Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 541, 2025 г.

М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Введение

• Треугольная факторизация (ТФ) операторов является классическим инструментом решения обратных задач анализа и математической физики (М. Г. Крейн, В. А. Марченко, И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Л. Д. Фаддеев, Р. Ньютон и др.). Метод граничного управления [9, 3, 10] в обратных задачах – один из подходов, использующих ТФ. Этот метод (точнее, его динамическая версия) обеспечивает оптимальное по времени восстановление параметров, многообразий и метрик. В настоящий момент не известны результаты о его устойчивости, то есть о непрерывности соответствия между данными обратных задач и восстанавливаемыми объектами. Возможный подход к её исследованию – анализ устойчивости ТФ. Этот путь сталкивается со значительными препятствиями в случае, когда факторизуемый оператор не является изоморфизмом. В приложениях последнее типично для многомерных обратных задач и отражает их сильную некорректность.

Хотя мотивация исходит из конкретных обратных задач, мы изучаем устойчивость ТФ на общем операторном уровне. В то же время мы надеемся, что полученные результаты и их дальнейшее развитие окажутся полезными для приложений.

• Если не оговорено иное, мы имеем дело с ограниченными операторами.

Пусть $\mathfrak{f} = \{\mathscr{F}_s\}_{s\in[0,T]}$ – *гнездо* в гильбертовом пространстве $\mathscr{F}$, т.е. расширяющееся семейство подпространств [8, 11] [1]. Пусть X_s – (ортогональный) проектор в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}_s$. С учетом возможных будущих приложений, мы предполагаем, что гнездо $\mathfrak{f}$ непрерывно и окаймлено,

---

Ключевые слова: треугольная факторизация, операторная диагональ, амплитудный интеграл, каноническая факторизация, устойчивость канонической факторизации.

[1]в отечественной литературе употребляется термин *цепочка* [8]

т.е. выполнены условия

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_{s'},\ 0 \leqslant s < s' \leqslant T; \quad \text{s-}\lim_{s' \to s} X_{s'} = X_s; \quad \mathscr{F}_0 = \{0\},\ \mathscr{F}_T = \mathscr{F}. \tag{1}$$

Пусть C – положительный оператор в $\mathscr{F}$, т.е. $(Cf, f) > 0$ для всех $f \neq 0$. Представление

$$C = V^*V \quad \text{при условии} \quad VX_s = X_s V X_s, \quad s \in [0, T]$$

(эквивалентно $V\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_s$) называется *треугольной факторизацией* (ТФ) оператора C относительно гнезда $\mathfrak{f}$. Факторизация *устойчива*, если из $C^\alpha \underset{\alpha \to \infty}{\to} C$ и $C^\alpha = V^{\alpha *} V^\alpha$ следует $V^\alpha \to V$ (при соответствующем понимании сходимостей). Если C имеет вид $C = \mathbb{I} + K$ с компактным K и является положительно определённым, т.е. выполняется $(Cf, f) \geqslant \gamma \|f\|^2$ с $\gamma > 0$, то ТФ реализуется классической конструкцией операторного интеграла треугольного усечения (М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [8]), которая обеспечивает устойчивую (так называемую *специальную*) факторизацию $C = (\mathbb{I} + L)^*(\mathbb{I} + L)$ [8, 11].

В то же время, существует другая конструкция (*амплитудный интеграл*, АИ), обобщающая конструкцию Бродского на более широкий класс факторизуемых операторов и обеспечивающая их каноническую ТФ [1, 4]. Для факторизации с помощью АИ оператор не обязан быть положительно определённым (изоморфизмом). Однако возникает вопрос: является ли факторизация, доставляемая АИ, устойчивой? Мы показываем, что при определённых дополнительных предположениях относительно C^α и C ответ утвердительный.

