

В. А. Гаранин, К. К. Семенов

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Согласование результатов совместных измерений зависимых измеряемых величин – широко применяемая процедура в области обработки данных, выполняемая в киберфизических системах на производствах. В общем случае процедура согласования сводится к поиску оптимальных оценок значений совместно измеряемых величин, взаимосвязь между которыми известна (хотя бы неточно). Решение этой задачи эквивалентно кооптации всей доступной информации об измеряемых величинах и об объекте измерения или управления, осуществляемом киберфизической системой.

Цель согласования данных заключается в повышении точности получаемых результатов измерений и, следовательно, качества решений, принимаемых киберфизической системой на основе этих измерений. Для достижения этой цели необходимо использовать всю имеющуюся в наличии информацию, не только результаты прямых и/или косвенных измерений, выполняемых в измерительных каналах киберфизических систем: чаще всего используется априорная информация о зависимостях между измеряемыми величинами. Эти зависимости обычно определяются характеристиками и топологией используемой киберфизической системы и объекта, находящегося под ее контролем или наблюдением. Модель этих зависимостей может быть описана системами линейных и/или нелинейных уравнений, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, неравенств. Такие уравнения и неравенства задают ограничения, налагаемые на возможные решения задачи.

Ключевые слова: согласование данных, условная оптимизация, робастная статистика, непараметрическая статистика, повышение точности, обработка неточных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта #23-29-00694.

В англоязычной научной и научно-технической литературе сложился следующий терминологический консенсус: те алгоритмы, что используют в промышленности для математической обработки результатов измерений значений физических величин на сложных объектах, чьи значения взаимосвязаны, принято называть Industrial Process Data Reconciliation (то есть согласованием данных, получаемых в ходе производственных процессов) или – в случае необходимости использования сокращенного обозначения – Data Reconciliation (согласование данных).

В англоязычной периодике термин Data Reconciliation (согласование данных) является устоявшимся термином, при употреблении которого обычно отдельно не поясняется, о какого типа данных идет речь. В то же время в русскоязычных работах такой терминологический консенсус отсутствует. Чтобы избежать путаницы, отметим следующее: если речь идет о согласовании промышленных или индустриальных данных между собой, то под этим принято иметь в виду соответствующий комплекс операций и преобразований результатов измерений значений характеристик и параметров объекта измерений или технологического процесса, которые входят или напрямую выводятся из математической модели описания объекта или процесса. При этом упомянутая математическая модель существенным образом оказывается задействована в процессе согласования индустриальных данных между собой.

Говоря о согласовании данных, в зарубежной литературе часто подразумевают [1] целый комплекс операций по обработке данных: классификацию используемых при описании промышленного объекта переменных, поиск и исключение статистических выбросов, непосредственное согласование результатов измерений между собой. На Рис. 1 представлена блок-схема алгоритма обработки результатов измерений с использованием математической модели промышленного объекта. Здесь и далее подразумевается, что измерения проводятся совместно (одновременно), а при динамическом режиме измерений – последовательно в одни и те же моменты времени для разных физических величин.

На этапе классификации измеряемые величины делятся на *уточняемые* и *неуточняемые*, в зависимости от, соответственно, наличия или отсутствия избыточной информации, необходимой для достижения уточнения результатов измерения физических величин. Наличие модели объекта измерений не всегда подразумевает информационную

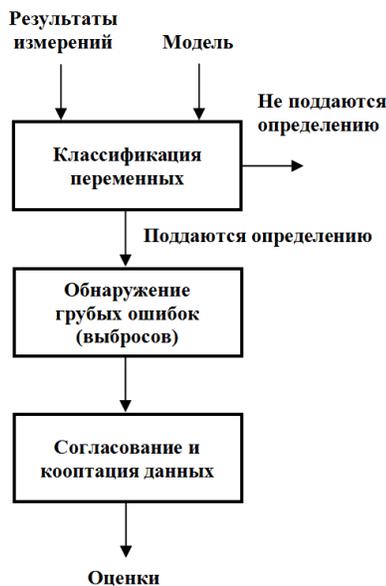


Рис. 1. Этапы обработки результатов измерений в задачах, подразумевающих согласование результатов совместных измерений (перевод работы [1]).

избыточность для всех измеряемых физических величин, необходимую для достижения уточнения: например, при косвенных и совокупных измерениях сопровождающие измерения математические выражения необходимы и достаточны лишь для получения той единственной оценки значения искомой величины, что и составляет сам результат измерения. Как следствие, множество всех согласуемых результатов измерений может содержать значения, уточнить которые за счет известных зависимостей не представляется возможным.

В свою очередь параметры модели подразделяют на те, что *можно оценить* за счет подстановки в модель имеющихся результатов измерений и те, что *нельзя оценить*. «Часто бывает, что некоторые переменные не могут быть измерены, так что их значения, при возможности, необходимо оценивать» [1], и в этом случае модель промышленного объекта измерения, равно как и результаты прямых измерений на нем, используется для косвенного оценивания значений этих переменных.

Все используемые при описании объекта переменные – измеряемые, известные априорно, либо неизвестные, – следует делить на *поддающиеся* определению и *неподдающиеся* определению через используемую модель. Фактически, речь идет о возможности либо невозможности измерить искомую величину косвенно. Очевидно, измерения величин, не поддающиеся определению через модель, в согласовании данных использованы быть не могут.

В англоязычной литературе после выполнения описанного анализа измерительной ситуации и после выделения переменных, поддающихся определению по модели, следует операция поиска и устранения/подавления грубых ошибок, иначе говоря – статистических выбросов. Данная операция критически необходима, так как на следующем этапе, то есть при согласовании результатов измерений между собой, аномально большие погрешности нераспознанных выбросов внесут искажения во все согласуемые данные, что приведет к огрублению, а не к уточнению согласуемых данных.

Кооптация данных напрямую связана с поиском и устранением грубых ошибок из массива результатов выполненных измерений. В ряде случаев удаление недостоверного результата измерения приводит к невозможности оценить искомую величину. Тогда исключаемый результат измерения заменяют на косвенную оценку, вычисленную по математической модели и на основании прочих, полагаемых достоверными, результатов измерений. Пусть, например, массив результатов измерений состоит из суточного расхода газовой смеси в ветвях разветвленного трубопровода, при этом один из расходомеров с очевидностью вышел из строя в процессе эксплуатации. Заменить показания неисправного датчика нечем – он был единственным на своем участке, однако искомый расход можно оценить из уравнений баланса и на основании результатов измерений, выполненных остальными расходомерами (то есть кооптацией).

Суть непосредственно операции согласования промышленных данных сводится к математическим преобразованиям полученных результатов совместных измерений, которые обеспечивают согласие с математической моделью объекта измерений или технологического процесса, на котором выполнялись соответствующие прямые измерения. При этом исторически при выполнении согласования точностные характеристики полученной количественной информации не принимались во

внимание, но в последнее время сложился консенсус, что соответствующие операции необходимо выполнять с учетом неопределенности полученных результатов измерений, которая, очевидно, сказывается на качестве конечных результатов. Отсутствие учета информации о предельно возможной погрешности выполненных измерений может даже привести к тому, что процедура согласования промышленных данных огрубит результаты измерений вместо уточнения, поскольку не будет известно, какие сведения следует учитывать в первую очередь как более точные, а значимость каких соответственно не очень велика.

Отметим, что в рамках практической реализации существующие на текущий момент методы согласования данных могут быть дополнены инструментами обеспечения метрологического автосопровождения производимых вычислений [2–4].

В данной работе впервые для русскоязычной литературы представлен весь спектр классических и неклассических методов и подходов к согласованию неточных данных, построенных на аналитическом решении задачи условной оптимизации в динамических и стационарных системах, – как параметрических, так и непараметрических, позволяющих учитывать отклонение закона распределения случайных погрешностей согласуемых результатов измерений от нормального.

§2. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ НЕТОЧНЫХ ИНДУСТРИАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Основными подходами к решению задачи согласования промышленных данных как способу повышения точности измерений за счет учета известных зависимостей между искомыми величинами, представленными в зарубежной литературе, являются следующие. Под согласованием результатов измерений за счет учета взаимосвязей между измеряемыми величинами подразумевают получение эффективных оценок их значений (в смысле обеспечения наименьшей дисперсии случайной погрешности оценок значений измеряемых величин), которые соответствуют принятым во внимание взаимозависимостям между ними. Ниже кратко изложена суть методов, применяемых в настоящее время для согласования измерительных данных в промышленности.

На рис. 2 представлена блок-схема, иллюстрирующая последовательность основных традиционных подходов к согласованию промышленных данных, отражающая их всё более нарастающую сложность

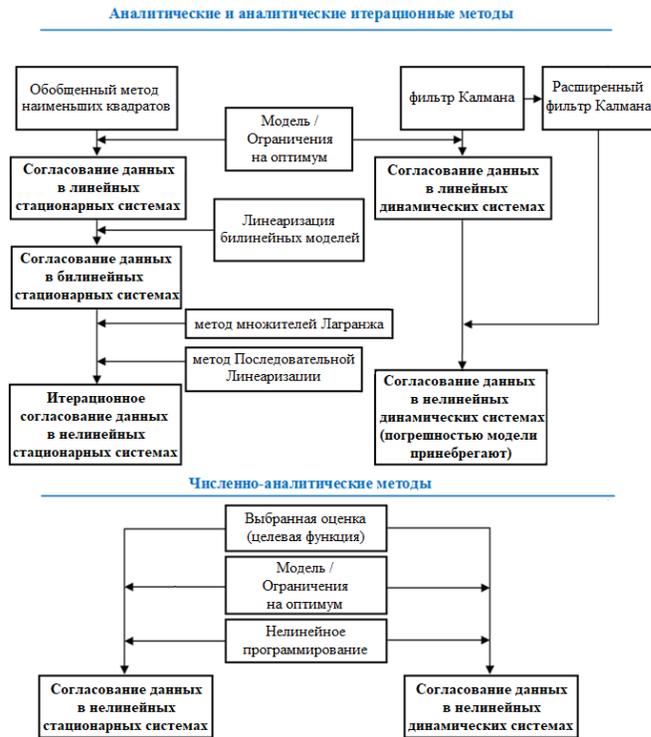


Рис. 2. Основные традиционные подходы к согласованию промышленных данных с точки зрения типа решаемой задачи и применяемых методов и алгоритмов.

(что коррелирует также с исторической последовательностью появления данных методов для решения индустриальных задач).

Исторически первым применением согласования результатов измерений для решения промышленной задачи является работа [5]. В данной статье, насколько можно судить, впервые представлено аналитическое решение задачи согласования, поставленной в предположении, что объект измерений может быть описан линейной стационарной системой и на нем напрямую измерены значения всех согласуемых величин. Математическое описание объекта измерений в упомянутой работе состояло из уравнений материального баланса для химических

производственных процессов. Аналитическое решение было получено в форме выражений обобщенного метода наименьших квадратов. В последующее десятилетие начатая в [5] работа была продолжена и дополнена в [6, 7]. Были предложены методики обработки промышленных данных для случаев, когда не все согласуемые значения измерены (речь идет по сути дела о классификации переменных, см. рис. 1). Были разработаны методики декомпозиции измерительной ситуации, допускающей согласование данных с использованием теории графов.

Упомянутый выше простейший метод согласования промышленных данных был впоследствии успешно перенесен также в информационные системы предприятий, осуществляющих обогащение минерального сырья. Перенос подхода был выполнен механически, поскольку использованные математические модели для таких предприятий также были основаны на уравнениях материального баланса. Наиболее показательными для описанного применения являются статьи [8–11]. Успешность применения новых методов, позволивших повысить качество измерительной информации, сопровождающей технологические процессы, привела к дальнейшему их распространению на промышленных предприятиях – в частности с середины 70-х гг. XX века начались работы по созданию и внедрению в производственные процессы предприятий добывающей и обрабатывающей промышленности программных средств, реализующих согласование данных [12].

В 1976 г. была опубликована работа [13], в которой в контексте задачи промышленного согласования данных были рассмотрены понятия наблюдаемости переменной (*observability*) и избыточности условий (*redundancy*) – речь при этом шла по-прежнему о решении линейной задачи. Для классификации переменных была использована теория графов; также авторами было выполнено моделирование процесса нефтепереработки, показавшее, что можно существенно повысить точность результатов выполняемых измерений за счет учета априорно известных зависимостей между измеряемыми величинами.

Проблемы классификации переменных [14–16] и идентификации статистических выбросов [17–27] были в значительной степени проработаны в период с начала 70-х и до конца 90-х гг. XX в. Подробный обзор и методологический анализ разработанных методов классификации переменных представлен в статьях [28–37].

В работе [37] впервые для согласования совместных измерений был применен итерационный подход [38]. Позднее был использован метод

последовательной линеаризации [39] (successive linearization) для согласования индустриальных данных, а также методика, основанная на матрице проекций [40] (matrix projection), для разделения исходной задачи обработки результатов измерений на две подзадачи: задачу согласования результатов измерений и задачу вычисления неизмеренных параметров модели объекта косвенным образом (так как последняя к согласованию отношения не имеет). Оба метода – итерационные и решают нелинейную задачу приближенно, причем получаемые оценки остаются несмещенными только в случае верности ряда допущений (например, о достаточно слабой нелинейности модели).

Универсальным инструментом для согласования результатов измерений в линейных и нелинейных системах в зарубежной научной литературе являются численные методы решения задачи условной оптимизации, в первую очередь включающие методы линейного, квадратичного, нелинейного программирования и соответствующие модификации. Главное преимущество подходов к согласованию, основанных на методах нелинейного программирования, – это возможность составить универсальный алгоритм согласования для произвольной модели зависимостей между измеряемыми величинами, в том числе – для математических моделей, включающих в себя неравенства.

В работе [41] впервые для задачи согласования индустриальных данных были использованы методы последовательного квадратичного программирования, модифицированные подпрограммами для обнаружения и устранения статистических выбросов в анализируемых совокупностях данных. Предложенные в [41] идеи нашли свое применение в работе [42], представляющей специальную (и первую в своем роде) программу RAGE, предназначенную для осуществления автоматического согласования результатов измерений с фильтрацией статистических выбросов. В последующем благодаря стремительному развитию информационных технологий программные продукты для промышленности получили самое широкое распространение [43–47]. Характерные примеры: использование программной среды STAN для согласования результатов измерений для поставленных нелинейных задач [48], использование среды SIGMAFINE для моделирования процесса согласования в стационарных системах [49], согласование результатов измерений в электросетях с помощью VALI [50]. Более полный список

Таблица 1. Программные инструменты, реализующие (в том числе) операции согласования промышленных данных и исключения статистических выбросов.

