in[0,T],\ h\in\mathscr{K}\}}=\mathscr{F}^T.\qquad(18)$$

Если W^T является изоморфизмом между $\mathscr{F}^T$ и $\mathscr{U}^T$, то гипотетическое соотношение

$$\overline{\{W^{T\,*}P^s h \mid s\in[0,T],\ h\in\mathscr{K}\}} \overset{?}{=} \mathscr{F}^T$$

означало бы, что линеал

$$\mathscr{P}^T := \{P^s h \mid s\in[0,T],\ h\in\mathscr{K}\}$$

плотен в $\mathscr{U}^T$, т. е. ядро $\mathscr{K}$ является порождающим подпространством для семейства проекторов $\{P^s\}_{s\in[0,T]}$ или, что эквивалентно, для оператора эйконала $E^T=\int_{[0,T]} s\,dP^s$.

Гипотеза 1. *Соотношение* (18) *влечёт* $\overline{\mathscr{P}^T}=\mathscr{U}^T$ *для всех* $T>0$.

Отметим, что в важных приложениях такое порождающее свойство действительно имеет место [1, 15].

Другой взгляд на проблему состоит в следующем. Пусть W^T — изоморфизм; обозначим $f^s_h := (W^T)^{-1}P^s h \in \mathscr{F}^{T,s}$, так что выполняется $W^{T\,*}W^T f^s_h = C^T f^s_h = C^T\mathcal{T}^T_{T-s}\tilde f^s_h$ с $\tilde f^s_h := \mathcal{T}^{T\,*}_{T-s} f^s_h$. Тогда согласно (16) мы имеем семейство редуцированных уравнений Гельфанда – Левитана–Крейна–Марченко

$$C^{T,s}\tilde f^s_h = -R^{T\,*}\varkappa^{T,s}_h, \qquad s\in[0,T], \tag{19}$$

где $C^{T,s} := \mathcal{T}^{T\,*}_{T-s}C^T\mathcal{T}^T_{T-s}$ действует в $\mathscr{F}^T\ominus\mathscr{F}^{T,s}$. Решая (19) и возвращаясь к $f^s_h=\mathcal{T}^T_{T-s}\tilde f^s_h$, мы получаем линеал

$$\mathscr{Q}^T := \{f^s_h \mid s\in[0,T],\ h\in\mathscr{K}\}\subset\mathscr{F}^T.$$

Если W^T является изоморфизмом, то порождающее свойство ядра $\mathscr{K}$ равносильно плотности линеала $\mathscr{Q}^T$ в $\mathscr{F}^T$, вопрос о которой остается открытым.

Список литературы

1. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* — Препринт ЛОМИ П-1-90 (1990).
2. М. И. Белишев, *Распространение волн в абстрактной динамической системе с граничным управлением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **521** (2023), 8–32.
3. М. И. Белишев, М. Н. Демченко, *Динамическая система с граничным управлением, связанная с симметрическим полуограниченным оператором.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **409** (2012), 17–39.

4. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Об эволюционной динамической системе первого порядка с граничным управлением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **483** (2019), 41–54.
5. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Треугольная факторизация и функциональные модели операторов и систем.* — Алгебра и анализ, **36** (2024) 5, 101–127.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* Ленинград, Изд-во ЛГУ (1980).
7. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.* — Тр. Моск. матем. об-ва, **1** (1952), 187–246.
8. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и краевые задачи.* Киев, Труды института математики НАН Украины (2017).
9. М. Г. Крейн, *Теория самосопряжённых расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения. I.* — Матем. сб., **20(62)**, вып. 3 (1947) 431–495.
10. М. Г. Крейн, *Теория самосопряжённых расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения. II.* — Матем. сб., **21(63)**, вып. 2 (1947) 365–404.
11. М. М. Маламуд, *К теории Бирмана–Крейна–Вишика.* — Доклады РАН. Математика, **509** (2023) 54–59.
12. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems, **13(5)** (1997) 1–45.
13. M. I. Belishev, *Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data.* — Inverse Problems, **17** (2001), 659–682.
14. M. I. Belishev, V. S. Mikhailov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems, **20(4)** (2012), 461–488.
15. M. I. Belishev, S. A. Simonov, *A model and characterization of a class of symmetric semibounded operators.* To appear in J. Operator Theory, arXiv:2504.01000v1.

Belishev M. I., Simonov S. A. Abstract dynamical system with boundary control. IV.

The paper continues the study of the general properties of evolutionary dynamical systems of the type

$$\begin{aligned} &u''(t) + L_0^* u(t) = 0 && \text{in } \mathscr{H}, \ \ t \in (0,T), \\ &u(0) = u'(0) = 0 && \text{in } \mathscr{H}, \\ &\Gamma_1 u(t) = f(t) && \text{in } \mathscr{K}, \ \ t \in [0,T], \end{aligned}$$

where $\mathscr{H}$ is a Hilbert space, L_0 is a positive-definite symmetric operator in $\mathscr{H}$, $\Gamma_1 : \operatorname{Dom} L_0^* \to \mathscr{K} := \operatorname{Ker} L_0^*$ is one of the boundary operators from the Green formula $(L_0^* u, v) - (u, L_0^* v) = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v) - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)$, $f = f(t)$ is a $\mathscr{K}$-valued function of time (boundary control), $u = u^f(t)$ is the solution (trajectory), which is an $\mathscr{H}$-valued function of time. Compared

to previous works on this topic, the novelty lies in the properties of the response operator $R^T : f \mapsto \Gamma_2 u^f(\cdot)$, which acts in $\mathscr{F}^T := L_2([0,T];\mathscr{K})$ on a relevant $\operatorname{Dom} R^T$.

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института им. В.А. Стеклова,
наб. р. Фонтанки, д. 27, Санкт-Петербург
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 5 октября 2025 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического Института им. В.А. Стеклова,
наб. р. Фонтанки, д. 27, Санкт-Петербург;
Академический университет им. Ж. И. Алферова,
Хлопина 8А, Санкт-Петербург;
Институт математики, Университет ИТМО,
Кронверкский пр., д. 49, лит. А, Санкт-Петербург
E-mail: sergey.a.simonov@gmail.com