• Ключевым элементом АИ является *диагональ* оператора. Для оператора W и гнезда $\mathfrak{f}$ она определяется как

$$D_W = \text{w-}\lim_{r \to 0} \sum_{k=0}^{N} (P_{s_k} - P_{s_{k-1}})\, W\, (X_{s_k} - X_{s_{k-1}}) =: \int_{[0,T]} dP_s\, W\, dX_s, \tag{2}$$

где $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = T$ — разбиение отрезка $[0, T]$ ранга r, а X_s и P_s суть проекторы в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}_s$ и $\overline{W\mathscr{F}_s}$ соответственно. Предел, если он существует, называется диагональю оператора W относительно гнезда $\mathfrak{f}$. Диагональ сплетает проекторы:

$$D_W X_s = P_s D_W, \qquad D_W^* P_s = X_s D_W^*. \tag{3}$$

Мы говорим, что положительный оператор C допускает *каноническую* ТФ относительно гнезда $\mathfrak{f}$, если его (положительный) квадратный корень имеет диагональ $D_{\sqrt{C}}$, которая удовлетворяет условию $D_{\sqrt{C}}\, D^*_{\sqrt{C}} = \mathbb{I}$, и справедливо представление

$$C = V^*V, \qquad V = D^*_{\sqrt{C}}\, \sqrt{C} \tag{4}$$

с множителем V, удовлетворяющим условию $VX_s = X_sVX_s$ в силу (3). Такое понятие мотивировано приложениями [9, 10, 6, 7].

• Наш основной результат – Теорема 1, которая устанавливает устойчивость канонической ТФ следующим образом.

Определение 1. *В обозначениях из* (2)*, мы говорим, что* W^α *сходится к* W *регулярно на гнезде* $\mathfrak{f}$*, если соотношения* $\operatorname{s-}\lim\limits_{\alpha\to\infty} W^\alpha = W$ *и* $\operatorname{s-}\lim\limits_{\alpha\to\infty} P^\alpha_s = P_s$ *выполняются для всех* $s \in [0, T]$*. В этом случае мы пишем* $W^\alpha \overset{\mathrm{reg}}{\to} W$.

В конце статьи, в разделе "Комментарии", приведены примеры, которые подкрепляют и мотивируют введение такого типа сходимости.

Теорема 1. *Пусть* $C^\alpha \overset{\mathrm{s}}{\to} C$*, операторы* C *и* C^α *допускают каноническую ТФ* (4) *и при этом выполнено* $\sqrt{C^\alpha} \overset{\mathrm{reg}}{\to} \sqrt{C}$*. Пусть интегральные суммы, определяющие* $D_{\sqrt{C}}$ *и* $D_{\sqrt{C^\alpha}}$ *согласно* (2)*, сходятся к своим* (*слабым*) *пределам равномерно по* α*. Тогда имеет место сходимость треугольных факторов* $V^\alpha \overset{\mathrm{w}}{\to} V$.

Ее доказательству предшествуют соответствующие предварительные сведения. Подчеркнем, что C и C^α предполагаются положительными, но не обязательно положительно определенными.

• На эвристическом уровне АИ и диагональ были введены в [1]. Впоследствии его конструкция была строго обоснована и развита [4, 9, 6]; была осознана его связь с классическим интегралом треугольного усечения [2, 5][2].

Авторы признательны С. А. Симонову за полезное обсуждение результатов работы.

[2]В статье [5] по вине первого автора содержится ошибочное утверждение (Предложение 2.6)

§2. Каноническая ТФ и её устойчивость

Треугольность. Итак, мы имеем дело с гильбертовым пространством $\mathscr{F}$ и семейством его (замкнутых) подпространств $\mathfrak{f} = \{\mathscr{F}_s\}_{s\in[0,T]}$, которое является *гнездом*: см. (1). Оператор V в $\mathscr{F}$ называется *треугольным* (относительно гнезда $\mathfrak{f}$), если выполняется $V\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_s$ для всех s. Последнее эквивалентно условию $VX_s = X_sVX_s$.

Оператор C допускает треугольную факторизацию (относительно $\mathfrak{f}$), если существует треугольный оператор V, такой что $C = V^*V$. Это, конечно, влечет $C \geqslant \mathbb{O}$. Такая факторизация не единственна: если оператор U треугольный и выполнено $U^*U = \mathbb{I}$, то UV также треугольный и факторизует C. Ниже определяется *канонический* фактор V.

Диагональ. В отличие от (2), здесь понятие диагонали вводится в более общей ситуации – для оператора, связывающего разные пространства. Обобщение мотивировано приложениями [10, 9, 4].