Название	Фирма-производитель
ADVISOR	Aspentech (USA)
Aspen Advisor	Aspen Technology Inc. (USA)
DATACON	Simulation Sciences (USA)
IOO	Louisiana State University (USA)
MASSBAL	Hyprotech (Canada)
RECON	Chemplant Technologies (Czech Rep.)
RECONCILER	Resolution Integration Solutions (USA)
Sigmafine	OSIsoft (USA)
SimSci DATACON	Schneider Electric Software (USA)
STAN	TU Wien (Austria)
PRODUCTION BALANCE	Honeywell (USA)
VALI	Belsim (Awans, Belgium)
VisualMesa	Soteica (USA)

разработанных к настоящему моменту программных продуктов, реализующих описываемые традиционные подходы к согласованию промышленных данных и удалению так называемых gross errors приведен в таблице 1. [51].

Отдельное направление в задаче согласования промышленных данных занимает решение данной задачи для динамических систем. Основные подходы, развиваемые в зарубежной научно-технической литературе, используют для решения не только численные методы. Так как эта задача схожа с задачей рекурсивной фильтрации, первоначально согласование результатов измерений зависимых величин выполнялось с использованием цифровой фильтрации – например, фильтра Калмана и его модификаций (extended Kalman filter – EKF) [52] в линейных и нелинейных системах соответственно. Данный подход сопряжен со следующими основными недостатками. Во-первых, при такой постановке не удаётся учесть налагаемые на результат оптимизации интервальные ограничения. Во-вторых, игнорируется возможная погрешность параметров модели; при этом, если полагать, что эти параметры известны точно, то тогда «результат Калмановской фильтрации эквивалентен результату согласованию данных» [53]. В-третьих, фильтрация будет

эффективной с точки зрения подавления случайного шума только в том случае, если закон распределения этого шума имеет нормальное распределение (так как целевой оптимизируемый функционал определяется исходя из предположения о нормальном законе). Схожие недостатки характерны для прочих нелинейных цифровых фильтров, применяемых для обработки результатов измерений зависимых величин (iterated EKF, Gaussian second-order filter).

Численный подход, свободный от необходимости разрешения аналитических выражений и их программирования, для решения задачи согласования в нелинейных динамических системах впервые был использован в [1] и [54]. Особенностью первой работы является то, что для повышения производительности оценка выполнялась не по всем доступным значениям временных рядов, а в пределах скользящего окна: «метод ортогональной коллокации (orthogonal collocation) был использован для представления дифференциальных уравнений в виде алгебраических равенств» [1]. Во второй работе был предложен метод SLHE (successively linearized horizon estimation), суть которого также сводится к отысканию условного оптимума целевого функционала средствами нелинейного программирования, при этом на каждой итерации нелинейные ограничения заменяются их линейными приближениями в области текущих значений подбираемых параметров целевого функционала. В последующие годы были предложены различные алгоритмы согласования результатов измерений в нелинейных системах, основанные на средствах нелинейной оптимизации.

Отметим предложенный в [55, 56] метод Error-in-Variables (по аналогии с Error-in-Variables models), позволяющий одновременно согласовать и оценить значения измеренных и неизмеренных величин с учетом всех погрешностей (результатов текущих измерений и априорной информации о параметрах модели промышленного объекта).

Из последующих важных работ, посвященных оценке параметров динамических систем средствами численной оптимизации для нужд согласования данных, стоит выделить следующие:

- согласование результатов измерений в динамических системах как решение задачи управления с прогнозирующей моделью [57] (model predictive control, MPC); методы условной оптимизации в скользящем временном окне (активно развиваемые в настоящий момент методы moving horizon) в контексте MPC;

- алгоритмы поиска глобального минимума с ограничениями, выраженными в виде нелинейных дифференциальных уравнений [58]: проблема отыскания глобального оптимума для них решается с применением двух основных подходов к работе с дифференциальными уравнениями — их коллокацией, то есть преобразованием в алгебраические уравнения посредством полиномиальной аппроксимации, — и их последовательном интегрировании;
- разработанная в [59] обобщенная теория методов условной оконной аппроксимации (constrained moving horizon estimation), включающая оптимизацию в нелинейных системах;
- методология согласования данных в химической промышленности с применением робастных оценок [60];
- алгоритм согласования данных в нелинейных динамических моделях, основанный на методе роя частиц [61] (particle swarm optimization) как альтернативе методу Гаусса–Ньютона;
- робастные методы согласования результатов измерений [62], в основе которых лежат различные варианты так называемых M-оценок (the Welsh, Quasi-Weighted Least Squares, Biweight, correntropy M-estimators).

Общим трендом зарубежных систем согласования промышленных данных является то, что со временем с развитием возможностей электронных вычислительных машин численная реализация согласования данных постепенно вытеснила аналитическую (с применением графовых подходов), хотя последние встречаются до сих пор. Численный подход имеет также дополнительное важное преимущество: на его основе возможно без затруднений реализовать большинство робастных оценок [62], в основе которых лежит известный принцип: оптимизируемый функционал (loss/cost/objective function) формулируется/настраивается таким образом, чтобы имеющиеся в данных неотфильтрованные выбросы как можно меньше влияли на результат согласования.

Другими актуальными направлениями в зарубежной научной литературе в области согласования промышленных данных являются применение методов непараметрической статистики (успешно применяются для решения задач схожей проблематики, например, в регрессионном анализе [63,64], при анализе независимых компонент) к задаче согласования данных, в том числе методов численной оптимизации на

p-box(-ax) [65], и разработка методик анализа экономической целесообразности имплементации алгоритмов согласования в промышленную систему [66–69].

В последнем случае речь идет о том, чтобы связать между собой три характеристики: информационную избыточность измерительной ситуации, стоимость создания и/или использования этой избыточности и степень повышения точности измерений, достигаемого за счет операции согласования.

§3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ДАННЫХ

Ниже представлена классическая математическая постановка задачи согласования индустриальных данных.

В общем виде задачу согласования данных обычно формулируют как задачу отыскания оценок \mathbf{x}^* и \mathbf{u}^* (при необходимости), соответствующих оптимуму

$$\arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} r(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

таких, что не противоречат заданным условиям:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x}^* \leq \mathbf{x}_{\max}, \quad \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}^* \leq \mathbf{u}_{\max},$$

где $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)^T$ – оценки искоемых измеряемых величин \mathbf{x} , $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_C^*)^T$ – оценки значений параметров \mathbf{u} математической модели объекта, известных с погрешностями

$$\zeta = (\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}), \quad \widehat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_C)^T$$

– неточно известные значения параметров модели, описывающей зависимости между величинами \mathbf{x} ; матрица $\widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{\mathbf{x}}_1, \widehat{\mathbf{x}}_2, \dots, \widehat{\mathbf{x}}_N)^T$ состоит из результатов многократных измерений, $\widehat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})^T$ – это вектор-столбец результатов измерений j -ой величины, $j=1, 2, \dots, N$, таких, что $\hat{x}_{ji} = x_j + e_{ji}$, e_{ji} – случайное отклонение результата i -го измерения j -ой величины с законом распределения $\Phi(\mathbf{0}, \boldsymbol{\theta}_e)$ с нулевым математическим ожиданием и параметрами $\boldsymbol{\theta}_e$, следовательно, $\widehat{\mathbf{x}} \sim \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x)$; аналогично, $\widehat{\mathbf{u}} \sim \varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}_u)$, если $\zeta \neq \mathbf{0}$; при однократном совместном измерении величин \mathbf{x} матрица $\widehat{\mathbf{X}}$ заменяется вектором $\widehat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$; r представляет собой некоторый функционал невязки, обычно определяемый из распределения вероятностей $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_x)$ результатов $\widehat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{1i}, \hat{x}_{2i}, \dots, \hat{x}_{Ni})$ совместного измерения величин \mathbf{x} либо из совместного распределения $\varphi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}_z)$, $\widehat{\mathbf{z}}_i = (\hat{x}_{1i}, \hat{x}_{2i}, \dots, \hat{x}_{Ni}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_C)$,

если значения параметров модели также подлежат согласованию; математическая модель объекта, на котором выполняются измерения, может включать в себя: систему алгебраических и (при необходимости) дифференциальных уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, пределы возможных значений \mathbf{x} , связанные с априорной информацией и/или погрешностями и \mathbf{u} , систему неравенств $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$.

В терминах математической статистики неопределенность значения \hat{z}_{ji} может быть охарактеризована соответствующей дисперсией $D[\hat{z}_{ji}] = \sigma_{\hat{z}_{ji}}^2$ либо ее оценкой $s_{\hat{z}_{ji}}^2$, выполненной по полученным результатам многократных измерений. В свою очередь, если принято, что $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{z}, \Sigma_z)$, то тогда неопределенность согласованных результатов \mathbf{z}^* зависит от содержимого ковариационной матрицы Σ_z или, что то же самое, $\Sigma_{(e, \zeta)}$ вектора случайных отклонений $(e_1, \dots, e_N, \zeta_1, \dots, \zeta_C)$. Обычно подразумевают, что корреляция между элементами векторов \mathbf{e} и ζ отсутствует, потому выражения для Σ_z (и, в частности, для Σ_x) принимают вид $\Sigma_z = f(\Sigma_e, \Sigma_\zeta)$. Функциональное преобразование f определяется оптимизируемым функционалом, методом отыскания оптимума и видом математической модели объекта, описывающей зависимости между согласуемыми величинами. Данное обстоятельство является основным допущением аналитического подхода к решению задачи согласования совместных измерений в линейной стационарной системе (наиболее классический случай).

3.1. Аналитические и аналитические итерационные методы.

Ниже описаны основные классические аналитические методы отыскания условного оптимума, традиционно используемые для решения задачи согласования результатов совместных измерений. Общий недостаток этих методов – невозможность учесть ограничения на возможные значения по типу неравенств.

Методы на основе символьного/аналитического дифференцирования предполагают следующее. Пусть требуется согласовать результаты совместного измерения величин x_1, x_2, \dots, x_N в стационарной системе, при этом функциональные связи между величинами описываются набором линейных уравнений вида

$$a_{1i} \cdot x_1 + a_{2i} \cdot x_2 + \dots + a_{Ni} \cdot x_N = b_i,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

где $\mathbf{a}_i^T = (a_{1i}, a_{2i} \dots a_{Ni})$ – вектор коэффициентов уравнения взаимосвязи, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2 \dots x_N)$ – вектор измеряемых величин.

Пусть параметры $\mathbf{u} = (\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \dots; \mathbf{a}_m, \mathbf{b})^T$ данной линейной модели не подлежат согласованию с результатами измерений $\hat{\mathbf{x}}^T = (\hat{x}_1, \hat{x}_2 \dots \hat{x}_N)$.

Если взаимосвязи между величинами x_1, x_2, \dots, x_N описываются системой из $m > 1$ линейных уравнений, причем коэффициенты этих уравнений известны с погрешностью $\mathbf{e}^T = (e_1, e_2, \dots, e_m)$, то тогда

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1 + \zeta_1, \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = b_2 + \zeta_2, \\ \dots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} = b_m + \zeta_m, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \zeta,$$

где матрица $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m)$ состоит из строк \mathbf{a}_i^T , $\mathbf{a} \mathbf{b}^T = (b_1, b_2 \dots b_m)$ и $\zeta^T = (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_m)$.

Пусть есть набор из n уравнений измерений, записанный в матричном виде

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{e},$$

где \mathbf{x} – как и прежде, вектор значений измеряемых величин, $\hat{\mathbf{x}}$ – вектор результатов измерений, \mathbf{e} – вектор погрешностей результатов измерений, \mathbf{B} – матрица размера $p \times N$, описывающая связь между значениями искомых величин \mathbf{x} и результатами их измерения $\hat{\mathbf{x}}$. Для случая прямых измерений \mathbf{B} – диагональная единичная матрица.

Подраумеется, что ковариационные матрицы Σ_ζ и Σ_e погрешностей результатов измерений e и погрешностей уравнений взаимосвязей ζ известны.

Рассмотрим систему уравнений измерения совместно с линейными уравнениями взаимосвязей [70]

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{e} \\ \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \zeta \end{cases}$$

единственное решение которой относительно вектора \mathbf{x} эквивалентно согласованию результатов измерений $\hat{\mathbf{x}}$ между собой на основании линейной модели взаимосвязей (1).

Для удобства введем дополнительные обозначения

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}; \varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \zeta \end{pmatrix}; \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}; \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_e & 0 \\ 0 & \Sigma_\zeta \end{pmatrix}.$$

В данных обозначениях система уравнений переписывается в виде:

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \varepsilon,$$

где размер векторов \mathbf{z} и ε равен $p + m$, размер матрицы \mathbf{G} равен $(p + m) \cdot N$, размер вектора \mathbf{x} прежний, равен N .

В соответствии с методом максимального правдоподобия оценка \mathbf{x}^* значений \mathbf{x} может быть определена через оптимизацию функционала, получаемого в предположении, что все рассматриваемые погрешности имеют нормальный закон распределения:

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{z}).$$

Производная по \mathbf{x} в этом выражении приравнивается к нулю. В итоге получается следующая формула для оценки значений измеряемых величин, учитывающая информацию о взаимосвязях между ними [70]:

$$\mathbf{x}^* = \left[\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_\zeta^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1} \left[\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_\zeta^{-1} \mathbf{b} \right]. \quad (2)$$

Ковариационная матрица оценки \mathbf{x}^* равна

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^*} = \left[\mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_\zeta^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1}.$$

Видно, что неопределенность оценок \mathbf{x}^* , выраженная с помощью ковариационной матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^*}$, определяется содержимым матриц $\boldsymbol{\Sigma}_e$ и $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$, то есть $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}^*} = f(\boldsymbol{\Sigma}_e, \boldsymbol{\Sigma}_\zeta)$.

Если погрешностью модели пренебрегают, то тогда ковариационная матрица $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta = \emptyset$, и решение (2) получено быть не может. В таком случае для отыскания оптимальных оценок \mathbf{x}^* используют метод множителей Лагранжа.

3.2. Подход на основе метода множителей Лагранжа. Пусть выполнены измерения в ситуации, аналогичной предыдущей: есть результаты измерений $\hat{\mathbf{x}}$, связанные с искомыми величинами \mathbf{x} системой уравнений

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{e};$$

функциональные связи между величинами \mathbf{x} описаны с помощью системы линейных уравнений

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \zeta. \quad (3)$$

Требуется найти согласованные оценки \mathbf{x}^* , не противоречащие математической модели (3). При этом коэффициенты a_{ji} матрицы \mathbf{A}

определены с точностью, достаточной, чтобы можно было утверждать, что $\zeta_j \ll e_j$ для любого j . Если вследствие этого принято, что $\zeta = \mathbf{0}$, то нет возможности построить матрицу Σ_ζ . Следовательно, упомянутое выражение не может быть использовано для получения уточняющей оценки \mathbf{x}^* .

Алгоритм нахождения согласованных оценок \mathbf{x}^* сводится к минимизации функционала

$$(\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \Sigma_e^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

в заданных условиях, осуществляемой методом множителей Лагранжа. Это приводит к необходимости отыскания безусловного минимума

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \Sigma_e^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \lambda^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \right\}$$

где λ – вектор неопределенных коэффициентов Лагранжа размерности m .

Продифференцировав минимизируемое выражение по \mathbf{x} и λ и приравняв результат к нулю, получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \Sigma_e \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \Sigma_e \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Отбросив нижнюю часть системы, определяющую значения λ , получим выражение для уточняющей оценки искомых величин [70]:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{D}\mathbf{F} - \mathbf{D}\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{F}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{b},$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1} \mathbf{B}$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \Sigma_e^{-1}$.

Ковариационная матрица такой оценки составляет

$$\Sigma_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{D}.$$

Так как обычно полагается $\Sigma_\zeta = \emptyset$ из условия независимости результатов выполняемых измерений, то в таких задачах $\Sigma_{\mathbf{x}^*} = f(\Sigma_e)$.

3.3. Итерационные методы с использованием последовательной локальной аппроксимации зависимостей между согласуемыми величинами. Один из классических подходов к согласованию результатов измерений нелинейно зависимых величин основан на замене исходного функционала, описывающего эти зависимости, линейным приближением в области согласуемых результатов измерений. Таким образом можно решить задачу условной оптимизации итерационно, без использования численных методов решения нелинейных уравнений.

Классическим примером такого рода подхода является работа [35], предлагающая приближенное решение задачи согласования данных в условии нелинейных ограничений, основанное на последовательной (локальной) линеаризации этих ограничений.

Запишем лагранжиан для решения задачи согласования результатов совместных измерений величин \mathbf{x} в условиях нелинейной стационарной системы:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где $(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ – минимизируемый функционал, полученный из совместного нормального распределения вероятностей результатов измерений $\hat{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ – ковариационная матрица вектора результатов измерений $\hat{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\lambda}^T$ – вектор множителей Лагранжа, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – нелинейный функционал, описывающий взаимосвязь между значениями измеряемых величин \mathbf{x} как $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Значения \mathbf{x} и \mathbf{u} , соответствующие экстремуму данного лагранжиана могут быть получены путем решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$ – матрицы Якоби ограничивающего функционала $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

В силу нелинейности $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ значения \mathbf{x} , \mathbf{u} из полученной системы в общем виде могут быть найдены только численными методами нелинейного программирования.

Пусть алгоритм решения системы уравнений (4)-(6) выполняется итерационно, при этом на итерации $k + 1$ вместо исходной нелинейной модели $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ используется линейное приближение в точке $\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k$ [35]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_k) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где k – номер итерации, а $\hat{\mathbf{x}}_k$ и $\hat{\mathbf{u}}_k$ – результаты согласования, полученные в результате предыдущей итерации под номером k .

Пользуясь данным приближением, получим выражения для оценки искомых величин \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y} - \Sigma(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k)^T \lambda_{k+1},$$

где λ_{k+1} есть решение системы линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k \Sigma(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k)^T & \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k \\ (\mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} \\ \hat{\mathbf{u}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k \hat{\mathbf{u}}_k - \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

В качестве первого приближения $\hat{\mathbf{x}}_k, k = 0$, используются согласуемые результаты измерений $\hat{\mathbf{x}}$, в качестве $\hat{\mathbf{u}}_k, k = 0$, подставляются априорные оценки значений \mathbf{u} . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения $\|\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_k\|$ и $\|\hat{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_k\|$ не окажутся меньше заданного допустимого отклонения результатов оптимизации на соседних шагах.

Общий недостаток [53] всех алгоритмов отыскания условного оптимума на основе метода множителей Лагранжа состоит в том, что происходит увеличение размерности задачи из-за введения вектора λ . Как следствие, для решения задачи требуется больше времени. Для упрощения/ускорения вычислений в той же работе [52] было предложено применять к исходному линейному приближению (7) метод исключения переменных Гаусса. Существуют методики согласования данных, не требующие составления лагранжиана и вычисления оценки вектора λ в рамках итерационного процесса [37, 38]:

$$\hat{\mathbf{u}}_{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_k - \left[(\mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k \right]^{-1} (\mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_k)), \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{y} - \Sigma(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k (\hat{\mathbf{u}}_{k+1} - \hat{\mathbf{u}}_k)),$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k \Sigma(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^k)^T$.

Возможно удерживать значения параметров \mathbf{u} без измерений до тех пор, пока итерационный алгоритм не сойдется к некоторым значениям \mathbf{x} , и только тогда выполнять переоценку $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_{k+1}$ по (8). Так при

большем объеме вычислений удастся получить более точные оценки величин \mathbf{x} и \mathbf{u} .

К недостаткам метода, разработанного в [38], можно отнести необходимость вычислять обратные матрицы для \mathbf{R} и $(\mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}_{\mathbf{u}}^k$, что не всегда возможно. Лишенный этого ограничения подход согласования данных впервые был предложен в работе [71] (в основе – техника вычисления матрицы проекций [14]).

3.4. Подходы на основе методов цифровой фильтрации. Как отмечалось выше, методы согласования данных в динамических системах обычно основаны на методах цифровой фильтрации, как правило, – на обычной и расширенной версиях фильтра Калмана. В случае с цифровой фильтрацией учет зависимостей между измеряемыми величинами, выраженных в виде неравенств, также невозможен.

Определим линейную дискретную модель динамической системы:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1},$$

где \mathbf{x}_k – вектор-столбец значений искомым совместно измеряемых величин $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ в k -ый момент времени, \mathbf{x}_{k-1} – вектор-столбец искомым величин \mathbf{x} в момент времени $k - 1$; \mathbf{A}_{k-1} – матрица размерностью $N \times N$ коэффициентов линейного преобразования над значениями \mathbf{x}_{k-1} ; \mathbf{B}_k – матрица размерностью $N \times C$ коэффициентов линейного преобразования над входными параметрами $\mathbf{u}_{k-1}^T = (u_1, u_2, \dots, u_C)$ дискретной модели динамической системы; вектор $\mathbf{w}_{k-1}^T = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ содержит случайные искажения модели в момент времени $k - 1$.

Система линейных уравнений измерений в матричном виде записывается как

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

где $\mathbf{y}_k^T = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор результатов совместного измерения искомым величин \mathbf{x} в момент времени k , \mathbf{H}_k – матрица коэффициентов линейного преобразования, претерпеваемого значениями \mathbf{x}_k в измерительном канале, $\mathbf{v}_k^T = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ – вектор случайных отклонений результатов \mathbf{y}_k от действительных значений $\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$.

Подразумевается, что $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{w(k)})$ и $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{v(k)})$ для любого k . Причем $Cov(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) = Cov(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = 0$ для $j > k$ и $Cov(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$.

Ковариационные матрицы случайных отклонений \mathbf{w}_k и \mathbf{v}_k обозначены как

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{w}_k) &= \mathbf{R}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{w(k)} = \boldsymbol{\Sigma}_w^k, \\ \text{Cov}(\mathbf{v}_k) &= \mathbf{Q}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{v(k)} = \boldsymbol{\Sigma}_v^k.\end{aligned}$$

Обозначим результат применения фильтра Калмана для k -го момента времени как $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$, где индекс j указывает на объем выборки $\mathbf{Y}_j = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_j)$ результатов совместных измерений, используемой для получения итоговой оценки.

Результатом согласования или, что то же самое, результатом фильтрации называют оценку $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, то есть такую, что $j = k$. В таком случае для уточнения текущего измерения \mathbf{y}_k используют все имеющиеся к моменту времени k результаты измерений $\mathbf{Y}_k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$ и вместе с ними – дискретную модель динамической системы. Оценку $\hat{\mathbf{x}}_{j|k}$ при $j > k$ называют предсказательной. При $j < k$ задача фильтрации преобразуется в задачу сглаживания.

Алгоритм вычисления результата фильтрации по Калману или согласованных оценок (что то же) в момент времени k состоит из нескольких последовательных шагов [53]:

– вычисления предсказательных оценок $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ с помощью дискретной модели динамического процесса и на основании результатов согласования $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ в предыдущий момент времени:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_{k-1},$$

– вычисления ковариационной матрицы предсказательных оценок:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{R}_k,$$

– вычисления матрицы оптимальных приращений:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{Q}_k)^{-1},$$

– согласования результатов совместных измерений \mathbf{y}_k , выполненных в k -ый момент времени, с предсказательными оценками $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ (согласованные оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ как средневзвешенное между $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ и \mathbf{y}_k):

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),$$

– вычисления ковариационной матрицы результатов согласования $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, необходимой для итерации $k+1$:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Алгоритм фильтрации Калмана (результат $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$) тождественен алгоритму согласования результатов измерений $\mathbf{Y}_k = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k)$

на момент времени k , если принять $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{0}$ [53]. То есть алгоритмы тождественны, если погрешность модели зависимостей между величинами \mathbf{x} не учитывается. Другими словами, расхождение между методами вызвано различием в способе учета неопределенности априорной информации о зависимостях между величинами, результаты измерения которых подлежат согласованию.

Расширенный фильтр Калмана представляет собой модификацию оригинального цифрового фильтра, пригодную для фильтрации/сглаживания/предсказания в нелинейных динамических системах.

Действительно, описанный выше алгоритм не может быть применен в том случае, если динамическая система описывается с помощью модели

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \dot{\beta},$$

где $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ – нелинейный функционал (в случае гибридного фильтра Калмана – это непрерывная во времени математическая модель состояния системы; здесь и далее точка над функцией означает непрерывность во времени); вектор β обозначает случайную погрешность модели вида $\dot{\beta} = \mathbf{w}(t)$ с нулевым математическим ожиданием и автокорреляционной функцией $\mathbf{R}(t)\delta(t - \tau)$, где $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция Дирака. То же касается уравнений измерений: если в выражении

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k,$$

функционал $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ – нелинейный, то тогда оригинальный алгоритм Калмана неприменим.

Один из способов решения этой проблемы – последовательная локальная аппроксимация нелинейных функционалов. Ключевая операция в данном подходе – взятие производных по \mathbf{x} от нелинейных функционалов $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$:

$$\mathbf{F}_{\tau|k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\tau, \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}},$$

где $\mathbf{F}_{\tau|k-1}$ – матрица Якоби функционала $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в момент времени $t = \tau$,

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}.$$

Данная операция производится следующей последовательностью действий:

– вычислением предсказательных оценок $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\tau|k-1} = \mathbf{f}(\tau, \widehat{\mathbf{x}}_{\tau|k-1}, \mathbf{u}_{k-1}),$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \dot{\mathbf{x}}_{\tau=kT|k-1},$$

где операция $\tau = kT$ обозначает переход от функций, непрерывных во времени, в дискретное пространство с шагом T ,

– вычислением ковариационной матрицы предсказательных оценок

$$\dot{\mathbf{P}}_{\tau|k-1} = \mathbf{F}_{\tau|k-1} \mathbf{P}_{\tau|k-1} + \mathbf{P}_{\tau|k-1} \mathbf{F}_{\tau|k-1}^T,$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \dot{\mathbf{P}}_{\tau=kT|k-1} + \mathbf{R}(t = kT),$$

– вычислением матрицы оптимальных приращений

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{Q}_k)^{-1},$$

– согласованием результатов совместных измерений \mathbf{y}_k с предсказательными оценками $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$:

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1})),$$

– вычислением ковариационной матрицы результатов согласования $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}$:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Ограничения для использования расширенного фильтра Калмана для задачи согласования данных проистекают из особенности его построения: локальная линеаризация допустима в том случае, если функционалы \mathbf{f} и \mathbf{h} не обладают высокой нелинейностью и если имеющиеся случайные погрешности невелики. Для фильтрации/согласования/предсказания в сильно нелинейных системах в [72] был разработан Unscented Kalman filter.

§4. СОГЛАСОВАНИЕ ДАННЫХ КАК ЗАДАЧА УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К основным преимуществам численных методов согласования над аналитическими в задачах согласования измерений относят:

- возможность построить универсальный алгоритм решения задачи для произвольных зависимостей между согласуемыми величинами, в том числе с ограничениями типа неравенств;
- возможность имплементировать в алгоритм согласования робастные М-оценки.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования – отыскания минимума

$$\min_{\mathbf{z}} r(\mathbf{z}, \widehat{\mathbf{z}})$$

с условиями

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0},$$

где z – некоторый функционал невязки между значениями согласуемых величин $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T$ и результатами $\widehat{\mathbf{x}}$ совместных измерений и оценками $\widehat{\mathbf{u}}$ параметров модели взаимосвязей, $\widehat{\mathbf{z}} = (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{u}})^T$; функционалы $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ и $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_k)^T$ описывают зависимости между согласуемыми величинами \mathbf{x} и ограничения, налагаемые на их возможные значения.

Для условной оптимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств используют обобщение Куна–Таккера метода множителей Лагранжа. Аналог лагранжиана в таком случае:

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = r(\mathbf{z}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{z}) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g}^T(\mathbf{z}) \boldsymbol{\mu}.$$

Решение задачи

$$\min_{\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}} L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \quad (9)$$

может быть получено из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla r(\mathbf{z}^*) + \mathbf{J}_f^T(\mathbf{z}^*) \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{J}_g^T(\mathbf{z}^*) \boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \leq \mathbf{0}, \\ g_j(\mathbf{z}^*) \mu_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ \boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (10)$$

где \mathbf{z}^* – искомые величины (результаты согласования измерений $\widehat{\mathbf{x}}$ и оценок параметров $\widehat{\mathbf{u}}$), $\nabla r(\mathbf{z}^*)$ – градиент функции r , $\mathbf{J}_f(\mathbf{z}^*)$ – матрица Якоби функционала \mathbf{f} , $\mathbf{J}_g(\mathbf{z}^*)$ – матрица Якоби функционала \mathbf{g} , а $\boldsymbol{\lambda}^*$ и $\boldsymbol{\mu}^*$ – вспомогательные множители (по аналогии с множителями Лагранжа), размерность векторов совпадает с размерностями \mathbf{f} и \mathbf{g} соответственно.