Пусть $\mathscr{H}$ – еще одно гильбертово пространство. Для оператора $W : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ подпространства $\overline{W\mathscr{F}_s}$, $s \in [0,T]$ образуют гнездо (но не обязательно непрерывное [6]). Через P_s мы обозначаем проекторы в $\mathscr{H}$ на $\overline{W\mathscr{F}_s}$. Зададим $T < \infty$ и выберем разбиение $\Xi = \{s_k\}_{k=0}^n :\quad 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T$ отрезка $[0,T]$, ранга $r^\Xi_W := \max\limits_{k=1,\dots,K}(s_k - s_{k-1})$. Обозначим $\Delta X_{s_k} := X_{s_k} - X_{s_{k-1}}$, $\Delta P_{s_k} := P_{s_k} - P_{s_{k-1}}$, и положим

$$D^\Xi_W := \sum_{k=1}^n \Delta P_{s_k}\, W\, \Delta X_{s_k}\,.$$

Определение 2. *Оператор*

$$D_W := \text{w-}\lim_{r^\Xi_W\to 0} D^\Xi_W = \int\limits_{[0,T]} dP_s\, W\, dX_s$$

называется диагональю оператора W относительно гнезда $\mathfrak{f}$.

Предел понимается по Риману: для произвольных $\varepsilon > 0$ и элементов $f \in \mathscr{F}$, $h \in \mathscr{H}$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\,([D_W - D^\Xi_W]f, h)\,| < \varepsilon$$

выполняется для любого разбиения Ξ ранга $r^\Xi < \delta$. Такой предел существует не всегда (А. Б. Пушницкий [5, 11]).

Диагональ сплетает гнезда: выполняются соотношения

$$D_WX_s = P_sD_W, \quad D^*_WP_s = X_sD^*_W, \qquad s \in [0,T] \tag{5}$$

Для сопряженного оператора имеем $D_W^* = \int_{[0,T]} dX_s W^* dP_s$, где интеграл сходится (или расходится) в том же смысле, что и для D_W. Справедливо соотношение $\|D_W\| \leqslant \|W\|$ [6].

Факторизация. В дальнейшем мы имеем дело с $\mathscr{H} = \mathscr{F}$. Пусть C – положительный оператор в $\mathscr{F}$. Пусть его положительный квадратный корень $\sqrt{C}$ имеет диагональ $D_{\sqrt{C}} = \int_{[0,T]} dP_s \sqrt{C}\, dX_s$, где P_s – проектор в $\mathscr{F}$ на $\overline{\sqrt{C}\mathscr{F}_s}$. Как легко видеть из (5), оператор $V := D^*_{\sqrt{C}} \sqrt{C}$ является треугольным: выполняется $V\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_s$. Если, кроме того, диагональ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Ran} D_{\sqrt{C}} = \mathscr{F}, \qquad D_{\sqrt{C}}\, D^*_{\sqrt{C}} = \mathbb{I}, \tag{6}$$

то ТФ

$$C = V^*V, \qquad V = D^*_{\sqrt{C}} \sqrt{C} \tag{7}$$

имеет место и называется *канонической.* Её особенность и преимущество заключается в том, что треугольный фактор V определяется конструктивно через факторизуемый оператор C [6]. Условия (6) мотивированы приложениями: они реализуются в многомерных обратных задачах [4, 9, 10].

Устойчивость. Докажем теорему 1.

Доказательство. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и $f, g \in \mathscr{F}$. Представим разность $V - V^\alpha$ в виде

$$\begin{aligned} V - V^\alpha &= D^*_{\sqrt{C}}\sqrt{C} - D^*_{\sqrt{C^\alpha}}\sqrt{C^\alpha} = (D^*_{\sqrt{C}} - D^{\Xi\,*}_{\sqrt{C}})\sqrt{C} \\ &- (D^*_{\sqrt{C^\alpha}} - D^{\Xi\,*}_{\sqrt{C^\alpha}})\sqrt{C^\alpha} + (D^{\Xi\,*}_{\sqrt{C}} - D^{\Xi\,*}_{\sqrt{C^\alpha}})\sqrt{C} + D^{\Xi\,*}_{\sqrt{C^\alpha}}(\sqrt{C} - \sqrt{C^\alpha}); \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} |([V - V^\alpha]f, g)| &\leqslant \Big|\Big(\sqrt{C}f, (D_{\sqrt{C}} - D^\Xi_{\sqrt{C}})g\Big)\Big| \\ &+ \Big|\Big(\sqrt{C^\alpha}f, (D_{\sqrt{C^\alpha}} - D^\Xi_{\sqrt{C^\alpha}})g\Big)\Big| \\ &+ \Big|\Big(\sqrt{C}f, (D^\Xi_{\sqrt{C}} - D^\Xi_{\sqrt{C^\alpha}})g\Big)\Big| \\ &+ \Big|\Big((\sqrt{C} - \sqrt{C^\alpha})f, D^\Xi_{\sqrt{C^\alpha}}g\Big)\Big| \\ &=: I + II + III + IV. \end{aligned}$$