Таким образом, задача отыскания оптимума (9) сводится к задаче решения системы уравнений (10)

$$\nabla L(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{0},$$

при выполнении условий $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \leq \mathbf{0}$.

Задачу отыскания решения $\mathbf{t}^* = (\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ системы уравнений (10) – при выполнении заданных условий $\mathbf{g}(\mathbf{z}^*) \leq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}$, – можно свести

к отысканию неподвижной точки $\mathbf{t}^* = \varphi(\mathbf{t}^*)$ некоторого сжимающего отображения φ на пространстве $\mathbf{t} = (\mathbf{z}, \lambda, \mu)$.

В дискретном виде такое отображение записывают в виде:

$$\mathbf{t}_{i+1} = \mathbf{t}_i - \alpha_i \mathbf{d}_i,$$

где i – номер итерации процесса отыскания оптимума \mathbf{t}^* , α_i – коэффициент, определяющий длину шага в направлении координаты \mathbf{t}^* в пространстве \mathbf{t} , вектор \mathbf{d}_i размерностью $N+C$ указывает направление, обратное направлению поиска.

Способы определения α_i и \mathbf{d}_i зависят от выбранного метода численного решения системы (10). Например, для метода Ньютона:

$$\mathbf{d}_i = [H_L(\mathbf{t}_i)]^{-1} \nabla L(\mathbf{t}_i),$$

$$\alpha_i = 1,$$

$$\mathbf{t}_{i+1} = \mathbf{t}_i - [H_L(\mathbf{t}_i)]^{-1} \nabla L(\mathbf{t}_i),$$

где $\nabla L(\mathbf{t}_i)$ – градиент функции $L(\mathbf{t})$, H_L – Гессиян функции $L(\mathbf{t})$, $\alpha_i = 1$ для всех i .

В случае применения одного из методов численной оптимизации решается исходная задача оптимизации (9). Для методов градиентного спуска имеет место следующее отображение:

$$\mathbf{d}_i = \nabla L(\mathbf{t}_i), \quad \mathbf{t}_{i+1} = \mathbf{t}_i - \alpha_i \nabla L(\mathbf{t}_i),$$

где формат представления α_i зависит от выбранной модификации градиентного метода.

4.1. Робастная статистика в задаче согласования данных. Существующие методы построения робастных алгоритмов обработки и, в том числе, согласования неточных данных можно разделить на два типа:

- методы максимального правдоподобия (М-оценки),
- вариации ранговых/порядковых методов (R- и L-оценки).

Ранговые методы подразумевают представление исходной выборки в виде вариационного ряда и либо усечения этого ряда с двух сторон (отбрасываются элементы с наибольшими и наименьшими номерами-рангами), либо присвоения весового коэффициента каждому элементу ряда на основании его номера. Через эти коэффициенты, фактически, численно задается мера доверия элементам выборки. Как правило, чем дальше номер элемента отстоит от величины $[n/2]$, где n – число элементов в вариационном ряду результатов многократных измерений,

тем меньше к нему доверия – тем вероятнее, что перед нами статистический выброс.

К достоинствам порядковых и ранговых методов относят: непараметричность получаемых оценок и, безусловно, робастность. К недостаткам можно отнести негибкость таких методов – информация о виде закона распределения, если таковая имеется, не используется. Как следствие, все эти методы не позволяют получить эффективную оценку искомой величины.

M-оценки получили широкое распространение в последние десятилетия благодаря стремительному развитию вычислительной техники. Их суть состоит в следующем. Вместо того, чтобы исключать выбросы до процедуры согласования, в качестве функционала невязки $r()$, минимизируемого в рамках процедуры условной оптимизации, выбирается функция, характер которой позволяет уменьшить влияние далеко отстоящих от центра совокупности элементов на результат оптимизации. Вместо оценки, эффективной в условиях присутствия погрешности, распределённой по некоторому закону распределения, используют одну из альтернативных оценок, «обеспечивающую несмещенную оценку в условии отклонения действительного закона от выбранного идеального» [73]. Таким образом, подобный подход является параметрическим – априорные сведения о виде закона распределения погрешностей учитываются, однако вместо функционала невязки, получаемого методом максимального правдоподобия из предполагаемого закона распределения, используется некоторая модификация данного функционала.

В общем виде для произвольного закона распределения погрешностей согласуемых величин целевую функцию r в M-оценке записывают как [60]: $L = \sum_i r\left(\frac{\hat{z}_i - z_i}{\sigma_i}\right)$.

Если ожидается, что случайные отклонения согласуемых результатов измерений независимы и распределены по нормальному закону, то минимизируемый функционал вырождается в знакомую квадратичную форму:

$$r(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})$$

где Σ – диагональная ковариационная матрица вектора $\hat{\mathbf{z}}$. Получаемые таким образом M-оценки будут смещенными, если выборка включает недостоверные результаты измерений: смещение будет тем больше,

чем больше доля статистических выбросов в выборке. Используемые для построения робастных оценок r -функции приведены в таблице 2 [73]. Значения параметров данных функций, соответствующих относительной эффективности в 95 %, приведены в таблице 3 [73].

Таблица 2. Целевые функции робастных M -оценок.

тип M -оценки	r -функции
ОМНК	$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_i^2$
Коши	$c_C^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_i^2}{c_C^2} \right)$
Логистическая	$2 \cdot \ln \left(1 + \exp \left(\frac{\varepsilon_i}{c_{Lo}} \right) \right) - \frac{\varepsilon_i}{c_{Lo}}$
Лоренцова	$-\frac{1}{1 + \varepsilon_i^2 / 2 \cdot c_L^2}$
“Fair”	$2 \cdot c_F^2 \cdot \left[\frac{ \varepsilon_i }{c_F} - \ln \left(1 + \frac{ \varepsilon_i }{c_F} \right) \right]$
Восходящая M -оценка Хампелла	$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_i^2, 0 < \varepsilon_i \leq a_H,$ $a_H \cdot \varepsilon_i - \frac{1}{2} \cdot a_H^2, a_H < \varepsilon_i \leq b_H,$ $a_H \cdot b_H - \frac{a_H^2}{2} + (c_H - b_H) \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{c_H - \varepsilon_i }{c_H - b_H} \right)^2 \right],$ $b_H < \varepsilon_i \leq c_H,$ $a_H \cdot b_H - \frac{a_H^2}{2} + (c_H - b_H) \cdot \frac{a^2}{2}, c_H < \varepsilon_i $

Таблица 3. Параметры для различных функций r со значениями относительной эффективности 95 %.

тип M -оценщика	значения параметров
Коши	$c_C = 2,3849$
Логистическая	$c_{Lo} = 0,602$
Лоренцова	$c_L = 2,6$
“Fair”	$c_F = 1,3998$
восходящая M -оценка Хампелла	$a_H = 1,35, b_H = 2,7, c_H = 5,4$

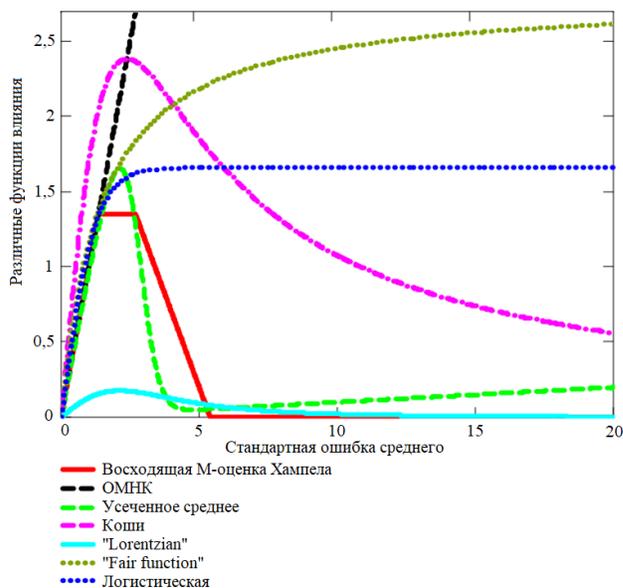


Рис. 3. Относительное влияние погрешности измерения на целевую функцию [60].

Общее свойство r -функций, на основе которых строятся оценки, устойчивые к выбросам, — нелинейная зависимость между значением функции влияния этих функций от меры неопределённости (дисперсии/среднеквадратического отклонения) согласуемых данных. Функцию влияния IF (influence function) определяют как [74]:

$$\text{IF}(\hat{\mathbf{z}}, T, \varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(\varphi_t) - T(\varphi)}{t} = \frac{\partial}{\partial t} [T(F_t)]|_{t=0},$$

где T — процедура оценки, φ — предполагаемая функция распределения, φ_t — искаженная функция распределения.

В качестве визуального пояснения на рис. 3 приведен сводный график [60] функций влияния различных r -функций.

Как видно из рис. 3, в случае обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК), эквивалентного оценке метода максимального правдоподобия в предположении нормального распределения случайных погрешностей, функция влияния пропорциональна погрешности

результата измерения, следовательно, данные методы не являются робастными: стандартное отклонение оценки методом максимального правдоподобия искомой величины пропорционально возрастает по мере отклонения действительного распределения от нормального. В случае применения функции r на основе «распределения Коши, Lorentzian-функции и восходящей M-оценки Хампела влияние выбросов снижается» [60] по мере увеличения их дисперсии. «Fair»-функция и функция r на основе логистического распределения ограничивают меру влияния элементов выборки, начиная с некоторого значения дисперсии, некоторой константой: «функция влияния медленно увеличивается по отношению к погрешности измерения, приближаясь к постоянному значению для больших значений погрешности» [60].

Существуют также методы борьбы со выбросами, основанные на последовательной проверке статистических гипотез о принадлежности каждого элемента имеющейся совокупности обрабатываемых данных. Как и в случае с робастными оценками, применение данных методов предполагает, что в целом случайные отклонения результатов измерений подчинены некоторому известному закону, а статистические выбросы рассматриваются как фактор, искажающий это распределение. То есть такие методы являются параметрическими. Данное обстоятельство ведет к очевидным проблемам: если исходный (до искажения) закон распределения погрешностей неизвестен либо определен неверно, то тогда, соответственно, методы на основе проверки статистических гипотез не могут быть применены либо их применение может привести к недостоверным результатам – неконтролируемому росту ошибок первого и второго рода.

Важнейшим обстоятельством представленного анализа классических методов согласования индустриальных данных является то, что их вывод и применение основаны на предположении о гауссовом характере распределения случайных погрешностей обрабатываемых результатов измерений. Исключением выступают методы, основанные на непараметрических оценках.

§5. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СОГЛАСОВАНИЕ ДАННЫХ

Основными подходами к получению согласованных оценок при законах распределения погрешностей, отличающихся от нормального, являются следующие:

- 1) использование приближений законов распределений на основе разложений в ряды с нормальным законом в качестве референса, коэффициенты которых зависят от основных числовых характеристик распределений (в качестве которых выступают либо моменты, либо кумулянты распределения),
- 2) использование коэффициентов отклонения плотности распределения от нормальности, интегрально связывающих отличия формы реального распределения от кривой Гаусса с основными характеристиками распределения,
- 3) использование оценок распределения, построенных целиком и полностью на выборочных данных на основе ядерных оценок или областей возможных значений функций распределений (p-boxes), без оценки частных числовых характеристик.

Данные подходы к непараметрическому согласованию данных предложены и исследованы авторами настоящей статьи в работах [75–78]. Все перечисленные выше пути распространения задачи согласования данных из класса задач с нормально распределенными случайными погрешностями к классу задач с квази-нормально распределенными погрешностями имеют свои преимущества и недостатки, сказывающиеся на областях применения этих подходов и качестве получаемых в конечном счете результатов.

Первый подход в представленном списке основан на использовании разложений плотностей распределения в ряды, сходимость и вид которых зависят от того, какие именно полиномы используются для построения разложения: в ряду Грама-Шарлье используются полиномы Эрмита в так называемой «вероятностной» постановке, в ряду Гаусса-Эрмита – функции Эрмита-Гаусса, в ряду Эджворта используется рекомбинация полиномов Эрмита, могут быть использованы разложения на системах ортогональных полиномов, что может обеспечить более высокую сходимость. Использование быстросходящихся рядов, безусловно, обеспечивает более низкую погрешность соответствия реальному распределению, но сопряжено с использованием в составе коэффициентов разложения в ряд моментов и кумулянт распределения высоких порядков, а выборочные оценки этих характеристик, как известно, сопряжены с большой статистической неопределенностью – тем более высокой, чем выше порядок момента или кумулянта (или, что то же, полу- или семиинварианта). Отмеченное обстоятельство

приводит к классической задаче оптимизации для построения компромиссного решения, отвечающего принципу минимума итоговой полной погрешности: в практике обработки результатов измерений сложилось консенсусное мнение о допустимости использования для подавляющего большинства задач только оценок первых четырех моментов или кумулянт (характеризуют математическое ожидание, дисперсию, коэффициент асимметрии и коэффициент эксцесса распределения), из которых старшие два описывают отличие формы плотности распределения от кривой Гаусса. Моменты более высоких порядков используются на практике редко.

Использование разложений плотностей распределения случайных погрешностей в ряды имеет ограничения: при больших отклонениях формы действительного распределения от гауссова обозначенные разложения в ряды могут начать расходиться, в этом случае упомянутое выше усечение рядов лишь до первых нескольких членов носит также и регуляризирующий характер и позволяет получить результат даже в таких условиях (но с меньшей эффективностью). Поскольку восстановление распределения по оцененным выборочным моментам является некорректной задачей, то данное решение (использование усеченных рядов) обеспечивает достижение отмеченного выше минимума суммарной погрешности.

Второй из рассматриваемых подходов обеспечивает равноценное описание отклонений распределения случайной погрешности от нормальности, в общем случае содержащее также два коэффициента, которые позволяют описать как асимметрию распределения, так и поведение унимодального распределения около его пика. Суть данного подхода заключается в том, что строятся оптимальные (обычно линейные) приближения к унимодальной функции плотности распределения по обе стороны от его вершины, в ней сходящиеся к друг другу.

Ограничением данного подхода является предположение об унимодальности распределения случайных погрешностей, что хоть и является частой ситуацией на практике, тем не менее реализуется в действительности не всегда.

5.1. Полунапараметрический подход на основе полиномиальной аппроксимации. Данный подход предполагает приближение отклонений закона распределения случайных погрешностей от гауссового с помощью полиномиальных аппроксимаций (в базовой постановке

– в линейном приближении, отдельном для каждого из хвостов распределения).

Пусть результаты измерений значений величин x_j возмущены погрешностями, имеющими случайный характер и подчиняющимися распределениям $\varphi_j(t)$, близким к нормальному.

Рассмотрим задачу уточнения результатов измерений в случае, если функции f_1, f_2, \dots, f_m системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \end{cases}$$

определяющих математическую модель, которой подчиняются измеряемые величины, известны. Пусть выполнено n независимых многократных измерений значений величин x_j и получены результаты \hat{x}_{ji} , $i = 1, \dots, n$, образующие вектора $\hat{\mathbf{x}}_i^T = (\hat{x}_{i1}, \hat{x}_{i2}, \dots, \hat{x}_{iN})$, которые составляют матрицу $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)$.

Результаты измерений имеют вид

$$\hat{x}_{ji} = \mu_{1j} + \varepsilon_{ji},$$

где ε_{ji} – случайная погрешность, имеющая вне зависимости от индекса j распределение $\varphi_j(t_j)$. Пусть математические ожидания погрешностей ε_{ji} равны нулю, а среднеквадратические отклонения – σ_j .

Пусть $\varphi_j(t_j)$ мало отличаются от нормального закона распределения. Представим их в виде:

$$\sigma_j \cdot \varphi_j(\sigma_j t_j + \mu_{1j}) = \varphi_0(t_j) \cdot (1 + \alpha_j(t_j)),$$

где $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ – стандартный нормальный закон распределения, а α_j – функции малых отклонений от стандартного нормального распределения, $|\alpha_j(t)| \ll 1$, $j = 1, 2, \dots, N$ для всех $t_j = (\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j$.

В результате многократных независимых измерений получим величины x_{ji} , имеющие многомерное распределение

$$P(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}) = \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2}} \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right).$$

Тогда логарифмическая функция правдоподобия примет вид

$$\begin{aligned}
l(\widehat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2}} \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right) \right) \\
&= -n \sum_{j=1}^N \ln(\sigma_j \sqrt{2\pi}) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right).
\end{aligned}$$

Максимум функции правдоподобия при оценке значения μ_{1j} находится при том же значении, что и минимум выражения

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right),$$

следовательно, оценка действительных значений \mathbf{x} может быть определена как

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_1^* &= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}_1} r(\boldsymbol{\mu}_1, \widehat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\sigma}) \\
&= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}_1} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся методом множителя Лагранжа, чтобы учесть в оптимизационной задаче взаимосвязи между измеряемыми величинами.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(\widehat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 r(\widehat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(\boldsymbol{\mu}_1),$$

где в качестве условий φ_k выступают m уравнений взаимосвязи, а $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – множители Лагранжа.

Если у функции Лагранжа есть экстремумы, то ее минимальное значение может достигаться в одном из них. Необходимое условие экстремума функции L может быть записано в виде системы уравнений, представляющих собой частные производные по \mathbf{x} и $\boldsymbol{\lambda}$, приравненные к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\widehat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mu_{1j}} = 0, & j = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial L(\widehat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_k} = 0, & k = 1, \dots, m, \end{cases}$$

После дифференцирования получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{1i}}{\sigma_1^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_1((\hat{x}_{1i} - \mu_{11})/\sigma_1)/\partial \mu_{11}}{1 + \alpha_1((\hat{x}_{1i} - x_1)/\sigma_1)} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{11}} = 0, \\ \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{2i}}{\sigma_2^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_2((\hat{x}_{2i} - \mu_{12})/\sigma_2)/\partial \mu_{12}}{1 + \alpha_2((\hat{x}_{2i} - x_2)/\sigma_2)} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{12}} = 0, \\ \dots \\ \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{1N}}{\sigma_N^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\hat{x}_{Ni}}{\sigma_N^2} - \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N})/\sigma_N)/\partial \mu_{1N}}{1 + \alpha_N((\hat{x}_{Ni} - x_N)/\sigma_N)} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{1N}} = 0, \\ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{x}_{ji} - x_j)^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \alpha_j \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right) \right) = 0, \\ f_1(\boldsymbol{\mu}_1) = 0, \\ f_2(\boldsymbol{\mu}_1) = 0, \\ \dots \\ f_m(\boldsymbol{\mu}_1) = 0. \end{array} \right.$$

Все возможные решения данной системы уравнений можно разделить на две группы: при $\lambda_0 = 0$ и при $\lambda_0 \neq 0$.

Первая группа корней тривиальна и не обеспечивает глобального оптимума φ_0 . В соответствии с принципом Лагранжа точкой условного экстремума функции L будет решение данной системы уравнений при ненулевом векторе λ . Для оценки экстремума множитель λ_0 можно принять равным произвольной отличающейся от нуля константе.

Пусть $\lambda_0 = 1$. Кроме того, введем обозначения

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij},$$

и, так как $|\alpha_j(t)| \ll 1$, примем

$$\frac{\partial \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j)/\partial \mu_{1j}}{1 + \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j)} \approx \partial \alpha_j((\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j)/\partial \mu_{1j}.$$

В этом случае система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} - \frac{\bar{x}_1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_1 ((\hat{x}_{1i} - \mu_{11}) / \sigma_1) / \partial \mu_{11} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{11}} = 0, \\ \frac{\mu_{12}}{\sigma_2^2} - \frac{\bar{x}_2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_2 ((\hat{x}_{2i} - \mu_{12}) / \sigma_2) / \partial \mu_{12} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{12}} = 0, \\ \dots \\ \frac{\mu_{1N}}{\sigma_N^2} - \frac{\bar{x}_N}{\sigma_N^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_N ((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N}) / \sigma_N) / \partial \mu_{1N} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{1N}} = 0, \\ f_1(\boldsymbol{\mu}_1) = 0, \\ f_2(\boldsymbol{\mu}_1) = 0, \\ \dots \\ f_m(\boldsymbol{\mu}_1) = 0. \end{array} \right.$$

или, в матричном виде,

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{-1} \boldsymbol{\mu}_1 - S^{-1} \bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\mu}_1, \hat{\mathbf{X}}) + \frac{1}{n} \mathbf{J}_f(\boldsymbol{\mu}_1) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_1) = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

где $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)^T$ – вектор среднеарифметических значений результатов измерений величин x_j ,

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_N^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\mu}_1, \hat{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_1 ((\hat{x}_{1i} - \mu_{11}) / \sigma_1) / \partial \mu_{11} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_2 ((\hat{x}_{2i} - \mu_{12}) / \sigma_2) / \partial \mu_{12} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \partial \alpha_N ((\hat{x}_{Ni} - \mu_{1N}) / \sigma_N) / \partial \mu_{1N} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_f(\boldsymbol{\mu}_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{11}} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{11}} & \dots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{11}} \\ \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{12}} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{12}} & \dots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{12}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{1N}} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{1N}} & \dots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_{1N}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu}_1) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{\mu}_1) \\ f_2(\boldsymbol{\mu}_1) \\ \dots \\ f_m(\boldsymbol{\mu}_1) \end{pmatrix}.$$

Функция $\alpha_j(t_j)$ определена как

$$\alpha_j(t_j) = \frac{\varphi_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j})}{\varphi_0(t_j)} \cdot \sigma_j - 1,$$

где $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ – стандартный нормальный закон распределения, а $t_{ji} = (\hat{x}_{ji} - \mu_{1j}) / \sigma_j$.

В качестве среднеквадратического отклонения σ_j j -ой величины на практике используют оценку s_j , вместо μ_{1j} используется выборочное

среднее \bar{x}_j . При этом неизвестными остаются значения функции плотности распределения случайной величины x в точках

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^T.$$

Введем обозначение для разности выборочной интегральной функции распределения вероятностей F_j и функции нормального закона F_0 :

$$\Delta F_j(t_j) = \sigma_j \cdot F_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j}) - F_0(t_j).$$

Заменяем функцию $\Delta F_j(t_j)$ полиномами $\hat{f}(t_j, \mathbf{a}_{\text{left}})$ и $\hat{f}(t_j, \mathbf{a}_{\text{right}})$, параметры которых определим как

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{left}} = \arg \min_{\mathbf{a}_{\text{left}}} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{left}}} \left(\Delta F_j(t_{j(i)}) - \hat{f}(t_{j(i)}, \mathbf{a}_{\text{left}}) \right)^2 \right),$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{right}} = \arg \min_{\mathbf{a}_{\text{right}}} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{right}}} \left(\Delta F_j(t_{j(i)}) - \hat{f}(t_{j(i)}, \mathbf{a}_{\text{right}}) \right)^2 \right),$$

где $t_{j(i)}$ – i -ый член вариационного ряда нормированной величины t_j , n_{left} – индекс (i) наибольшего значения вариационного ряда ($\hat{x}_{j(1)}, \hat{x}_{j(2)}, \dots, \hat{x}_{j(n)}$), для которого выполняется условие $\hat{x}_{j(i)} \leq \hat{x}_j$; аналогично n_{right} – индекс (i) наименьшего значения вариационного ряда ($\hat{x}_{j(1)}, \hat{x}_{j(2)}, \dots, \hat{x}_{j(n)}$), для которого выполняется условие $\hat{x}_{j(i)} > \hat{x}_j$. Можно сказать, что ряд $\Delta F_j(t_{j(1)}), \Delta F_j(t_{j(2)}), \dots, \Delta F_j(t_{j(n)})$ делится надвое по признаку того, меньше/больше ли значение $t_{j(i)}$, чем среднее арифметическое данной выборки. Пример такой аппроксимации для случая полинома второй степени продемонстрирован на рис. 4.

Тогда

$$\alpha_j(t_j) = \frac{\sigma_j \cdot \varphi_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j}) - \varphi_0(t_j)}{\varphi_0(t_j)} = \frac{\varphi_j(\sigma_j \cdot t_j + \mu_{1j})}{\varphi_0(t_j)} \cdot \sigma_j - 1 \approx \frac{\frac{d\hat{f}(t_j, \hat{\mathbf{a}})}{dt_j}}{\varphi_0(t_j)},$$

где $\hat{a} = \hat{a}_{\text{left}}$ для $t_{j(i)} > \hat{t}_j$, $\hat{a} = \hat{a}_{\text{right}}$ для $t_{j(i)} < \hat{t}_j$.

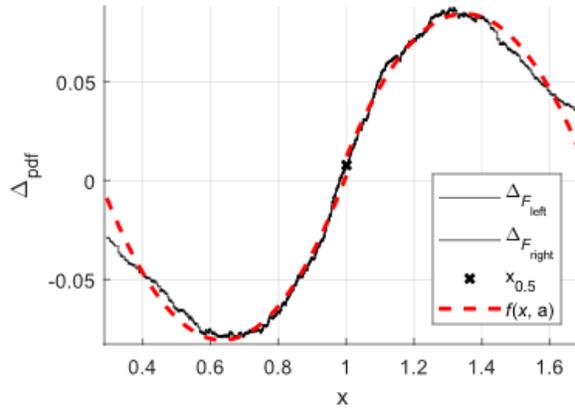


Рис. 4. Полиномиальная аппроксимация разности выборочной функции распределения вероятностей и нормального закона.

В таком случае функционал $\alpha(\mu_1, \widehat{\mathbf{X}})$ можно заменить его оценкой:

$$\widehat{\alpha}(\mu_1, \widehat{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 f(t_{1(i)}, \widehat{\mathbf{a}}_1)}{dt_{1(i)}^2} / \varphi_0(t_{1(i)})}{1 + \frac{df(t_{1(i)}, \widehat{\mathbf{a}}_1)}{dt_{1(i)}} / \varphi_0(t_{1(i)})} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 f(t_{2(i)}, \widehat{\mathbf{a}}_2)}{dt_{2(i)}^2} / \varphi_0(t_{2(i)})}{1 + \frac{df(t_{2(i)}, \widehat{\mathbf{a}}_2)}{dt_{2(i)}} / \varphi_0(t_{2(i)})} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{d^2 f(t_{N(i)}, \widehat{\mathbf{a}}_N)}{dt_{N(i)}^2} / \varphi_0(t_{N(i)})}{1 + \frac{df(t_{N(i)}, \widehat{\mathbf{a}}_{N(i)})}{dt_{N(i)}} / \varphi_0(t_{N(i)})} \end{pmatrix}.$$

Если $\hat{f}(t_j, \hat{\mathbf{a}}_j) = \hat{a}_{j2} \cdot t_j^2 + \hat{a}_{j1} \cdot t_j + \hat{a}_{j0}$, то получим:

$$\hat{\alpha}(\mu_1, \hat{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot \hat{a}_{12} / \varphi_0(t_{1(i)})}{1 + (2 \cdot \hat{a}_{12} \cdot t_{1(i)} + \hat{a}_{11}) / \varphi_0(t_{1(i)})} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot \hat{a}_{22} / \varphi_0(t_{2(i)})}{1 + (2 \cdot \hat{a}_{22} \cdot t_{2(i)} + \hat{a}_{21}) / \varphi_0(t_{2(i)})} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot \hat{a}_{N2} / \varphi_0(t_{N(i)})}{1 + (2 \cdot \hat{a}_{N2} \cdot t_{N(i)} + \hat{a}_{N1}) / \varphi_0(t_{N(i)})} \end{pmatrix}.$$

Данные выражения исчерпывающе представляют описанную теоретическую модель.

5.2. Полунапараметрический метод, основанный на проекционной оценке плотности распределения случайных погрешностей с применением усеченных рядов Грама–Шарлье типа А.

Другой подход [75] основан на построении оценки искомой плотности около некоторой опорной (реперной) плотности с применением системы ортонормированных полиномов (используются для коррекции реперного закона так, чтобы он походил на искомый). Далее использованы полиномы из усеченного ряда Грама–Шарлье типа А [79]. В качестве реперной плотности выбран нормальный закон.