Выбирая $r^\Xi < r$ для достаточно малого r, мы обеспечим $I < \frac{\varepsilon}{4}$ и $II < \frac{\varepsilon}{4}$ равномерно по α. В слагаемом III имеем

$$(D^\Xi_{\sqrt{C}} - D^\Xi_{\sqrt{C^\alpha}})\, g = \sum_{k=1}^{N} \left[\Delta P_{s_k}\sqrt{C} - \Delta P^\alpha_{s_k}\sqrt{C^\alpha}\right] \Delta X_{s_k} g$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[\left(P_{s_k}\sqrt{C} - P^\alpha_{s_k}\sqrt{C^\alpha}\right) - \left(P_{s_{k-1}}\sqrt{C} - P^\alpha_{s_{k-1}}\sqrt{C^\alpha}\right)\right] \widetilde{g}_k,$$

где $\widetilde{g}_k := \Delta X_{s_k} g = X_{s_k}\Delta X_{s_k} g \in X_{s_k}\mathscr{F}$. В силу последнего вложения, выполнены равенства

$$P_{s_k}\sqrt{C}\,\widetilde{g}_k = \sqrt{C}\,\widetilde{g}_k \quad \text{и} \quad P^\alpha_{s_k}\sqrt{C^\alpha}\,\widetilde{g}_k = \sqrt{C^\alpha}\,\widetilde{g}_k,$$

что влечет

$$III \leqslant \sum_{k=1}^{N} \left[\|(\sqrt{C} - \sqrt{C^\alpha})\,\widetilde{g}_k\| + \|(P_{s_{k-1}}\sqrt{C} - P^\alpha_{s_{k-1}}\sqrt{C^\alpha})\,\widetilde{g}_k\|\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Big[\|(\sqrt{C} - \sqrt{C^\alpha})\,\widetilde{g}_k\| + \|(P_{s_{k-1}} - P^\alpha_{s_{k-1}})$$

$$\times \sqrt{C} + P^\alpha_{s_{k-1}}(\sqrt{C} - \sqrt{C^\alpha})\,\widetilde{g}_k\|\Big]$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} \left[2\,\|(\sqrt{C} - \sqrt{C^\alpha})\,\widetilde{g}_k\| + \|(P_{s_{k-1}} - P^\alpha_{s_{k-1}})\sqrt{C}\,\widetilde{g}_k\|\right].$$

Поскольку $\sqrt{C^\alpha} \overset{\text{reg}}{\to} \sqrt{C}$ подразумевает $\sqrt{C^\alpha} \overset{\text{s}}{\to} \sqrt{C}$ и $P^\alpha_{s_{k-1}} \overset{\text{s}}{\to} P_{s_{k-1}}$, для достаточно больших α мы обеспечиваем $III, IV < \frac{\varepsilon}{4}$ и в итоге получаем $|([V - V^\alpha]f, g)| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, сходимость $V^\alpha \overset{\text{w}}{\to} V$ имеет место. $\square$

§3. Комментарии и примеры

• Понятие сходимости $\overset{\text{reg}}{\to}$ мотивировано следующим вопросом общего характера. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ – подпространство, W и W^α суть операторы в $\mathscr{H}$, и выполнено $W^\alpha \to W$ (в некоторой операторной топологии). Пусть P^α и P – проекции на $\overline{W^\alpha\mathscr{M}}$ и $\overline{W\mathscr{M}}$ соответственно. Гарантирована ли сходимость $P^\alpha \to P$? Очевидно, ответ отрицательный: например, $\alpha^{-1}\mathbb{I} =: W^\alpha \to W = \mathbb{O}$ по норме, но, взяв $\mathscr{M} = \mathscr{H}$, мы получим $\mathbb{I} = P^\alpha \not\to P = \mathbb{O}$. Приведённый ниже пример показывает, что положительность W^α и W не помогает. В такой ситуации важны и интересны достаточные (проверяемые в приложениях) условия на W^α, W и $\mathscr{M}$, обеспечивающие сходимость $P^\alpha \to P$.