Пусть u_d – ортогональные полиномы степени d , нормированные в соответствии с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{d_1}(\hat{x}_j) \cdot u_{d_2}(\hat{x}_j) \cdot \varphi_0(\hat{x}_j) d\hat{x}_j = \delta(d_1, d_2),$$

где $u_0 = 1$, а $\delta(d_1, d_2) = \begin{cases} 1, & d_1 = d_2, \\ 0, & d_1 \neq d_2, \end{cases}$ – символ Кронекера. Коэффициенты полиномов u_d можно рассчитать с помощью процедуры ортогонализации Грама–Шмидта. Значения этих коэффициентов зависят от заданного условия, то есть от вида закона распределения $\varphi_0(\hat{x}_j)$, выбранного в качестве реперного.

Пользуясь введенными обозначениями, искомое распределение $\varphi_j(\hat{x}_j)$, необходимое для непараметрического согласования результатов совместных измерений, можно представить как

$$\varphi_j(\hat{x}_j) = \varphi_0(\hat{x}_j) \cdot \sum_{d=0}^{\infty} \beta_d \cdot u_d(\hat{x}_j),$$

где $\beta_d = \int_{-\infty}^{\infty} u_d(\hat{x}_j) \cdot \varphi_0(\hat{x}_j) d\hat{x}_j$.

Значения β_d используются в данном случае в качестве масштабирующих коэффициентов, являясь при этом математическим ожиданием случайной величины $u_d(\hat{x}_j)$. Для выборки $\hat{\mathbf{x}}_j^T = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})$ из n результатов многократных измерений величины x_j , значение β_d можно рассчитать следующим образом: $\beta_d^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n u_d(\hat{x}_{ji})$.

Приближенную оценку $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ искомого распределения $\varphi_j(\hat{t}_j)$ можно найти как

$$\varphi_j^*(\hat{t}_j) = \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot \sum_{d=0}^D \beta_d^* \cdot u_d(\hat{t}_j),$$

где D – верхний предел степени ортогональных полиномов, используемых для идентификации искомого закона распределения.

Если в качестве референса выбран нормальный закон, то функции u_d примут вид полиномов Эрмита He_d . Тогда оценка $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$ искомого распределения может быть получена проекционным методом Грама-Шарлье:

$$\varphi_j^*(\hat{t}_j) = \frac{1}{\sigma_j} \cdot \varphi_0(\hat{t}_j) \cdot \left(1 + \sum_{d=3}^D \frac{1}{d!} \beta_d^* \cdot He_d(\hat{t}_j) \right),$$

где He_d – d -ый полином Эрмита, равный

$$He_d(\hat{t}_j) = \sum_{i=0}^{[d/2]} \frac{2^{-i} \cdot (-1)^i \cdot d!}{i! \cdot (d-2 \cdot i)!} \cdot (\hat{t}_j)^{d-2 \cdot i},$$

$[x]$ – целая часть числа x . Соответственно оценки коэффициентов β_3 и β_4 равны $\beta_3^* = Sk_j^*$ и $\beta_4^* = Ku_j^* - 3$, где Sk_j^* и Ku_j^* – выборочные оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса анализируемого распределения $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$, то есть ключевые численные характеристики формы распределения, которые можно рассчитать по формулам

$$Sk_j^* = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^3}{\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, Ku_j^* = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^4}{\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{x}_{ji} - \bar{x}_j)^2 \right)^2}.$$

Обратимся к выражению, связывающему искомый закон распределения погрешностей с реперным через некоторую функцию расхождения $\alpha_j(\hat{t}_j)$. Используя проекционный метод Грама-Шарлье, оценку данной функции можно вычислить как $\alpha_j^*(\hat{t}_j) = \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot He_d(\hat{t}_j)$.

Чтобы получить оценку элементов вектор-функции $\alpha(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1)$, нужно найти производные $\partial/\partial\mu_j$ функционалов $\alpha_j(t_j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_j^*(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} &= \frac{\partial}{\partial \mu_j} \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot He_d(\hat{t}_j) = \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot \frac{\partial He_d(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} \\ &= \sum_{d=3}^D \frac{\beta_d^*}{d!} \cdot \left[\sum_{i=0}^{[d/2]} 2^{-i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \frac{d! \cdot (d-2 \cdot i)}{i! \cdot (d-2 \cdot i)!} \cdot \frac{(\hat{x}_j - \mu_{1j})^{d-2 \cdot i-1}}{\sigma_j^{k-2 \cdot i}} \right]. \end{aligned}$$

Если ограничиться первыми четырьмя членами ряда Грама-Шарлье ($D = 4$), то тогда можно получить модель $\varphi_j^*(\hat{t}_j)$, описывающую искомое распределение всего четырьмя параметрами (их выборочными оценками): математическим ожиданием μ_j ; стандартным отклонением σ_j ; коэффициентами асимметрии Sk_j и эксцесса Ku_j .

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_j^*(\hat{t}_j) &= \frac{\beta_3^*}{3!} \cdot He_3(\hat{t}_j) + \frac{\beta_4^*}{4!} \cdot He_4(\hat{t}_j) \\ &= \frac{Sk_j^*}{3!} \cdot (\hat{t}_j^3 - 3 \cdot \hat{t}_j) + \frac{Ku_j^* - 3}{4!} \cdot (\hat{t}_j^4 - 6 \cdot \hat{t}_j^2 + 3) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_j^*(\hat{t}_j)}{\partial \mu_j} &= \frac{\beta_3^*}{3!} \cdot \frac{\partial He_3(t_j)}{\partial \mu_j} + \frac{\beta_4^*}{4!} \cdot \frac{\partial He_4(t_j)}{\partial \mu_j} \\ &= \frac{Sk_j^*}{2 \cdot \sigma_j} \cdot (1 - \hat{t}_j^2) + \frac{Ku_j^* - 3}{3! \cdot \sigma_j} \cdot (3 \cdot \hat{t}_j - \hat{t}_j^3). \end{aligned}$$

Наконец, приближение $\alpha(\hat{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\mu}_1)$, с использованием которого становится доступным и непараметрическое согласование величин \mathbf{x} , принимает следующий вид:

Для многомерного варианта задачи согласования индустриальных данных в условиях, когда получены результаты $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ многократных независимых измерений величин $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$, параметризацию осуществляют следующим образом. Пусть функция $\hat{\varphi}_{0j}(t_j | h_j, \hat{t}_{j1}, \dots, \hat{t}_{jn})$ представляет собой ядерную оценку плотности для случайной величины $t_j = (x_j - \mu_{1j})/\sigma_j$, чье математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение равно единице, построенную по выборке $\hat{t}_{j1}, \dots, \hat{t}_{jn}$, $\hat{t}_{ji} = (\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j$, где μ_{1j} – математическое ожидание случайной погрешности x_j , σ_j – среднее квадратическое отклонение случайной величины x_j .

Запишем функцию правдоподобия для однократного совместного измерения величин \mathbf{x} :

$$\hat{L}(\boldsymbol{\mu}_1) = \prod_{j=1}^N \hat{\varphi}_{0j} \left(\frac{\hat{x}_j - \mu_{1j}}{\sigma_j} \right),$$

где N – число совместно измеряемых величин.

Так как для ядерных оценок $K(x) = K((x - x_k)/h)$, где h – ширина ядерного окна, а x_k – k -ое выборочное значение, выступающее в качестве центра (математического ожидания) ядра, для однократного совместного измерения величин \mathbf{x} получим:

$$\hat{L}(\boldsymbol{\mu}_1) = \prod_{j=1}^N \hat{\varphi}_{0j}(\hat{x}_j - \mu_{1j}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{p \cdot h_j} \sum_{k=1}^n K \left(\frac{(\hat{x}_j - \mu_{1j}) - (\hat{x}_{jk} - \mu_{1j})}{h_j \sigma_j} \right).$$

Аналогично имеем для многократных измерений:

$$\hat{L}(\boldsymbol{\mu}_1) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{p \cdot h_j} \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^n K \left(\frac{(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})/\sigma_j - (\hat{x}_{jk} - \mu_{1j})/\sigma_j}{h_j} \right).$$

Чтобы параметры μ_{1j} не сокращались при вычислении M -оценки, будем, как предложено в работе [80], вычислять значение ядра не в точках $(\hat{x}_{ji} - \mu_{1j})$, а в точках $(\hat{x}_{ji} - \hat{x}_{1j})$, где \hat{x}_j – оценка математического ожидания случайной величины x_j по выборке $\hat{\mathbf{x}}_j = (\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2}, \dots, \hat{x}_{jn})^T$ многократных равнооточных измерений объемом n (несмещенная оценка μ_{1j}). Кроме того, заменим точные значения среднее квадратического отклонения σ_j несмещенными оценками s_j по выборкам $\hat{\mathbf{x}}_j$, $j = 1, \dots, N$.

Оценке максимального правдоподобия параметров μ_1 соответствует решение задачи отыскания оптимума:

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= \arg \max_{\mu_1} \left(\widehat{\ln L}(\mu_1) \right) \\ &= \arg \max_{\mu_1} \left[N \cdot \ln \left(\frac{1}{p} \right) + \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{1}{h_j} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(\sum_{k=1}^n K(z) \right) \right], \\ z &= \frac{(\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j) - (\hat{x}_{jk} - \mu_{1j})}{h_j s_j}, \end{aligned}$$

сводящееся к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial \left(\widehat{\ln L}(\mu_1) \right)}{\partial \mu_1} = \mathbf{0},$$

относительно μ_1 , где $\widehat{\ln L}$ – логарифмическая функция правдоподобия.

Если в качестве ядра $K(x)$ выбрать Гауссову функцию вида

$$K(x) = \exp \left(\frac{-x^2}{2} \right) / \sqrt{2 \cdot \pi},$$

то получим следующие уравнение для получения эффективной оценки математического ожидания μ_{1j} случайной величины x_j с неизвестной плотностью распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\widehat{\ln L}(\mu_1) \right)}{\partial \mu_{1j}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right) \cdot \frac{(\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j})}{h_j^2 \cdot s_j^2}}{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right)} = 0, \\ \mu_{1j} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right) \cdot \hat{x}_{jk}}{\sum_{k=1}^n K \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right)} &= 0, \end{aligned}$$

Применив метод неопределенных множителей Лагранжа, можно преобразовать функцию правдоподобия так, чтобы ее максимум при варьировании переменной μ_1 соответствовал бы набору заданных ограничений $\mathbf{f}(\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1N}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$:

$$\mu_1^* = \arg \max_{\mu_1: \mathbf{f}(\mu_1) = \mathbf{0}} \widehat{\ln L}(\mu_1, \boldsymbol{\lambda})$$

$$= \arg \max_{\mu_1: \mathbf{f}(\mu_1) = \mathbf{0}} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \widehat{\ln \varphi}_{0j} \left(\frac{\hat{x}_{ji} - \hat{x}_j - \hat{x}_{jk} + \mu_{1j}}{h_j \cdot s_j} \right) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\mu_1) \right),$$

где $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – вектор множителей Лагранжа (если задано $\lambda_0 = 1$).

Непараметрическая оценка параметров μ_1 , полученная с учетом зависимостей $\mathbf{f}(\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1N}) = \mathbf{0}$, может быть достигнута путем решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial(\widehat{\ln L}(\mu_1, \boldsymbol{\lambda}))}{\partial \mu_1} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial(\widehat{\ln L}(\mu_1, \boldsymbol{\lambda}))}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Так как $\lambda_0 = 1$, получим:

$$\begin{cases} \mu_{11} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{1i} - \hat{x}_1 - \hat{x}_{1k} + \mu_{11}}{h_1 \cdot s_1}\right) \cdot \hat{x}_{1k}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{1i} - \hat{x}_1 - \hat{x}_{1k} + \mu_{11}}{h_1 \cdot s_1}\right)} + \frac{h_1^2 \cdot s_1^2}{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mu_1)}{\partial \mu_{11}} = 0, \\ \mu_{12} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{2i} - \hat{x}_2 - \hat{x}_{2k} + \mu_{12}}{h_2 \cdot s_2}\right) \cdot \hat{x}_{2k}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{2i} - \hat{x}_2 - \hat{x}_{2k} + \mu_{12}}{h_2 \cdot s_2}\right)} + \frac{h_2^2 \cdot s_2^2}{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mu_1)}{\partial \mu_{12}} = 0, \\ \dots \\ \mu_{1N} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{Ni} - \hat{x}_N - \hat{x}_{Nk} + \mu_{1N}}{h_N \cdot s_N}\right) \cdot \hat{x}_{Nk}}{\sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{x}_{Ni} - \hat{x}_N - \hat{x}_{Nk} + \mu_{1N}}{h_N \cdot s_N}\right)} + \frac{h_N^2 \cdot s_N^2}{n} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}(\mu_1)}{\partial \mu_{1N}} = 0, \\ \mathbf{f}(\mu_1) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

При правильном выборе значений h_1, h_2, \dots, h_N решение данной системы относительно μ_1 будет обеспечивать получение эффективной оценки требуемых величин. При этом при конечных размерах обрабатываемых выборок дисперсия получаемых оценок может не совпадать в точности с нижней границей Крамера-Рао, но будет достаточно близка к ней (тем ближе, чем больше будет размер обрабатываемых выборок). Так или иначе, дисперсия полученной выборки будет меньше, чем при параметрическом оценивании, осуществленном в ошибочном предположении о законе распределения случайных погрешностей.

В 2023 г. были получены новые теоретические результаты [81] в области решения задачи условной оптимизации при выполнении условий Каруша-Куна-Таккера, которые были положены в основу метода синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов. Эти результаты имеют важное значение для задачи построения замкнутого алгоритма согласования индустриальных данных, позволяющего отказаться от численных и итерационных схем, сходимость которых может быть

проблемной. В работе [81] указано, что решение задачи условной оптимизации вида

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\substack{\mathbf{x}: A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c}) \leq r^2}} \|\mathbf{x}\|_2^2$$

достигается оператором вида

$$\mathbf{x}^* = P \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot D \cdot \mathbf{c},$$

где n – размер векторов \mathbf{x} и \mathbf{c} ; $D = E_n - A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A$; E_n – единичная матрица размером $n \times n$; $P = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$; множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a \cdot \lambda^2 + h \cdot \lambda + d = 0,$$

$$a = \mathbf{b}^T \cdot P^T \cdot P \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot P^T \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot P \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot D \cdot \mathbf{c} - r^2,$$

$$h = 2 \cdot a, d = a + \mathbf{c}^T \cdot D \cdot \mathbf{c};$$

$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$ – Евклидова норма вектора \mathbf{x} .