• Приведем пример. Пусть $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$, $(\phi_k, \phi_l) = \delta_{kl}$ — базис в $\mathscr{H}$, $\mathscr{M} := \operatorname{span}\{\phi_k\}_{k=2}^\infty = \mathscr{H} \ominus \operatorname{span}\{\phi_1\}$. Определим W и W_n формулами

$$W\phi_k \;=\; \frac{1}{k}\,\phi_k, \qquad k \geqslant 1$$

и, для $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} W_n\phi_k = W\phi_k \;&=\; \frac{1}{k}\,\phi_k, \qquad k \neq 1,\, k \neq n,\\ W_n\phi_1 \;&=\; \phi_1 + \frac{1}{n}\,\phi_n,\\ W_n\phi_n \;&=\; \frac{1}{n}\,\phi_1 + \frac{2}{n^2}\,\phi_n, \end{aligned}$$

так что действие W отличается от действия W_n только на подпространстве $\operatorname{span}\{\phi_1, \phi_n\}$. В то же время, имеем $W^n \xrightarrow{\|\cdot\|} W$ при $n \to \infty$.

Возьмём $\psi_n := \phi_1 - \frac{n}{2}\,\phi_n$, $\|\psi_n\|^2 = 1 + \frac{n^2}{4}$, и пусть $\tilde\psi_n := \|\psi_n\|^{-1}\psi_n$. При этом $\tilde\psi_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$. Как легко проверить, для образов $\mathscr{M}$ и проекций на образы выполнено

$$W\mathscr{M} \;=\; \mathscr{M}, \qquad P = \mathbb{I} - (\cdot, \phi_1)\phi_1$$

и

$$W_n\mathscr{M} \;=\; \mathscr{H} \ominus \operatorname{span}\{\psi_n\}, \qquad P_n = \mathbb{I} - (\cdot, \tilde\psi_n)\tilde\psi_n\,.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем $P_n \xrightarrow{\mathrm{s}} \mathbb{I} \neq P$.

• Пусть C и C^α – *положительно определённые* операторы (изоморфизмы), допускающие каноническую ТФ, и пусть выполнено $\|C^\alpha - C\| \to 0$. Тогда имеет место сходимость $\sqrt{C^\alpha} \xrightarrow{\mathrm{reg}} \sqrt{C}$. Действительно, справедливо представление

$$P_s = \sqrt{C}\dot X_s \left(\dot X_s^* C \dot X_s\right)^{-1} \dot X_s^* \sqrt{C}, \qquad s \in [0, T],$$

где $\dot X_s$ – проектор X_s, рассматриваемый как оператор из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{F}_s$, так что $\dot X_s^*$ вкладывает $\mathscr{F}_s$ в $\mathscr{F}$, и выполняются соотношения $\dot X_s \dot X_s^* = \mathbb{I}_{\mathscr{F}_s}$,

$\dot{X}_s^* \dot{X}_s = X_s$. Для его проверки достаточно проверить характеристические свойства проектора P_s, а именно: $P_s^2 = P_s$, $P_s^* = P_s$ и $\operatorname{Ran} P_s = \mathscr{F}_s$. Представляя P_s^α таким же образом, легко заключить, что имеет место сильная сходимость $P_s^\alpha \to P_s$. Таким образом, регулярность сходимости $\sqrt{C^\alpha} \to \sqrt{C}$ на гнезде $\mathfrak{f}$ действительно имеется.

Как следствие, в случае $C = \mathbb{I} + K > \mathbb{O}$ с компактным K, каноническая ТФ (7) совпадает с классической специальной факторизацией Гохберга-Крейна и оказывается устойчивой.