Как видим, данное решение учитывает линейные ограничения и ограничения, заданные в форме неравенств, при необходимости легко может быть переписано для случая минимизации функционала в виде $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2$, но справедливо только для Евклидовой нормы L_2 , взятой в качестве метрики несогласия между согласуемыми величинами (что соответствует согласно условиям оптимальности применения метода наименьших квадратов случаю нормального закона распределения случайных ошибок). Соответственно ограничениями данного решения для непосредственного применения в задаче согласования промышленных данных являются:

- невозможность непосредственного учета нелинейных ограничений,
- невозможность учета отклонений законов распределения от нормального.

Вместе с тем, данные ограничения не являются непреодолимыми. Приведенное в работе [81] доказательство может быть распространено и на случай малых отклонений от Евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$, что как раз позволило бы рассмотреть случай малых отклонений от нормальности. Нелинейные ограничения могут быть в первом приближении линеаризованы и заменены локально оптимальным линейным приближением в окрестности точки пространства R^n , соответствующей согласуемым результатам измерений.

Будем искать решение задачи условной оптимизации в виде

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\substack{\mathbf{x}: A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c}) \leq r^2}} \left(\|\mathbf{x}\|_2^2 + \varepsilon \cdot g(\mathbf{x}) \right),$$

где $g(\mathbf{x})$ – положительнозначная функция от вектора \mathbf{x} , призванная учесть отклонения распределения от нормальности, $\varepsilon > 0$ – малая константа.

Выпишем функцию Лагранжа для данной задачи:

$$L = \left(\|\mathbf{x}\|_2^2 + \varepsilon \cdot g(\mathbf{x}) \right) + \lambda_0 \cdot (A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) + \lambda \cdot \left((\mathbf{x}-\mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c}) - r^2 \right).$$

Необходимыми условиями достижения оптимума в соответствии с условиями Каруша-Куна-Таккера являются равенства нулю всех соответствующих частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{L}{\mathbf{x}} &= 2 \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \cdot \frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + A^T \cdot \lambda_0 + 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c}) = \mathbf{0}_n, \\ \frac{L}{\lambda_0} &= A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}_m, \quad \frac{L}{\lambda} = (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c}) - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Для пояснения пути решения в первом приближении данных соотношений рассмотрим вырожденный случай безусловной задачи решения уравнения: пусть x_0 – корень уравнения вида $f(x) = 0$, требуется определить корень уравнения вида $f(x) + \varepsilon \cdot g(x) = 0$, где ε – малое число. В силу малости ε будем искать корень в виде небольшой флуктуации значения x_0 , то есть в форме $x_0 + \Delta x$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) + \varepsilon \cdot g(x_0 + \Delta x) &= 0, \\ f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot g(x_0) + \varepsilon \cdot \frac{dg(x_0)}{dx} \cdot \Delta x &\approx 0, \\ \left(\frac{df(x_0)}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{dg(x_0)}{dx} \right) \cdot \Delta x &\approx -\varepsilon \cdot g(x_0), \\ \Delta x &\approx -\frac{\varepsilon \cdot g(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx} + \varepsilon \cdot \frac{dg(x_0)}{dx}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом возможно обеспечить уточнение значения решения системы уравнений вида $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, где, как и прежде, \mathbf{F} – вектор-функция векторного аргумента \mathbf{x} , а $\mathbf{0}$ – вектор соответствующего размера, заполненный нулями. Пусть решением данной системы уравнений является вектор \mathbf{x}_0 , а дополнительным малым членом

в системе уравнений выступает вектор-функция $\varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x})$, значительная часть компонент которой тождественно равна нулю и где ε – по-прежнему малое число. В силу малости ε будем искать корень в виде небольшой флуктуации значения \mathbf{x}_0 , то есть в форме $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$. Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) + \varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} &\approx \mathbf{0}, \\ \left(\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} \right) \cdot \Delta \mathbf{x} &\approx -\varepsilon \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

Обратим внимание, что, как и ранее, $\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$ и $\frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$ являются матрицами Якоби и имеют соответствующий размер (необязательно квадратный). Введем обозначение $\mathbf{Q} = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}} + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \Delta \mathbf{x} &\approx -\varepsilon \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0), \\ \Delta \mathbf{x} &\approx -\varepsilon \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Соответственно решение приведенной выше системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= 2 \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \cdot \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + A^T \cdot \lambda_0 + 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}_n, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} &= A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}_m, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \end{aligned}$$

становится возможным в виде:

$$\mathbf{x}^{**} = P \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot D \cdot \mathbf{c} + \Delta \mathbf{x},$$

где множитель Лагранжа λ отыскивается в виде выражения

$$\lambda = \Delta \lambda - 1 - \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}}$$

(знак минус при решении приведенного выше квадратного уравнения определяется условиями теоремы Куна-Таккера для решения задачи условной оптимизации). Аналитические добавки $\Delta \mathbf{x}$ и $\Delta \lambda$ определяются из выражения $\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} \approx -\varepsilon \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}^*)$, где

$$\mathbf{F} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbf{x} + A^T \cdot \lambda_0 + 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ A \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \\ (\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) - r^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot \left(\frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T \\ \mathbf{0}_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} (2 \cdot (1 + \lambda) \cdot E_n, 2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c})) \\ (A, \mathbf{0}_m) \\ (2 \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{c})^T, 0) \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \left(\frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}}, \mathbf{0}_{n+m+1} \right).$$

Все размерности соблюдаются, так как функция $g(\mathbf{x})$ является скалярной (флуктуацией векторной нормы L_2), и поэтому матрица Якоби $dg(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$ для нее представляет собой вектор той же длины, что и \mathbf{x} .

Таким образом, удается преодолеть одно из ограничений применения теоретических результатов, полученных в работах [81, 82], применительно к задаче согласования промышленных данных. Второе ограничение, связанное с невозможностью в постановке задачи Куна-Таккера заменить линейные условия нелинейными, преодолевается через соотношения зависимости решения системы уравнений от неточности исходных данных. Наконец, неточность уравнений взаимосвязи, накладываемых на согласуемые значения, вводится в полученные соотношения в виде неточности коэффициентов компонент вектора \mathbf{b} . Данные обстоятельства создают возможность для аналитического преобразования задачи согласования промышленных данных к виду, допускающему непосредственные прямые вычисления (straight-forward computing) без необходимости прибегать к решению вычислительных задач итерационными методами, которые неизбежно будут оказываться плохо обусловленными в определенных условиях. Поскольку вектор \mathbf{b} непосредственно входит в полученные соотношения, то влияние отображаемых с помощью его погрешности неопределенностей уравнений взаимосвязи на конечные результаты оказывается возможным учесть непосредственно в рамках традиционной схемы линеаризации. Единственным препятствием для достижения полной общности является групповое выражение ограничений в виде неравенств в виде одного неравенства $(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \leq r^2$. Впрочем, остаются определенные

возможности для преодоления и данного обстоятельства тоже. Особенности доказательства теоретического результата работ [81, 82], на котором построен приведенный подход, не позволяют задать ограничения-неравенства в произвольном виде, но вполне могут быть обобщены на случай перехода к взвешенной сумме в левой части неравенства: $(\mathbf{x}-\mathbf{c})^T \cdot Y^T \cdot Y \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c}) \leq r^2$. Задание матрицы весов $Y^T \cdot Y$ может быть произведено таким образом, чтобы отношение максимального по модулю собственного числа $Y^T \cdot Y$ к минимальному составило бы заведомо большое значение, что позволит превратить ограничение-неравенство из группового в индивидуальное. Другим возможным направлением является рассмотрение ограничений в форме $(\mathbf{x}-\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{c})^T \leq R$, где R уже представляет собой квадратную матрицу. Подобный вариант сопряжен, правда, с некоторыми сложностями соответствия условиям Каруша-Куна-Таккера и возможностью использования подстановки при выводе конечных аналитических выражений, предложенной в работе [81, 82].

Первый предложенный подход приводит к следующим модификациям:

$$\mathbf{x}^* = Y^{-1} \cdot P \cdot \mathbf{b} + \lambda \cdot (1 + \lambda)^{-1} \cdot Y^{-1} \cdot D \cdot Y \cdot \mathbf{c},$$

где n – размер векторов \mathbf{x} и \mathbf{c} ; $D = E_n - A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1} \cdot A$; E_n – единичная матрица размером $n \times n$; $P = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$; множители Лагранжа λ определяются решением квадратного уравнения

$$a \cdot \lambda^2 + h \cdot \lambda + d = 0,$$

$$a = \mathbf{b}^T \cdot P^T \cdot P \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \cdot P^T \cdot Y \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot P \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot Y \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot D \cdot Y \cdot \mathbf{c} - r^2,$$

$$h = 2 \cdot a, d = a + \mathbf{c}^T \cdot Y^T \cdot D \cdot Y \cdot \mathbf{c};$$

$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$ – как и прежде, Евклидова норма вектора \mathbf{x} .

Отметим, что в случае задания матрицы весов в виде отдельной квадратной матрицы (из условий задачи следует с необходимостью, что обязательно положительно определенной), представление ее в форме $Y^T \cdot Y$ осуществляется путем разложения Холецкого, являющейся стандартной вычислительной задачей.

Ранее в литературе не было представлено выражений, позволяющих решить общую задачу согласования данных (при законах распределения, отличающихся от нормального, при учете неточности согласуемых данных, при учете неточности уравнений взаимосвязи, при

накладываемых ограничениях, заданных в том числе в виде неравенств) при довольно слабых допущениях (малость ε , необходимость локальной линеаризации нелинейной вектор-функции уравнений взаимосвязи, переход к алгебраическим уравнениям от интегро-дифференциальных, что в целом является стандартом де-факто при численном решении подобных уравнений). Полученные соотношения открывают новую страницу в области Data Reconciliation: обладая прямыми аналитическими формулами, определяющими результаты согласования, можно осуществлять оптимизацию самой процедуры согласования, что ранее (при численном итерационном характере соответствующих вычислительных процедур) было сделать на порядки сложнее и существенно более трудоемко и только с применением численных процедур. Сейчас же появляется возможность для аналитической оптимизации довольно простых (хоть и громоздких) выражений.

Для придания полученному теоретическому аппарату законченности и замкнутости авторы использовали следующую схему:

(1) для любого выбранного фреймворка или формализма описания неопределенности согласуемых данных есть возможность выделить носитель возможных значений результата измеряемой величины (предельные возможные границы) – за исключением, быть может, бесконечных p -boxes, на которые вместе с тем могут быть наложены внешние ограничения из условий решаемой задачи измерений или математической обработки эмпирических данных, превращающие неограниченные случайные погрешности в ограниченные;

(2) пользователю предлагается указать, есть ли основания считать, что в данных присутствуют неисключенные систематические погрешности, или же таких оснований нет – в первом случае соответствующие пределы носят абсолютный характер и формируют границы, в которых в обязательном порядке должны находиться результаты согласования, а во втором случае границы возможных значений должны быть шире;

(3) задав соответствующее ограничение на носитель в виде неравенства указанного выше вида, пользователь выполняет расчеты по полученной формуле для \mathbf{x}^* или \mathbf{x}^{**} с применением упомянутых ранее схем метрологического автосопровождения [2–4], учитывающих погрешности результатов измерений, перенесенные на вектор \mathbf{c} , и погрешности уравнений взаимосвязи, перенесенные на вектор \mathbf{b} – тем самым в конце вычислений у пользователя оказывается результат согласования сразу

для всех анализируемых величин (вектор \mathbf{x}^* или \mathbf{x}^{**}), оптимальный по Карушу-Куну-Таккеру, и характеристика его погрешности, унаследованной как от вектора \mathbf{x} , так и от уравнений взаимосвязи; отсутствие нарушения условий оптимальности определяется значением r^2 , которое учитывает возможные отклонения согласованных значений от несогласованных.

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа обсуждает текущее положение в области задачи согласования индустриальных данных, сформировавшиеся основные подходы к ее решению (как в классической постановке, так и в неклассической). Отмечается, что исторически исходным подходом являлось аналитическое решение упрощенной задачи в заданных условиях, которое с ростом вычислительных возможностей и усложнением накладываемых на решение задачи ограничений и условий, а также с ростом требований к свойствам результатов было вытеснено подходами на основе численных методов и итерационных схем. Статья предоставляет читателю исчерпывающее представление обо всех основных направлениях в данной задаче, а также предлагает новые: в работе изложены авторские подходы к непараметрическому согласованию данных, а также подход, который позволит замкнуть виток исторического развития методов решения в задаче согласования данных и при современном уровне постановки задачи с повышенными требованиями к результатам и накладываемым ограничениям вернуться к аналитическому решению с получением замкнутых формул и выражений, допускающих самостоятельную и отдельную оптимизацию процедуры согласования индустриальных данных под индивидуальные условия, ранее не проводившуюся. Авторы также надеются, что данная работа частично компенсирует явно ощущающийся недостаток научной литературы на русском языке в области согласования данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. J. Leibman, T. F. Edgar, L. S. Lasdon, *Efficient data reconciliation and estimation for dynamic processes using nonlinear programming techniques*. – Computers & chemical engineering. **16**, No. 10-11 (1992), 963-986.
2. К. К. Семенов, Г. Н. Солопченко, *Theoretical prerequisites for implementation of metrological self-tracking of measurement data analysis programs*. – Measurement Techniques. **53**, No. 6 (2010), 592-599.