• Рассмотрим ещё один случай. Пусть C и C^α допускают каноническую ТФ (4), и пусть интегральные суммы, определяющие $D_{\sqrt{C}}$ и $D_{\sqrt{C^\alpha}}$, сходятся равномерно по α. Пусть выполннены соотношения

$$\mathscr{F} = \oplus \sum_{l \geqslant 1} \mathscr{F}^l;\ F^l X_s = X_s F^l,\ F^l\, C^\alpha = C^\alpha F^l,\ F^l\, C = C F^l,\ s \in [0, T]$$

где F^l – проектор в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}^l$. Они означают, что C^α и C (и, следовательно, $\sqrt{C^\alpha}$ и $\sqrt{C}$) приводятся подпространствами (*каналами*) $\mathscr{F}^l$.

Предположим, что части опреаторов в каналах $C_l^\alpha := C^\alpha \restriction \mathscr{F}_l$ и $C_l := C \restriction \mathscr{F}_l$ являются изоморфизмами при всех l и удовлетворяют условиям Теоремы 1. Тогда в каждом канале имеем ТФ: $C_l^\alpha = V_l^{\alpha\,*} V_l^\alpha$, $C_l = V_l^* V_l$ и выполняется $V_l^\alpha \overset{\mathrm{w}}{\to} V_l$. В результате мы получаем факторизации $C^\alpha = V^{\alpha\,*} V^\alpha$, $C = V^* V$ и сходимость $V^\alpha \overset{\mathrm{w}}{\to} V$. В то же время, если нижние границы спектров C_l^α и C_l стремятся к нулю при $l \to \infty$, то ни C^α, ни C не являются изоморфизмами.

• Последний случай встречается в приложениях, но не слишком содержателен. Опуская детали, отметим, что он реализуется при определении потенциала в операторе Шрёдингера $-\Delta + q$ в шаре со сферически симметричным q. Важная нерешённая проблема – найти хотя бы достаточные условия, обеспечивающие $\sqrt{C^\alpha} \overset{\mathrm{reg}}{\to} \sqrt{C}$ и эффективно проверяемые в приложениях. Говоря об определения потенциала, мы имеем в виду случай произвольной области и q из достаточно представительного класса.

Список литературы

1. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* — Препринт ЛОМИ П-1-90 (1990).
2. М. И. Белишев, *О треугольной факторизации изоморфизмов.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **264** (2000), 33–43.

3. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий.* — Успехи математических наук, **72**, No. 4(436) (2017), 3–66.
4. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, **215** (1994), 9–37.
5. М. И. Белишев, А. Б. Пушницкий, *О треугольной факторизации положительных операторов.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ, *239* (1997), 45–60.
6. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Треугольные и функциональные модели операторов и систем.* — Алгебра и анализ, **36**, No. 5 (2024). `arXiv:2401.16054v1 [math-ph]` 29 Jan 2024.
7. М. И. Белишев, С. А. Симонов, *Модель и характеристика класса симметричных полуограниченных операторов.* — `arXiv:2504.01000v1 [math-ph]` 1 Apr 2025.
8. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория и применения вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Наука (1967).
9. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems, **13(5)** (1997), R1–R45.
10. M. I. Belishev, *New notions and constructions of the boundary control method.* — Inverse Problems and Imaging, **16**, No. 6 (2022), 1447–1471. `doi:10.3934/ipi.2022040`.
11. K. R. Davidson, *Nest algebras.* — Pitman Research Notes in Mathematics Series (1988). ISSN 0269-3674;191. ISBN 0-582-01993-1.

Belishhev M. I., Vakulenko A. F. On stability of triangular factorization of positive operators.

Let $\mathfrak{f} = \{\mathscr{F}_s\}_{s>0}$ be a nest and C a bounded positive operator in a Hilbert space $\mathscr{F}$. The representation $C = V^*V$ provided $V\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_s$ is a triangular factorization (TF) of C w.r.t. $\mathfrak{f}$. The factorization is stable if $C^\alpha \underset{\alpha\to\infty}{\to} C$ and $C^\alpha = V^{\alpha\,*}V^\alpha$ implies $V^\alpha \to V$. If C is positive definite (isomorphism), then TF is stable. The paper deals with the case of positive but not positive definite C. We impose some assumptions on C^α and C which provide the stability of TF.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург, Россия, 191023

E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 25 сентября 2025 г.