3. K. K. Semenov, G. N. Solopchenko, *Combined method of metrological self-tracking of measurement data processing programs general problems of metrology and measurement techniques*. – Measurement Techniques. **54**, No.4, (2011), 378-386.
4. К. К. Семенов, *Метрологическое автосопровождение программ вычислений в информационно-измерительных системах*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.11.16. Информационно-измерительные и управляющие системы. Санкт-Петербург. 2011.
5. D. R. Kuehn, H. Davidson, *Computer control*. – Chem. Engng. Prog. **57** (1961), 44-47.
6. V. Vaclavek, *Studies on system engineering. II. On the application of the calculus of observations in calculations of chemical engineering balances*. – Collection of Czechoslovak Chemical Communications. **34**, No. 2 (1969), 364-372.
7. V. Vaclavek, M. Loučka *Selection of measurements necessary to achieve multicomponent mass balances in chemical plant*. – Chemical Engineering Science. **31**, No. 12 (1976), 1199-1205.
8. R. L. Wiegel, *Advances in mineral processing material balances*. – Canadian Metallurgical Quarterly. **11**, No. 2 (1972), 413-424.
9. D. Hodouin, M. D. Everell, *A hierarchical procedure for adjustment and material balancing of mineral processes data*. – International Journal of Mineral Processing. **7**, No. 2 (1980), 91-116.
10. D. E. Simpson, V. R. Voller, M. G. Everett, *An efficient algorithm for mineral processing data adjustment*. – International Journal of Mineral Processing. **31**, No. 1-2 (1991), 73-96.
11. N. Heraud, D. Maquin, J. Ragot, *Multilinear balance equilibration: Application to a complex metallurgical process*. – Mining, Metallurgy & Exploration. **8**, No. 4 (1991), 197-204.
12. K. J. Reid, et al., *A Survey of Material Balance Computer Packages in the Mineral Processing Industry*. – Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry. Soc. of Min. Eng. of AIME. (1982), 41-62.
13. R. S. Mah, G. M. Stanley, D. M. Downing, *Reconciliation and rectification of process flow and inventory data*. – Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development. **15**, No. 1 (1976), 175-183.
14. C. M. Crowe, Y. A. G. Campos, A. Hrymak, *Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part I: linear case*. – AIChE Journal. **29**. No. 6 (1983), 881-888.
15. C. L. E. Swartz, *Data reconciliation for generalized flowsheet applications*. – The American chemical society. **197** (1989), 58-64.
16. M. Sanchez, J. Romagnoli, *Use of orthogonal transformations in data classification-reconciliation*. – Computers & chemical engineering. **20**, No. 5 (1996), 483-493.
17. D. L. Ripps *Adjustment of experimental data*. – Chem. Eng. Prog. Symp. Ser. **61**, No. 8 (1965), 8-13.
18. P. M. Reilly, R. E. Carpani, *Application of statistical theory of adjustment to material balances*. – 13th Canadian Chemical Engineering Congress, Montreal, Quebec (1963).
19. G. A. Almasy, T. Sztano, *Checking and Correction of Measurements on the Basis of Linear System Model*. – Prob. Control Inform. Theory. **4** (1975), 57-69.

20. S. Narasimhan, R.S.H. Mah, *Generalized Likelihood Ratio Method for Gross Error Identification*. – AIChE Journal. **33** (1987), 1514-1521.
21. A. C. Tamhane, C. Jordache, R.S.H. Mah, *A Bayesian Approach to Gross Error Detection in Chemical Process Data. Part I: Model Development*. – Chemometrics and Intel. Lab. Sys. **4** (1988), 33-45.
22. H. Tong, C. M. Crowe, *Detection of Gross Errors in Data Reconciliation by Principal Component Analysis*. – AIChE Journal. **41** (1995), 1712-1722.
23. J. A. Romagnoli, G. Stephanopoulos, *Rectification of Process Measurement Data in the Presence of Gross Errors*. – Chem. Eng. Sci. **36** (1981), 1849-1863.
24. R. W. Serth, W. A. Heenan, *Gross Error Detecting and Data Reconciliation in Steam-Metering Systems*. – AIChE Journal. **30**, (1986), 743-747.
25. J. Rosenberg, R. S. H. Mah, C. Jordache, *Evaluation of Schemes for Detecting and Identification of Gross Errors in Process Data*. – Ind. & Eng. Chem. Proc. Des. Dev. **26** (1987), 555-564.
26. C. Jordache, R. S. H. Mah, A. C. Tamhane, *Performance Studies of the Measurement Test for Detecting of Gross Error in Process Data*. – AIChE Journal. **31** (1985), 1187-1201.
27. D. K. Rollins, J. F. Davis, *Unbiased Estimation Technique for Identification of Gross Errors*. – AIChE Journal. **38** (1992), – 563-571.
28. V. Hlavacek, *Analysis of a Complex Plant—Steady State and Transient Behavior I—Plant Data Estimation and Adjustment*. – Computers Chem. Engng. **1** (1977), 75-81.
29. R. S. H. Mah, *Design and Analysis of Performance Monitoring Systems*. – Chemical Process Control H. New York: Engineering Foundation (1982).
30. A. C. Tamhane, R. S. H. Mah, *Data Reconciliation and Gross Error Detection in Chemical Process Networks*. – Technometrics. **27** (1985), 409-422
31. R. S. H. Mah, *Data Screening*. – Foundations of Computer-Aided Process Operations. Amsterdam: CACHE/Elsevier. (1987), 67-94.
32. C. M. Crowe, *Data Reconciliation Progress and Challenges*. – J. Proc. Cont. **6** (1996), 89-98.
33. R. S. H. Mah, *Chemical Process Structures, and Information Flows*. Boston: Butterworths (1990).
34. C. E. Bodington, *Planning, Scheduling and Control Integration in Process Industries*. New York: McGraw-Hill (1995).
35. F. Madron, *Process Plant Performance: Measurement and Data Processing for Optimization and Retrofits*. – Chichester, West Sussex, England: Ellis Horwood Limited Co. (1992).
36. V. V. Veverka, F. Madron, *Material and Energy Balancing in Process Industries: From Microscopic Balances to Large Plants*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier (1997).
37. J. C. Knepper, J. W. Gorman, *Statistical Analysis of Constrained Data Sets*. – AIChE Journal. **26** (1980), 260-264.
38. H. I. Britt, R. H. Luecke, *The Estimation of Parameters in Nonlinear Implicit Models*. – Technometrics. **15** (1973), 233-247.
39. A. Ruszczynski, *A linearization method for nonsmooth stochastic programming problems*. – Mathematics of Operations Research. **12**, No. 1 (1987), 32-49.

40. C. M. Crowe, *Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part II: The nonlinear case.* – *AIChE Journal*. **32**, No. 4 (1986), 616-623.
41. I. B. Tjoa, L. T. Biegler, *Simultaneous Strategies for Data Reconciliation and Gross Error Detection of Nonlinear Systems.* – *Computers Chem. Engng.* **15** (1991), 679-690.
42. V. Ravikumar, S. R. Singh, M. O. Garg, S. Narasimhan, *RAGEmA Software Tool for Data Reconciliation and Gross Error Detection.* – *Foundations of Computer-Aided Process Operations*. Amsterdam: CACHE/Elsevier (1994), 429-436.
43. C. De Mulder, et al., *An open software package for data reconciliation and gap filling in preparation of Water and Resource Recovery Facility Modeling.* – *Environmental Modelling & Software*. **107** (2018), 186-198.
44. A. Farzi, A. Mehrabani-Zeinabad, R. B. Boozarjomehry, *Data reconciliation: Development of an object-oriented software tool.* – *Korean Journal of Chemical Engineering*. **25**, No. 5 (2008), 955-965.
45. H. L. Lam, et al., *Software tools overview: process integration, modelling and optimisation for energy saving and pollution reduction.* – *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*. **6**, No. 5 (2011), 696-712.
46. F. Manenti, et al., *Adaptive data reconciliation coupling C++ and PRO/II and on-line application by the field.* – *Computer Aided Chemical Engineering*. **28** (2010), 373-378.
47. G. Buzzi-Ferraris, F. Manenti, *BzzMath: Library overview and recent advances in numerical methods.* – *Computer Aided Chemical Engineering*. **30** (2012), 1312-1316.
48. O. Cencic, *Nonlinear data reconciliation in material flow analysis with software STAN.* – *Sustainable Environment Research*. **26**, No. 6 (2016), 291-298.
49. T. Jiang, et al., *Strategy for improving data quality for a Kraft pulp mill recausticizing plant.* FOCAP0 2003: Proceedings Foundations Of Computer Aided Process Operations (2003), 467-470.
50. J. Y. Yong, et al., *Data reconciliation for energy system flowsheets.* – *Computer Aided Chemical Engineering*. **38** (2016), 2277-2282.
51. M. M. Camara, et al., *Numerical aspects of data reconciliation in industrial applications.* – *Processes*. **5**, No. 4 (2017), paper 56.
52. G. M. Stanley, R. S. H. Mah, *Estimation of Flows and Temperatures in Process Networks.* – *AIChE Journal*. **23** (1977), 642-650.
53. S. Narasimhan, C. Jordache, *Data reconciliation and gross error detection: An intelligent use of process data.* Elsevier (1999).
54. Y. Ramamurthi, P. B. Sistu, B. W. Bequette, *Control Relevant Dynamic Data Reconciliation and Parameter Estimation.* – *Computers Chem. Engng.* **17**, No. 1 (1993), 41-59.
55. I. W. Kim, M. J. Liebman, T. F. Edgar, *Robust Error in Variables Estimation using Nonlinear Programming Techniques.* – *AIChE Journal*. –**36** (1990), 985-993.
56. I. W. Kim, M. J. Liebman, T. F. Edgar, *A Sequential Error in Variables Estimation Method for Nonlinear Dynamic Systems.* – *Computers Chem. Engng.* **15** (1991), 663-670.
57. F. Allgöwer, et al., *Nonlinear predictive control and moving horizon estimation—an introductory overview.* – *Advances in control. Highlights of ECC'99.* (1999), 391-449.

58. W. R. Esposito, C. A. Floudas, *Global optimization for the parameter estimation of differential-algebraic systems*. – Industrial & Engineering Chemistry Research. **39**, No. 5 (2000), 1291-1310.
59. C. V. Rao, J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, *Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations*. – IEEE transactions on automatic control. **48**, No. 2 (2003), 246-258.
60. D. B. Özyurt, R. W. Pike, *Theory and practice of simultaneous data reconciliation and gross error detection for chemical processes*. – Computers & Chemical Engineering. **28**, No. 3 (2004), 381-402.
61. D. M. Prata, et al., *Nonlinear dynamic data reconciliation and parameter estimation through particle swarm optimization: Application for an industrial polypropylene reactor*. – Chemical Engineering Science. – **64**, No. 18 (2009), 3953-3967.
62. C. E. Llanos, M. C. Sanchez, R. A. Maronna, *Robust estimators for data reconciliation*. – Industrial & Engineering Chemistry Research. **54**, No. 18 (2015), 5096-5105
63. P. Groeneboom, G. Jongbloed, *Nonparametric estimation under shape constraints*. – Cambridge University Press. **38** (2014).
64. J. L. Horowitz, S. Lee, *Nonparametric estimation and inference under shape restrictions*. – Journal of Econometrics. **201**, No. 1 (2017), 108-126.
65. K. Shariatmadar, M. Versteyhe, *Linear programming under p-box uncertainty model*. – 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation. (2019), 84-89.
66. M. Bagajewicz, *Data reconciliation and instrumentation upgrade. Overview and challenges*. – FOCAPO (Foundations of Computer Aided Process Operations), Coral Springs, FL, USA. **372** (2003).
67. M. Bagajewicz, M. Markowski, *Instrumentation design and upgrade using an unconstrained method with pure economical objectives*. – Proceedings of FOCAPO. (2003).
68. M. Gala, M. J. Bagajewicz, *Rigorous methodology for the design and upgrade of sensor networks using cutsets*. – Industrial & Engineering Chemistry Research. **45**, No. 20 (2006), 6679-6686.
69. P. R. Kotecha, M. Bhushan, R. D. Gudi, *Multi-objective optimization based robust sensor network design*. – IFAC Proceedings Volumes. **43**, No. 5 (2010), 79-84.
70. L. K. Reznik, G. N. Solopchenko, *Use of priori information on functional relations between measured quantities for improving accuracy of measurement*. – Measurement. **3**, No. 3 (1985), 98-106.
71. C. C. D. Pai, G. Fisher, *Application of Broyden's Method to Reconciliation of Nonlinearly Constrained Data*. – AIChE Journal. **34**, No. 5 (1988), 873-876.
72. S. J. Julier, J. K. Uhlmann. *New extension of the Kalman filter to nonlinear systems*. – Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI. International Society for Optics and Photonics. **3068** (1997), 182-193.
73. D. Wang, J. A. Romagnoli, *Robust data reconciliation based on a generalized objective function*. – IFAC Proceedings Volumes. **35**, No. 1 (2002), 191-196.
74. F. R. Hampel, et al., *Robust statistics: the approach based on influence functions*. – Wiley-Interscience; New York. (1986).

75. V. A. Garanin, K. K. Semenov, *Semi-nonparametric approach for measured data reconciliation based on the Gram-Charlier series expansion*. – Measurement: Sensors. **18** (2021), paper 100351.
76. V. A. Garanin, K. K. Semenov, *Increasing measurement accuracy by nonparametric data reconciliation*. – Measurement. **238** (2024), paper 115235.
77. V. A. Garanin, K. K. Semenov, *Measured data reconciliation processed within nonlinear constraints models in cyber-physical systems*. – Lecture Notes in Networks and Systems. **460** (2023), 78-95.
78. V. A. Garanin, K. K. Semenov, *Estimating the accuracy increase during the measuring two quantities with linear dependence*. – Lecture Notes in Networks and Systems. **95** (2020), 235-246
79. J. E. Kolassa, *Series approximation methods in statistics*. – Springer Science & Business Media. **88** (2006).
80. T. Jaki, R. W. West, *Maximum kernel likelihood estimation //Journal of Computational and Graphical Statistics*. — **17**, No. 4 (2008), 976-993.
81. А. А. Ефремов, В. Н. Козлов *Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов*. – Информационно-управляющие системы. No. 4 (2023), 47-55.
82. А. А. Ефремов, *Projection operator for solving generalized problems of program motions stabilization*. – Информатика, телекоммуникации и управление. **16**, No. 4 (2023), 49-59.

Garanin V. A., Semenov K. K. Nonparametric methods for solving the data reconciliation problem.

This work explores the current state of industrial data reconciliation, examining key approaches to addressing this problem in both classical and nonclassical contexts. The article provides a comprehensive overview of the main directions in this field and introduces novel contributions by the authors. These include approaches to nonparametric data reconciliation and a new method that revisits the analytical solution with the modern requirements to the restrictions on the reconciliation final results and at the current level of problem complexity. It offers closed-form expressions that enable the independent and targeted optimization of the industrial data reconciliation process for specific conditions — a development not previously achieved. Finally, this paper aims to address the gap in the field of data reconciliation in Russian-language scientific literature.

Санкт-Петербургский
политехнический университет Петра Великого,
С.-Петербург, Россия

E-mail: garanin_va@spbstu.ru

E-mail: semenov_kk@spbstu.ru

Поступило 10 декабря 2024 г.